Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Корнев, А. М. Степин, Об асимптотически сжимающих отображениях, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 2, 218–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9332>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:27:52

Об асимптотически сжимающих отображениях

А. А. Корнев, А. М. Степин

Построено конструктивное обобщение принципа сжимающих отображений на случай отображений с произвольной скоростью сжатия.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm9332

1. Асимптотически сжимающие отображения. Классический принцип сжимающих отображений, сформулированный Банахом и Каччополи, применяется во многих разделах математики, в том числе, лежит в основе наиболее известных методов доказательства существования и единственности решения нелинейных уравнений, а также обоснования сходимости различного рода итерационных алгоритмов. Однако можно выделить класс задач, для которых данный подход требует некоторой модификации, так как либо не удастся построить отображения с необходимой экспоненциальной скоростью сжатия, либо соответствующие отображения заданы в условии задачи. Например, итерационные алгоритмы в некоторых случаях имеют немонотонный характер сходимости, глобальный аттрактор полудинамических систем может обладать полиномиальной скоростью притяжения, к получению оценки скорости сходимости слабо сжимающих отображений приводит вопрос о существовании конечной (неатомической) меры инвариантной относительно одномерной динамической системы со свойством перемежаемости.

В данной работе предлагается обобщение принципа сжимающих отображений на случай отображений с произвольной скоростью сжатия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение F метрического пространства U в себя будем называть *ограниченным* и *асимптотически сжимающим*, если соответственно выполнены следующие условия:

$$(b_1) \quad \forall u \in U \quad \exists R = R(u): \quad F^n(u) \in \mathcal{O}_R \quad \forall n \geq 0,$$

$$(b_2) \quad \forall \varepsilon, R > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon, R): \quad \rho(F^n(u), F^n(v)) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N \quad \forall u, v \in \mathcal{O}_R.$$

Здесь и далее мы используем стандартные обозначения для окрестности $\mathcal{O}_R = \{u : \rho(u, 0) \leq R\}$ конечного радиуса R некоторой отмеченной точки, а также для n -й итерации отображения: $F^n(u) = F(F^{n-1}(u))$, $n \geq 1$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 09-01-00625-а, 12-01-00960-а).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие асимптотической сжимаемости (b_2) формально равносильно существованию такой функции $\psi(R, n)$, что

$$(b_{2*}) \quad \rho(F^n(u), F^n(v)) \leq \psi(R, n) \quad \forall n \geq 0 \quad \forall u, v \in \mathcal{O}_R, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(R, n) = 0.$$

При этом явное построение ψ для конкретного отображения F может оказаться отдельной нетривиальной задачей. Условие (b_2) не гарантирует существование оценки вида $\rho(F^n(u), F^n(v)) \leq \delta(n)\rho(u, v)$ с убывающей и не зависящей от u, v функцией $\delta(n)$. Напомним, см. [1], [2], что подобная оценка при $\delta(n) = q^n$ является основой для обоснования принципа сжимающих отображений. Из (b_2) в общем случае не следует условие ограниченности (b_1) . Если, например, $U = [1, \infty)$, $F(u) = u + 1/u$, то несложно проверить, что F является асимптотически сжимающим, но неограниченным и не имеющим неподвижной точки отображением [2].

ТЕОРЕМА 1. Пусть в полном метрическом пространстве U задано непрерывное ограниченное асимптотически сжимающее отображение F . Тогда F имеет единственную неподвижную точку $z = F(z)$ и итерационный процесс $u_n = F(u_{n-1})$ сходится к z для любого начального приближения $u_0 \in U$. При этом верна оценка

$$\rho(F^n(u_0), z) \leq \psi(R, n), \quad n \geq 0,$$

с произвольной функцией ψ из условия (b_{2*}) , где R такое, что $u_0, z \in \mathcal{O}_R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что последовательность точек

$$\{F^n(u_0), n = 0, 1, 2, \dots\}$$

является фундаментальной. Согласно условию (b_1) для произвольной точки u_0 найдется такое R , что $F^m(u_0) \in \mathcal{O}_R$, $m \geq 0$. Отсюда согласно условию (b_2) для произвольных $\varepsilon, m > 0$ имеем

$$\rho(F^{n+m}(u_0), F^n(u_0)) = \rho(F^n(u_m), F^n(u_0)) \leq \varepsilon,$$

если $n \geq N(\varepsilon, R)$.

Это означает фундаментальность последовательности u_n , т.е. существование предела z . Далее, из непрерывности F следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n\right) = F(z), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = z.$$

Отсюда имеем $z = F(z)$. И если z_1, z_2 — две различные неподвижные точки, то согласно (b_2) найдется такое конечное n , что

$$\rho(z_1, z_2) = \rho(F^n(z_1), F^n(z_2)) \leq \frac{1}{2} \rho(z_1, z_2) \implies \rho(z_1, z_2) = 0.$$

Оценка скорости притяжения $F^n(u_0)$ к z следует из условия (b_{2*}) . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В общем случае теорема неприменима для разрывных функций F . Например, отображение

$$F(x) = \begin{cases} 0.5x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \quad \text{на пространстве } U = \mathbb{R}$$

является ограниченным и асимптотически сжимающим, но не имеющим неподвижной точки.

Рассмотрим семейство непрерывных отображений F , для которых итерационный процесс $u_n = F(u_{n-1})$ сходится к единственной неподвижной точке z со скоростью, равномерной по начальному приближению $u_0 \in \mathcal{O}_R$, т.е. выполнены условия

$$(a_1) \quad \exists! z \in U: \quad z = F(z);$$

$$(a_2) \quad \forall \varepsilon, R > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon, R) \geq 0: \quad \rho(F^n(u_0), z) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N \quad \forall u_0 \in \mathcal{O}_R.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть непрерывное отображение F , определенное в полном метрическом пространстве, удовлетворяет условиям (a_1) , (a_2) . Тогда F является непрерывным, ограниченным и асимптотически сжимающим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что условия (a_1) , (a_2) влекут ограниченность отображения F . По неравенству треугольника имеем

$$\rho(F^n(u_0), 0) \leq \rho(F^n(u_0), z) + \rho(z, 0) \leq 1 + \rho(z, 0) \quad \forall n \geq N,$$

если N достаточно велико. Отсюда следует требуемая оценка

$$\rho(F^n(u_0), 0) \leq \max \left\{ 1 + \rho(z, 0), \max_{i=1, \dots, N} \rho(u_i, 0) \right\} = R(u_0) \quad \forall n \geq 0.$$

Покажем, что из (a_1) , (a_2) следует асимптотическая сходимост. По условию (a_2) для произвольных $\varepsilon, R > 0$ найдется такое N , что

$$\rho(F^n(u_0), z) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(F^n(v_0), z) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N \quad \forall u_0, v_0 \in \mathcal{O}_R.$$

Следовательно,

$$\rho(F^n(u_0), F^n(v_0)) \leq \rho(F^n(u_0), z) + \rho(F^n(v_0), z) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N \quad \forall u_0, v_0 \in \mathcal{O}_R.$$

Теорема доказана.

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 3. Пусть в полном метрическом пространстве U задано непрерывное отображение $F: U \rightarrow U$. Тогда условия (a_1) , (a_2) равносильны условиям (b_1) , (b_2) .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отображения, удовлетворяющие условиям (b_1) , (b_2) , но не являющиеся экспоненциально сжимающими, встречаются в самых разных областях математики. Например, отображения с полиномиальной скоростью сжатия в своих работах рассматривал Ляпунов [3] при исследовании устойчивости решений в окрестности неподвижной точки в “особенном случае”. Оценки полиномиального сжатия для обыкновенных дифференциальных уравнений получили Колеман и Рейзинь [4], [5], для уравнений в частных производных (при нахождении скорости притяжения к глобальному аттрактору) – Костин [6], для динамических систем (при исследовании метрических свойств) – Алахаия и Степин [7], [8]. Формальная теорема сходимости для отображений с полиномиальным сжатием приводится в работе Корнева [9]. Асимптотически сжимающие отображения строятся в [10] для численного решения задач стабилизации. Сжимающие отображения различного вида применял Васильев при обосновании сходимости алгоритмов решения экстремальных задач [11].

Исследование отображений, имеющих на каждом шаге скорость сжатия ниже полиномиальной, либо являющихся только асимптотически сжимающими, вызвано желанием максимально обобщить результаты [7]–[10].

2. Построение слабо сжимающих отображений. В качестве наглядного примера рассмотрим задачу нахождения корня $z = 0$ функции типа Коши

$$\begin{cases} f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^{2p}}\right), & p \in \mathcal{N}, \quad x \neq 0, \\ f(0) = 0, & x = 0, \end{cases}$$

методом Ньютона и методом простой итерации.

ПРИМЕР 1. Расчетная формула метода Ньютона имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_0 \neq 0.$$

В данном случае получаем

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad \text{где } F(x) = x(1 - \alpha x^{2p}), \quad \alpha = (2p)^{-1} < 1.$$

Пусть $U = [-1, 1]$. Тогда отображение F является непрерывным и ограниченным на U . Покажем, что F также является асимптотически сжимающим. Действительно,

$$|F^n(x_0) - F^n(y_0)| \leq 2|F^n(w_0)|, \quad w_0 = \max\{|x_0|, |y_0|\},$$

а для функции F при $w \in [0, 1]$ имеем цепочку неравенств

$$|F(w)| = w(1 - \alpha w^{2p}) \leq \frac{w}{(1 + \alpha w^{2p})} \leq \frac{w}{(1 + \alpha w^{2p})^{1/2p}} = \frac{1}{(w^{-2p} + \alpha)^{1/2p}} = \phi(w, \alpha).$$

Построенная функция $\phi(w, \alpha)$ обладает необходимыми в данном случае свойствами: монотонно возрастает по w и $\phi(\phi(w, \xi), \alpha) = \phi(w, \xi + \alpha)$. Отсюда следует

$$\begin{aligned} F^n(w_0) = w_n = F(w_{n-1}) &\leq \frac{1}{(w_{n-1}^{-2p} + \alpha)^{1/2p}} \leq \frac{1}{(w_{n-2}^{-2p} + 2\alpha)^{1/2p}} \leq \dots \\ &\leq \frac{1}{(w_0^{-2p} + n\alpha)^{1/2p}} = \phi(w_0, n\alpha). \end{aligned}$$

Таким образом, для отображения F выполнено условие (b_2^*) с функцией $\psi(R, n) = 2\phi(R, n\alpha) \leq 2/(n\alpha)^{1/2p}$. Отсюда согласно теореме 1 следует, что метод Ньютона сходится с произвольного начального приближения $x_0 \in U$ к единственному корню $z = 0$ со скоростью $\psi(|x_0|, n)$ (в данном случае сходится со скоростью $\phi(|x_0|, n\alpha)$).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Хорошо известно [12], что если функция $f \in C^2$ и z – простой корень уравнения $f(x) = 0$, то для произвольного начального приближения x_0 из малой окрестности корня метод Ньютона сходится с квадратичной скоростью, т.е. верна оценка

$$|z - x_n| \leq c^{-1}(|z - x_{n-1}|)^2.$$

Если же кратность корня конечна и равна $m > 1$, то в малой окрестности корня имеется сходимость только со скоростью геометрической прогрессии:

$$|z - x_n| \leq q^n |z - x_0|, \quad q = \frac{m-1}{m} + O(|z - x_0|).$$

В данном случае для функции Коши кратность корня формально равна бесконечности и верна только полиномиальная оценка скорости сходимости:

$$|z - x_n| \leq \frac{1}{((z - x_0)^{-2p} + n\alpha)^{1/2p}} \leq \frac{1}{(n\alpha)^{1/2p}}.$$

Для методов с полиномиальной скоростью сходимости число итераций n , необходимое для достижения ошибки порядка ε имеет асимптотику $n \approx \varepsilon^{-2p}$. Конечно, это существенно ограничивает их применение для практических расчетов с высокой точностью, однако в общем случае не мешает при доказательстве теоремы существования и единственности решения соответствующего уравнения. Отметим также, что полиномиальной скоростью притяжения к неподвижным точкам и, как следствие, к глобальному аттрактору, обладают некоторые обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных, приближенно описывающие реальные физические процессы (например, [6]); в том числе эффекты полиномиального замедления имеют место в теории относительности.

ПРИМЕР 2. Оценим скорость сходимости метода типа простой итерации для решения исходного уравнения $f(x) = 0$. Перепишем задачу в виде $x = F(x)$, где $F(x) = x(1 - f(x))$, и рассмотрим итерационный процесс

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad F(x) = x \left(1 - \exp \left(-\frac{1}{x^{2p}} \right) \right).$$

Отображение F является непрерывным и ограниченным на пространстве $U = \mathbb{R}$. Пусть $w_n = |x_n|$, тогда $w_n < w_{n-1}$. Если $w_n \in [1, \infty)$, то верна оценка

$$w_n \leq w_{n-1}(1 - e^{-1}) \leq (1 - e^{-1})^n w_0.$$

Таким образом, пока $w_n \geq 1$ метод сходится с экспоненциальной скоростью. Найдем скорость сходимости метода при $w_n \in [0, 1]$. В этом случае для функции F имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} F(w) &= w(1 - \exp(-1/w^{2p})) \leq \frac{w}{(1 + \exp(-1/w^{2p}))} \\ &\leq \frac{w}{1 + \ln(1 + \exp(-1/w^{2p}))} \leq \frac{w}{(1 + w^{2p} \ln(1 + \exp(-1/w^{2p})))^{1/2p}} \\ &= \frac{1}{\ln^{1/2p}(\exp(1/w^{2q}) + \alpha)} = \phi(w, \alpha), \quad \text{где } \alpha = 1. \end{aligned}$$

Построенная функция $\phi(w, \alpha)$ монотонно возрастает по w и для нее выполнено рекуррентное соотношение $\phi(\phi(w, \xi), \alpha) = \phi(w, \xi + \alpha)$; следовательно, верна оценка:

$$\begin{aligned} F^n(w_0) = w_n = F(w_{n-1}) &\leq \frac{1}{\ln^{1/2p}(\alpha + \exp(w_{n-1}^{2p}))} \leq \dots \\ &\leq \frac{1}{\ln^{1/2p}(n\alpha + \exp(w_0^{2p}))} = \phi(w_0, n\alpha). \end{aligned}$$

Таким образом, указанный метод простой итерации для рассматриваемой функции типа Коши в малой окрестности корня сходится с логарифмической скоростью.

Отметим, что возникающие из приложений математические модели, имеющие более низкую, чем полиномиальная скорость динамики (скажем, логарифмическую) нам не известны.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Как для метода Ньютона, так и для метода простой итерации при построении функции $\phi(w, \alpha)$ требовалось обеспечить монотонное возрастание $\phi(w, \alpha)$ по переменной w и выполнение следующего рекуррентного соотношения:

$$\phi(w, \alpha) = \frac{1}{g_1(\alpha + g_2(w))}, \quad g_2\left(\frac{1}{g_1(\xi)}\right) = \xi.$$

В этом случае аналитическая оценка для скорости асимптотического сжатия $\psi(n, R)$ за n шагов следует из оценки для скорости сжатия за один шаг. На основе данного приема несложно построить шкалу слабо сжимающих отображений. Так, например, метод простой итерации для обобщенной функции Коши

$$x_{n+1} = x_n(1 - f(x_n)) = F(x_n), \quad f(x) = \exp(-e^{1/x^{2p}})$$

в единичной окрестности корня $z = 0$ имеет логарифм-логарифмическую скорость сходимости. Действительно, пусть $w \in [0, 1]$, $h_1(w) = \exp(-1/w^{2p}) \ln(1 + f(w))$, тогда для функции F имеем

$$\begin{aligned} F(w) &\leq \frac{w}{1 + f(w)} \leq \frac{w}{1 + h_1(w)} \leq \frac{w}{(1 + w^{2p} \ln(1 + h_1(w)))^{1/2p}} \\ &= \frac{w}{(1 + w^{2p} \ln(1 + \exp(-1/w^{2p}) \ln(1 + \exp(-\exp(1/w^{2p}))))^{1/2p}} \\ &= \frac{1}{\ln^{1/2p}(\ln(\exp(e^{1/w^{2p}}) + \alpha))} = \phi(w, \alpha), \quad \alpha = 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка скорости сходимости метода:

$$F^n(w_0) \leq \ln^{-1/2p}(\ln(\exp(e^{1/w_0^{2p}}) + n\alpha)).$$

В данном случае число итераций n , необходимое для достижения ошибки порядка ε , имеет асимптотику $n \approx \exp(\exp(\varepsilon^{-2p}))$, т.е. нестрого можно сказать, что время сходимости итерационного процесса весьма велико.

Отметим, что отображения, имеющие сверхлинейную степень сжатия, также удовлетворяют условиям (a_1) , (a_2) , но основное внимание в работе уделяется слабо сжимающим отображениям.

Для некоторых задач, например [10], удастся получить только оценку для функции асимптотического сжатия $\psi(R, n)$ за n шагов при достаточно больших n , при этом сжатия за один шаг может не быть. Однако, из теоремы 1 следует, что и в этом случае рассматриваемое отображение имеет единственную неподвижную точку и в терминах функции $\psi(R, n)$ верна оценка для скорости сходимости соответствующего итерационного процесса. Таким образом, теоремы 1–3 задают критерий сходимости для отображений с условиями (a_1) , (a_2) , что позволяет единым образом исследовать сходимость данного класса задач.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функции и функционального анализа*, Наука, М., 1968.
- [2] В. И. Лебедев, *Функциональный анализ и вычислительная математика*, Физматлит, М., 2005.
- [3] А. М. Ляпунов, *Общая задача об устойчивости движения*, Классики естествознания, Гостехиздат, М., 1950.
- [4] Л. Е. Рейзинь, “Локальная топологическая эквивалентность систем дифференциальных уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **4** (1968), 199–214.
- [5] С. Coleman, “Growth and decay estimates near non-elementary stationary points”, *Canad. J. Math.*, **22**:6 (1970), 1156–1167.
- [6] I. N. Kostin, “Rate of attraction to a non-hyperbolic attractor”, *Asymptotic Anal.*, 1998, № 3–4, 203–222.
- [7] Ш. И. Ахалая, А. М. Степин, “Об инвариантных мерах несжимающих отображений”, *Сообщ. АН ГССР*, **100**:3 (1980), 549–552.
- [8] Ш. И. Ахалая, А. М. Степин, “Об абсолютно непрерывных инвариантных мерах несжимающих преобразований окружности”, *Динамические системы и смежные вопросы геометрии*, Сборник статей. Посвящается памяти академика Андрея Андреевича Болибруха, Тр. МИАН, **244**, Наука, М., 2004, 23–34.
- [9] А. А. Корнев, “О неустойчивых многообразиях в окрестности существенно негиперболической точки”, *ДАН*, **377**:6 (2001), 743–745.
- [10] А. А. Иванчиков, А. А. Корнев, А. В. Озерицкий, “О новом подходе к решению задач асимптотической стабилизации”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **49**:12 (2009), 2167–2181.
- [11] Ф. П. Васильев, *Численные методы решения экстремальных задач*, Наука, М., 1988.
- [12] Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков, *Численные методы*, Наука, М., 1987.

А. А. Корнев

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: kornev@mech.math.msu.su

Поступило

27.12.2011

А. М. Степин

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: astepina@inbox.ru