Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Арутюнов, Свойства функции минимума в квадратичной задаче, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 1, 36–45

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9330>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 16:14:27

Свойства функции минимума в квадратичной задаче

А. В. Арутюнов

Рассмотрены возмущения задачи минимизации квадратичной формы при квадратичных ограничениях типа равенств. Изучена функция минимума ω этой задачи, которая ставит в соответствие каждому возмущению исходной задачи точную нижнюю грань в возмущенной задаче. Получены достаточные условия полунепрерывности сверху и снизу функции минимума ω как в нуле, так и в его окрестности. Приведены примеры, демонстрирующие существенность приведенных условий.

Библиография: 6 названий.

DOI: 10.4213/mzm9330

Введение. Настоящая заметка посвящена исследованию некоторых свойств квадратичных отображений и является естественным продолжением статей [1], [2]. Пусть даны квадратные $n \times n$ симметричные матрицы Q_i , $i = 0, \dots, k$, определяющие на $\mathbb{R}^n$ квадратичные формы q_i : $q_i(x) = \langle Q_i x, x \rangle$, где угловые скобки обозначают скалярное произведение. Предположим, что

$$q_0(x) \geq 0 \quad \forall x: \quad q_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (1)$$

или, иными словами, форма q_0 неотрицательно определена на (обычно не выпуклом) конусе

$$\{x \in \mathbb{R}^n : q_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, k\}.$$

(n, k – заданные натуральные числа.)

Очевидно (1) равносильно тому, что в задаче минимизации

$$q_0(x) \rightarrow \inf, \quad q_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (2)$$

значение инфимума конечно, причем оно равно нулю, а точка $x_0 = 0$ является точкой (глобального) минимума.

Наряду с задачей (2) рассмотрим ее возмущение

$$q_0(x) \rightarrow \inf, \quad Q(x) = y, \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00427) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (соглашение №8209).

где $Q = (q_1, \dots, q_k)$ – квадратичное отображение, действующее из $X = \mathbb{R}^n$ в $Y = \mathbb{R}^k$, которое каждому $x \in X$ ставит в соответствие k -мерный вектор $Q(x) = (q_1(x), \dots, q_k(x)) \in Y$, а $y \in Y$ играет роль параметра возмущения.

При каждом фиксированном значении $y \in Y$ через $\omega(y)$ обозначим инфимум в задаче (2), т.е. положим

$$\omega(y) = \inf_x \{q_0(x) : Q(x) = y\}. \quad (4)$$

При этом $\omega(y)$ может принимать и значение $(-\infty)$, а для $y \in Y$, для которых множество $\{x : Q(x) = y\}$ пусто, мы полагаем $\omega(y) = +\infty$.

Сразу же отметим, что функция минимума ω положительно однородна, т.е.

$$\omega(\lambda y) \equiv \lambda \omega(y) \quad \forall \lambda > 0.$$

В этой работе для квадратичной задачи (2) исследуются полунепрерывность сверху и снизу функции ω . Эта задача сама по себе представляется интересной, хотя автору неизвестны для нее прикладные аспекты. В то же время функция минимума ω естественным образом возникает в теории, например, при исследовании неотрицательности квадратичной формы на пересечении квадратик. А именно (см. [1]), если выполняется (1), то имеет место

$$\max_{\lambda \in \Lambda_{k-1}} (\lambda^0 \omega(y) + \langle y^*, y \rangle) \geq 0 \quad \forall y \in Y. \quad (5)$$

Здесь Λ_{k-1} состоит из тех $(k+1)$ -мерных векторов

$$\lambda = (\lambda^0, y^*), \quad \lambda^0 \geq 0, \quad y^* = (y_1^*, \dots, y_k^*) \in \mathbb{R}^k, \quad |\lambda| = 1,$$

для каждого из которых существует такое линейное подпространство $\Pi \subseteq \mathbb{R}^n$, что

$$\text{codim } \Pi \leq (k-1), \quad \lambda^0 q_0(x) + \sum_{i=1}^k y_i^* q_i(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Pi.^1$$

Если же, кроме (1) выполнены предположения теоремы 3 из [1] (они составляют условие (*), введенное ниже) то, как доказано в [1], существует такое $\varepsilon > 0$, что в (5) можно ограничиться только теми $\lambda \in \Lambda_{k-1}$, для которых $\lambda^0 \geq \varepsilon$ и, значит, (5) принимает вид

$$\omega(y) + \max_{\lambda \in \Lambda_{k-1}} \left(\frac{\langle y^*, y \rangle}{\lambda^0} \right) \geq 0 \quad \forall y \in Y,$$

а для исследования этого условия важны топологические свойства функции ω на всем пространстве Y .

Исследование функции ω существенно осложняется тем, что в задаче (2) точка минимума $x_0 = 0$ всегда аномальна² относительно ограничения $Q(x) = 0$. Исследование функции минимума ω относится к теории чувствительности аномальных

¹Существование подпространства Π означает, что $\text{ind}(\lambda^0 q_0 + \sum_{i=1}^k y_i^* q_i) \leq (k-1)$. Здесь и ниже ind обозначает (отрицательный) индекс квадратичной формы, т.е. количество у нее отрицательных собственных значений. Кроме того, пространство сопряженное к $\mathbb{R}^k$ отождествляется с ним самим, а его элементы y^* – с векторами из $\mathbb{R}^k$.

²Напомним, для гладкого отображения $F: X \rightarrow Y$ точка x_0 называется аномальной, если его производная $F'(x_0)$ не является сюръективным оператором.

экстремальных задач с ограничениями, подробно изученных в [2], [3], так как задача (2) дает классический пример аномальной задачи. Однако при исследовании общей аномальной экстремальной задачи в [2], [3] естественно изучался локальный минимум, что заложено в определении рассматриваемой в [2], [3] функции минимума. А для квадратичной задачи (2) естественно рассматривать лишь глобальный минимум, что и отражено в определении функции ω . Таким образом, результаты общей теории (см. [2], [3]) к квадратичной задаче (2) напрямую не применимы и, более того, без предположения компактности окрестности, выбор которой обусловлен определением локального минимума, часть результатов из [2], [3] не выполняется. Вместе с тем квадратичная задача (2) является частным случаем общей аномальной задачи, и для нее справедливы некоторые результаты, не имеющие места в общем случае и, в частности, функция ω изучается не только в нуле, но и на всем пространстве Y .

Обозначения и понятия. Координаты вектора $x \in \mathbb{R}^m$ будем обозначать нижними индексами через x_i , т.е. $x = (x_1, \dots, x_m)$. Введем в рассмотрение билинейное отображение $\tilde{Q}: X \times X \rightarrow Y$, которое произвольным $x_1, x_2 \in X$ ставит в соответствие вектор $y = \tilde{Q}[x_1, x_2]$, i -я координата которого равна $y_i = \langle Q_i x_1, x_2 \rangle$. В силу симметричности матриц Q_i билинейное отображение $\tilde{Q}$ также симметрично. Для произвольного фиксированного $h \in X$ обозначим через Qh линейный оператор, действующий из X в Y по формуле $(Qh)x = \tilde{Q}[h, x]$.

Точки $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, для которых $Q(x) = 0$, будем называть *нулями квадратичного отображения Q* . Нуль h отображения Q называется *регулярным*, если линейный оператор Qh сюръективен, т.е. $(Qh)(X) = Y$. Последнее очевидно равносильно линейной независимости векторов $Q_1 h, \dots, Q_k h$. Квадратичное отображение Q называется *регулярным*, если все его нули (если они существуют) регулярны. Квадратичное отображение называется *сюръективным*, если его образ $\text{im } Q = \bigcup_x Q(x)$ совпадает со всем Y .

Для векторов $y^* = (y_1^*, \dots, y_k^*) \in \mathbb{R}^k$ положим

$$y^* Q = \sum_{i=1}^k y_i^* Q_i, \quad y^* Q(x) = \sum_{i=1}^k y_i^* q_i(x).$$

Для целого $r \geq 0$ через $\mathcal{Y}_r$ обозначим множество k -мерных векторов $y^* \in \mathbb{R}^k$, $|y^*| = 1$, для каждого из которых существует такое линейное подпространство $\Pi \subseteq \mathbb{R}^n$, что

$$\text{codim } \Pi \leq r, \quad y^* Q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Pi.$$

Для дальнейшего нам потребуется следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть y квадратичного отображения Q существует регулярный нуль. Тогда оно сюръективно и, более того, существует такое $c > 0$, что

$$\forall y \in Y \quad \exists x(y) \quad Q(x(y)) = y, \quad |x(y)| \leq c|y|^{1/2}.$$

Сформулированное утверждение является частным случаем результатов из [4], однако здесь мы приведем его простое непосредственное доказательство.

Положим $x(0) = 0$. Возьмем регулярный нуль h . Для произвольного $y \in Y$, $y \neq 0$, будем искать решение уравнения $Q(x) = y$ в виде $x = \gamma|y|^{1/2}h + \xi|y|^{1/2}$. Здесь

$\gamma > 0$ константа, которую выберем ниже, а $\xi \in X$ – неизвестное. Подставляя это выражение для x в уравнение, получаем для ξ следующее уравнение:

$$2\tilde{Q}[h, \xi] + \gamma^{-1}Q(\xi) = \gamma^{-1}e,$$

где $e = y/|y|$. Выбрав $\gamma > 0$ достаточно большим, в силу сюръективности оператора Qh , по классической теореме об обратной функции получаем, что для любого e , $|e| = 1$, выписанное уравнение имеет решение $\xi(e)$, $|\xi(e)| \leq 1$. Очевидно, $x(y) = |y|^{1/2}(\gamma h + \xi(y/|y|))$ удовлетворяет искомому утверждению при $c = 1 + \gamma|h|$. Предложение доказано.

Приведем важное достаточное условие существования у квадратичного отображения регулярного нуля, которое составляет содержание теоремы 2 из [5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть, либо множество $\mathcal{Y}_{k-1}$ пусто, либо существует вектор $h \in X$ такой, что

$$\langle y^*, Q(h) \rangle < 0 \quad \forall y^* \in \mathcal{Y}_{k-1}. \quad (6)$$

Тогда у квадратичного отображения Q существует регулярный нуль.

Полунепрерывность сверху функции ω . Отметим, что $\omega(0)$ может принимать лишь два значения: $(-\infty)$ или 0. При этом очевидно, равенство $\omega(0) = 0$ равносильно условию (1), а равенство $\omega(0) = -\infty$ равносильно его нарушению. Поэтому далее при исследовании функции ω будем предполагать условие (1) выполненным. Кроме того, инфимум в определении (4) может не достигаться при любом $y \neq 0$, даже если имеет место (1). Вот простой пример:

$$n = 2, \quad k = 1, \quad q_0(x) = x_1^2, \quad q_1(x) = x_1 x_2.$$

Здесь $\omega(y) = 0$ для любого y , однако при $y \neq 0$ инфимум в (3) в этом примере не достигается.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняется условие (1), и у квадратичного отображения Q существует регулярный нуль. Тогда отображения Q сюръективно, функция ω полунепрерывна сверху в нуле и, более того,

$$\exists c_1 > 0 \quad \omega(y) \leq c_1|y| \quad \forall y.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $\omega(0) = 0$. В силу предложения 1 для любого y существует x такой, что

$$Q(x) = y, \quad |x| \leq c|y|^{1/2} \implies \omega(y) \leq q_0(x) \leq c_1|y|,$$

где $c_1 = c^2\tilde{c}$ и $\tilde{c} = \max\{|q_0(x)|, |x| \leq 1\}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняется условие (1), и

$$\Lambda_{k-1} = \emptyset. \quad (7)$$

Тогда отображение Q сюръективно, и функция ω полунепрерывна сверху на Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (7) и предложения 2 у отображения Q существует регулярный нуль. Поэтому в силу предложения 1 отображение Q сюръективно. Зафиксируем y_0 . Возьмем произвольное $x_0 \in X$ такое, что $Q(x_0) = y_0$.

Предположим, вначале, что $\text{im}(Qx_0) \neq Y$ (т.е. точка x_0 аномальна для отображения Q). Рассмотрим линейные подпространства

$$L = \{x : \tilde{Q}[x_0, x] = 0\}, \quad M = (\text{im}(Qx_0))^\perp \subset Y.$$

Пусть $Q_L : L \rightarrow M$ – квадратичное отображение, определенное по формуле $Q_L(x) = PQ(x) \forall x \in L$, где P – оператор ортогонального проектирования Y на его подпространство M . Обозначим через $\tilde{Y}$ множество $y^* \in M$ таких, что

$$|y^*| = 1, \quad \text{ind}(y^*Q_L) \leq (m-1).$$

Здесь $m = \dim M$, а индекс квадратичной формы (y^*Q_L) вычисляется относительно пространства L .

Из предположения (7) вытекает, что множество $\tilde{Y}$ пусто. Поэтому в силу предложения 2 существует вектор $h \in L$ такой, что $Q_L(h) = 0$, $\text{im}(Q_Lh) = M$. Поэтому для отображения $Q : X \rightarrow Y$ в точке x_0 выполнены все предположения теоремы об обратной функции (это теорема 1 из [5]). Пусть $\{y_i\}$ – произвольная последовательность точек из Y , сходящихся к y_0 . Тогда по цитированной теореме об обратной функции при всех больших i существуют x_i такие, что $Q(x_i) = y_i$, $x_i \rightarrow x_0$. Тогда

$$\omega(y_i) \leq q_0(x_i) \quad \forall i \quad \implies \quad \overline{\lim_{i \rightarrow \infty}} \omega(y_i) \leq q_0(x_0).$$

Но полученное неравенство справедливо для произвольного x_0 такого, что $Q(x_0) = y_0$, откуда имеем $\overline{\lim_{i \rightarrow \infty}} \omega(y_i) \leq \omega(y_0)$, т.е. полунепрерывность сверху функции ω в точке y_0 в рассматриваемом случае. В случае, когда $\text{im}(Qx_0) = Y$ следует повторить проведенные рассуждения, заменив в них ссылку на теорему об обратной функции из [5], ссылкой на классическую теорему об обратной функции. Теорема доказана.

Следующие примеры демонстрируют существенность предположений приведенных теорем. В первом примере функция минимума, рассматриваемая лишь на множестве $\text{im } Q$, не является полунепрерывной сверху в нуле. Это обусловлено тем, что у построенного ниже квадратичного отображения Q нет регулярных нулей. Этот пример интересен также тем, что образ этого квадратичного отображения $\text{im } Q$ не совпадает со всем пространством Y , однако $\text{im } Q$ всюду плотен в Y .

ПРИМЕР 1. При $n = 4$, $k = 3$, положим $q_0(x) = |x|^2$,

$$q_1(x) = x_1x_2, \quad q_2(x) = x_3x_4, \quad q_3 = x_2x_3, \quad Q = (q_1, q_2, q_3).$$

Непосредственно проверяется, что если $y = (y_1, y_2, y_3) \in \text{im } Q$, и $y_3 = 0$, то либо $y_1 = 0$, либо $y_2 = 0$. Отсюда несложно вытекает, что $\text{im } Q = \mathbb{R}^3 \setminus \tilde{Y}$, где

$$\tilde{Y} = \{y : y_3 = 0, y_1 \neq 0, y_2 \neq 0\}.$$

Рассмотрим лежащую в $\text{im } Q$ кривую $y(t) = (t, t, t^3)$, $t \in [0, 1]$. Непосредственно проверяется, что если $x(t)$ – произвольные решения уравнения $Q(x(t)) = y(t)$, то

$\exists c > 0: |x(t)| \geq c \forall t > 0$. Поэтому функция ω не является полунепрерывной сверху в нуле, так как $\omega(0) = 0$, $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, однако $\omega(y(t)) \geq c^2 \forall t > 0$.

В следующем примере квадратичное отображение регулярно, и у него существует регулярный нуль, однако функция ω в некоторых точках полунепрерывной сверху не является, что обусловлено нарушением условия (7).

ПРИМЕР 2. При $n = 4$, $k = 3$ положим $q_0(x) = x_1^2 + x_2^2$ и рассмотрим введенное в [6] квадратичное отображение Q , определяемое по формулам

$$q_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_4^2, \quad q_2(x) = 2x_1x_2 + x_3^2, \quad q_3 = 2x_1x_2 + 2x_3x_4.$$

Непосредственно проверяется, что Q регулярно и у него существует регулярный нуль. Возьмем вектор $e = (0, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$ и положим $x(t) = te$, $y(t) = Q(x(t))$, $t \geq 0$.

Покажем, что при любом $t > 0$ функция ω не является полунепрерывной сверху в точке $y(t)$. В силу положительной однородности функции ω это утверждение достаточно доказать лишь при $t = 1$. Сделаем это.

Положим $\bar{y} = y(1) = (0, 1, 0)$. Очевидно, $\omega(\bar{y}) = 0$, так как $Q(e) = \bar{y}$, $q_0(e) = 0$, $q_0(x) \geq 0 \forall x$. Для доказательства того, что ω не является полунепрерывной сверху в точке $\bar{y}$ достаточно доказать, что $\omega(y) \geq 1/2$ для $y = (y_1, 1, 0)$ при всех $y_1 < 0$.

Действительно, пусть $y_1 < 0$ и $Q(x) = y$. Положим $\varepsilon^2 = x_1^2 + x_2^2$, где $\varepsilon \geq 0$. Имеем

$$|2x_1x_2| \leq x_1^2 + x_2^2 = \varepsilon^2, \quad x_3^2 = 1 - 2x_1x_2 \quad \implies \quad |x_3| \geq \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Поэтому

$$|2x_3x_4| = |2x_1x_2| \leq \varepsilon^2, \quad x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 - y_1 > \varepsilon^2 \quad \implies \quad |x_4| > \varepsilon.$$

В силу полученных оценок имеем

$$\varepsilon^2 \geq |2x_3x_4| > 2\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad \implies \quad \varepsilon \neq 0 \quad \implies \quad \varepsilon^2 > \frac{1}{2}.$$

Поэтому $q_0(x) = \varepsilon^2 \geq 1/2$ для любого x такого, что $Q(x) = y$ и любого $y = (y_1, 1, 0)$, для которого $y_1 < 0$, что завершает рассмотрения.

Полунепрерывность снизу функции ω . В [1] было введено следующее условие:

$$\text{если } q_0(x) = 0, \quad Q(x) = 0, \quad x \neq 0, \quad (*)$$

то x является регулярным нулем отображения Q .

Условие $(*)$ очевидно выполнено, если либо квадратичное отображение Q регулярно, либо $q_0(x) > 0 \forall x: Q(x) = 0, x \neq 0$. Отметим, что как доказано в [1], если имеет место (1) и выполняется условие $(*)$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что максимум в (5) можно брать только по тем $\lambda \in \Lambda_{k-1}$, что $\lambda^0 \geq \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть имеет место (1) и выполняется условие $(*)$. Тогда функция ω полунепрерывна снизу в каждой точке $y_0 \in \text{im } Q$, а также

$$\exists c > 0 \quad \omega(y) \geq -c|y| \quad \forall y. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость (8) вытекает из леммы 1 из [1] и положительной однородности функции ω .

Пусть $y_0 \in \text{im } Q$. Предположим, что функция ω не является полунепрерывной снизу в точке y_0 . Тогда существует лежащая в $\text{im } Q$ последовательность $\{y_i\}$, которая сходится к y_0 и для которой

$$\omega(y_0) > \lim_{i \rightarrow \infty} \omega(y_i). \quad (9)$$

Выберем такие $x_i \in X$, что $Q(x_i) = y_i$, $q_0(x_i) \leq \omega(y_i) + i^{-1} \forall i$. Могут представиться два случая.

Пусть, вначале, из последовательности $\{x_i\}$ можно выделить ограниченную подпоследовательность. Тогда, переходя в ней, если надо, к подпоследовательности, будем считать, что $x_i \rightarrow x_0$. Очевидно, $Q(x_0) = y_0 \Rightarrow q_0(x_0) \geq \omega(y_0)$. Кроме того, $\omega(y_i) + 1/i \geq q_0(x_i) \forall i$, откуда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \omega(y_i) \geq q_0(x_0) \implies \lim_{i \rightarrow \infty} \omega(y_i) \geq \omega(y_0).$$

Но последнее неравенство противоречит предположению (9).

Рассмотрим второй случай: $|x_i| \rightarrow \infty$. Положим $e_i = x_i/|x_i|$. Переходя, если надо к подпоследовательности, будем считать, что $e_i \rightarrow e_0$. Имеем $Q(e_i) = |x_i|^{-2}y_i \rightarrow 0 \Rightarrow Q(e_0) = 0$. Кроме того, $q_0(e_i) \leq |x_i|^{-2}(\omega(y_i) + 1/i) \forall i$. Но в силу предположения (9) последовательность $\{\omega(y_i)\}$ ограничена сверху, откуда имеем $q_0(e_0) \leq 0$. Поэтому в силу (1) и условия (*) вектор e является регулярным нулем квадратичного отображения Q .

Следовательно, линейный оператор Qe_0 сюръективен. Поэтому, как известно, при всех больших номерах i , которые только и будем рассматривать, линейные операторы Qe_i также сюръективны и, более того, существует $c_1 > 0$ такое, что

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad \tilde{Q}[e_i, x] = y, \quad |x| \leq c_1|y|. \quad (10)$$

Для каждого номера i рассмотрим уравнение

$$Q(e_i + \eta) = |x_i|^{-2}y_0$$

относительно неизвестного $\eta \in X$. Это уравнение преобразуется к виду

$$2\tilde{Q}[e_i, \eta] + Q(\eta) = |x_i|^{-2}y_0 - Q(e_i) = |x_i|^{-2}(y_0 - y_i).$$

В силу (10) по классической теореме об обратной функции у этого уравнения существует решение η_i , удовлетворяющее оценке $|\eta_i| \leq c_1|x_i|^{-2}|y_0 - y_i|$.

Положим $\xi_i = |x_i|\eta_i$. Тогда

$$Q(x_i + \xi_i) = y_0, \quad |\xi_i| \leq \frac{c_1|y_i - y_0|}{|x_i|} \quad \forall i.$$

Отсюда вытекает существование такого $c_2 > 0$, что

$$\begin{aligned} \omega(y_0) &\leq q_0(x_i + \xi_i) = q_0(x_i) + 2\langle Q_0 x_i, \xi_i \rangle + q_0(\xi_i) \\ &\leq \omega(y_i) + \frac{1}{i} + c_2(2|x_i||\xi_i| + |\xi_i|^2) \leq \omega(y_i) + \frac{1}{i} + 3c_1c_2|y_i - y_0|, \end{aligned}$$

откуда получаем, что $\omega(y_0) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \omega(y_i)$, что противоречит предположению (9). Теорема доказана.

Следующие примеры демонстрируют, что в теореме 3 условие $(*)$ существенно. В следующем примере функция ω не является полунепрерывной снизу в нуле. Это обусловлено тем, что в нем условие $(*)$ нарушается, хотя условие (1) выполняется и $\text{im } Q = Y$.

ПРИМЕР 3. При $n = 3$, $k = 2$ положим

$$q_0(x) = x_1x_3, \quad q_1(x) = x_1^2 - x_2^2, \quad q_2(x) = x_1x_2, \quad Q = (q_1, q_2).$$

Очевидно, если $Q(x) = 0$, то $x_1 = x_2 = 0$ и, значит, $\omega(0) = 0$. В то же время для $y_i = (1/i, 0)$, $i = 1, 2, \dots$ имеем $y_i \rightarrow 0$, однако $\omega(y_i) = -\infty \forall i$.

В приведенном примере функция ω может принимать значение $(-\infty)$. В следующем примере, предложенном студенткой З. Т. Мингалеевой, функция ω неотрицательна (и даже, более того, $q_0(x) \geq 0 \forall x$), $\text{im } Q = Y$, однако функция ω не является полунепрерывной снизу в некоторой точке $\bar{y}$. Последнее снова обусловлено нарушением условия $(*)$.

ПРИМЕР 4. При $n = 5$, $k = 3$ положим $q_0(x) = (x_3 + x_4)^2$, $q_1(x) = x_1x_2$, $q_2(x) = x_2x_3$, $q_3(x) = x_4^2 - x_5^2$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$.

Очевидно $\text{im } Q = \mathbb{R}^3$. Рассмотрим точку $\bar{y} = (1, 0, 1)$. Очевидно, если $Q(x) = \bar{y}$, то $x_4^2 \geq 1$, $x_2 \neq 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow q_0(x) \geq 1$ и, следовательно, $\omega(\bar{y}) = 1$, так как $q_0((1, 1, 0, 1, 0)) = 1$. В то же время для $y_i = (1, 1/i, 1)$, $i = 1, 2, \dots$ имеем $y_i \rightarrow \bar{y}$ и, как легко видеть, $\omega(y_i) = 0 \forall i$.

При $k = 1, 2$ утверждение теоремы 3 можно усилить, ослабив ее предположение. А именно, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $k = 1$, выполняется (1) и

$$\omega(y) > -\infty \quad \forall y. \quad (11)$$

Тогда функция ω полунепрерывна снизу в каждой точке $y_0 \in \text{im } Q$.

Справедливость предложения 3 вытекает из того очевидного утверждения, что всякая положительно однородная функция на прямой (со значениями в расширенной прямой) равная нулю в нуле и всюду большая минус бесконечности полунепрерывна снизу в каждой точке.

Простой пример: $n = 2$, $k = 1$, $q_0(x) = x_1x_2$, $q_1(x) = x_1^2$ показывает, что в предположении 3 условие (11) существенно, так как здесь $\omega(0) = 0$, однако для $y_i = 1/i$ имеет место $y_i \in \text{im } q_1$, $y_i \rightarrow 0$, $\omega(y_i) = -\infty \forall i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $k = 2$, выполняются (1), (11) и $\text{im } Q = Y$. Тогда функция ω полунепрерывна снизу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\tilde{X} = \bigcap_{i=0}^2 \ker Q_i$. Для наших рассуждений, очевидно, можно перейти от пространства X к его подпространству $\tilde{X}^\perp$. Поэтому, не теряя общности, ниже будем предполагать, что

$$\bigcap_{i=0}^2 \ker Q_i = \{0\}. \quad (12)$$

Далее, если выполняется условие $(*)$, то искомое утверждение вытекает из теоремы 3. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь случая, когда

$$\exists h \neq 0 \quad q_i(h) = 0, \quad i = 0, 1, 2,$$

и векторы Q_1h , Q_2h линейно зависимы.

В силу замечания из предложения 3 будем, не теряя общности, считать, что $Q_2h = 0$. Покажем, что тогда

$$\exists \gamma \quad Q_0h = \gamma Q_1h. \quad (13)$$

Действительно, предположим, что (13) нарушается. Тогда существует $\bar{h} \in X$ такое, что $\langle Q_0h, \bar{h} \rangle < 0$, $\langle Q_0h, \bar{h} \rangle = 0$. Рассмотрим последовательность $x_i = ih + \bar{h}$, $i = 1, 2, \dots$. Очевидно, имеем

$$Q(x_i) = Q(\bar{h}) \quad \forall i, \quad q_0(x_i) = 2i\langle Q_0h, \bar{h} \rangle + q_0(\bar{h}) \rightarrow -\infty, \quad i \rightarrow \infty.$$

Поэтому $\omega(\bar{y}) = -\infty$ при $\bar{y} = Q(\bar{h})$. Полученное противоречие с (11) доказывает (13). Поэтому, заменяя Q_0 на $(Q_0 - \gamma Q_1)$, не теряя общности будем считать, что $Q_0h = 0$. Но тогда в силу (12) $Q_1h \neq 0$.

Далее будем использовать следующее утверждение. Пусть A – симметричная $n \times n$ матрица, $a \neq 0$ – заданный вектор из $\mathbb{R}^n$ и α – скаляр. Предположим, что порожденная матрицей A квадратичная форма не является знакоопределенной. Тогда для любого x , такого, что $\langle Ax, x \rangle = \alpha$, существует последовательность $\{x_i\}$, для которой

$$x_i \rightarrow x, \quad \langle Ax_i, x_i \rangle = \alpha, \quad \langle a, x_i \rangle \neq 0 \quad \forall i.$$

Это утверждение легко доказывается за счет приведения матрицы A к диагональному виду.

Возьмем произвольную точку $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in \mathbb{R}^2$ и докажем, что в ней функция ω полунепрерывна снизу. Поскольку $\text{im } Q = \mathbb{R}^2$, квадратичная форма q_2 не является знакоопределенной. Поэтому в силу сказанного выше для любой точки x такой, что $q_2(x) = \bar{y}_2$, существует такая последовательность $\{x_i\}$, что

$$x_i \rightarrow x, \quad q_2(x_i) = \bar{y}_2, \quad \langle Q_1h, x_i \rangle \neq 0 \quad \forall i. \quad (14)$$

Для $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ положим

$$\tilde{\omega}(y) = \inf_x \{q_0(x) : q_2(x) = y_2\}.$$

Очевидно,

$$\tilde{\omega}(y) \leq \omega(y) \quad \forall y. \quad (15)$$

Покажем, что

$$\tilde{\omega}(\bar{y}) = \omega(\bar{y}). \quad (16)$$

Действительно, предположим противное, т.е. что $\tilde{\omega}(\bar{y}) < \omega(\bar{y})$. Тогда существует x такой, что $q_2(x) = \bar{y}_2$ и, в то же время, $q_0(x) < \omega(\bar{y})$. Выберем соответствующую ему последовательность $\{x_i\}$, удовлетворяющую (14). Тогда, поскольку для произвольного скаляра γ , очевидно, справедлива формула $q_1(\gamma h + x_i) = 2\gamma\langle Q_1h, x_i \rangle + q(x_i)$, то, решая линейное относительно неизвестного γ уравнение $q_1(\gamma h + x_i) = \bar{y}_1$, найдем γ_i

такие, что $q_1(\gamma_i h + x_i) = \bar{y}_1$. Но тогда в силу (14) $Q(\gamma_i h + x_i) = \bar{y} \forall i$. При этом $q_0(\gamma_i h + x_i) = q_0(x_i) \rightarrow q_0(x)$ и, следовательно, $q_0(\gamma_i h + x_i) < \omega(\bar{y})$ при больших i . Полученное противоречие с тем, что $q_0(x) \geq \omega(\bar{y}) \forall x: Q(x) = \bar{y}$, доказывает (16). Но в силу предложения 3 функция $\tilde{\omega}$ полунепрерывна снизу, так как по построению – это функция минимума квадратичной формы при наличии одного квадратичного ограничения. Поэтому в силу (15) и (16) функция ω полунепрерывна снизу в точке $\bar{y}$. Предложение доказано.

Приведенный выше пример 4 показывает, что при $k \geq 3$ утверждение предложения 4 может нарушаться, так как в примере 4 при $k = 3$ имеет место (1), (11) и $\text{im } Q = \mathbb{R}^3$. Следующий пример демонстрирует то, что в предложении 4 предположение $\text{im } Q = Y$ существенно и его опустить нельзя.

ПРИМЕР 5. При $n = 3, k = 2$ положим

$$q_0(x) = x_2^2, \quad q_1(x) = x_1 x_3 + x_2^2, \quad q_2(x) = x_3^2, \quad Q = (q_1, q_2).$$

Рассмотрим точку $\bar{y} = (1, 0)$. Очевидно, если $Q(x) = \bar{y}$, то $x_3 = 0 \Rightarrow x_2^2 = 1$ и, значит, $\omega(\bar{y}) = 1$.

Рассмотрим последовательность точек $y_i = (1, 1/i) \in \text{im } Q$. Тогда $y_i \rightarrow \bar{y}$ и $\omega(y_i) = 0 \forall i$, поскольку для $x_i = (i^{-1/2}, 0, i^{1/2})$ выполняется $Q(x_i) = y_i, q_0(x_i) = 0 \forall i$ и $q_0(x) \geq 0 \forall x$. Следовательно, функция ω не является полунепрерывной снизу в точке $\bar{y}$. Здесь все дело в том, что $\text{im } Q \neq \mathbb{R}^2$, хотя условия (1) и (11) выполняются.

Выражаю благодарность рецензенту за сделанные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Арутюнов, “Неотрицательность квадратичных форм на пересечении квадрик и квадратичные отображения”, *Матем. заметки*, **84:2** (2008), 163–174.
- [2] А. В. Арутюнов, А. Ф. Измаилов, “Теория чувствительности для аномальных задач оптимизации с ограничениями типа равенств”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **43:2** (2003), 186–202.
- [3] A. V. Arutyunov, A. F. Izmailov, “Abnormal equality-constrained optimization problems: sensitivity theory”, *Math. Program. Ser. A*, **100:3** (2004), 485–515.
- [4] Е. Р. Аваков, “Теоремы об оценках в окрестности особой точки отображения”, *Матем. заметки*, **47:5** (1990), 3–13.
- [5] А. В. Арутюнов, Д. Ю. Карамзин, “Регулярные нули квадратичных отображений и их приложение”, *Матем. сб.*, **202:6** (2011), 3–28.
- [6] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, “Существование обратных отображений и их свойства”, *Дифференциальные уравнения и топология. II*, Сб. статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, **271**, МАИК, М., 2010, 18–28.

А. В. Арутюнов

Российский университет дружбы народов, г. Москва

E-mail: arutun@orc.ru

Поступило

27.02.2012

Исправленный вариант

29.10.2012