Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Бандалиев, О структурных свойствах весового пространства $L_{p(x),\omega}$ для $0 < p(x) < 1$, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 4, 492–506

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9334>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:28:00

О структурных свойствах весового пространства $L_{p(x),\omega}$ для $0 < p(x) < 1$

Р. А. Бандалиев

Основной целью представленной работы является исследование весового пространства $L_{p(x),\omega}$ при $0 < p(x) < 1$ и изучение топологии этого пространства. Доказано вложение между различными пространствами Лебега с переменным показателем суммируемости. В частности, доказано, что совокупность всех линейных непрерывных функционалов над $L_{p(x),\omega}$ при $0 < p(x) < 1$ состоит только из нулевого функционала.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm9334

1. Введение. В последнее время возрос интерес к пространствам Лебега с переменным показателем суммируемости. Первое исследование в этом направлении появилось в работе Орлича [1]. В этой работе он исследовал неравенство типа Гёльдера для пространства ℓ^{p_n} , $p_n \geq 1$, состоящего из последовательностей $\{x_n\}$ вещественных чисел x_n , для которых $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p_n} < \infty$. В общем случае можно отметить так называемые модулярные пространства $L_{p(x)}$, встречающиеся в работах [2] и [3]. Отметим также, что модулярные пространства хорошо изучены в работах [4] и [5]. Систематическое и целенаправленное исследование топологии пространств $L_{p(x)}$ в одномерном случае было дано в работе Шарапудинова [6], а в работе [7] в многомерном случае было изучено также пространство Соболева с переменным показателем суммируемости и дано применение полученных результатов. Исследование ограниченности интегральных и дифференциальных операторов в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости представляет интерес не только с теоретической точки зрения, но и при исследовании моделей конкретных физических процессов. Изучение этих пространств связано с задачами теории упругости, динамики жидкостей и вариационного исчисления. Математические постановки таких задач приводят к различным дифференциальным уравнениям с нестандартными условиями роста (см. работы [8], [9]). При этом следует отметить, что наиболее важные результаты, полученные в указанных работах, связаны с условием Дини–Липшица, обнаруженным впервые в работах Шарапудинова [10] и [11]. Отметим, что в одномерном случае топология пространства $L_{p(x)}(\Omega)$ для произвольного измеримого неотрицательного переменного показателя $p(x)$ при $\Omega =$

Работа выполнена при поддержке фонда развития науки при Президенте Азербайджанской Республики (грант EIF-2010-1(1)-40/06-1).

$[0, 1]$ была подробно изучена в работе Шарапудинова [6]. В частности, в этой работе было показано, что если $0 < p(x) < 1$, то пространство $[L_{p(x)}([0, 1])]'$, сопряженное с $L_{p(x)}[0, 1]$ состоит из единственного нулевого непрерывного линейного функционала. Тем самым, в работе [6] доказано, что пространство $L_{p(x)}([0, 1])$ в этом случае не является локально выпуклым.

В настоящей работе исследуется весовое пространство $L_{p(x), \omega}$ для $0 < p(x) < \infty$ в многомерном случае и изучаются структурные свойства этого пространства. Исследование весового пространства $L_{p(x), \omega}$ для $0 < p(x) < \infty$ и изучение структурных свойств этого пространства представляет особый интерес с точки зрения исследования ограниченности некоторых важных операторов гармонического анализа. Отметим, что эти пространства при $0 < p(x) < 1$ не являются модулярными.

2. Обозначения и некоторые факты. Пусть $\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, Ω – измеримое по Лебегу подмножество в $\mathbb{R}^n$ и $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$. Предположим, что p – измеримая по Лебегу функция, которая определена в Ω и

$$0 < \underline{p} \leq p(x) \leq \bar{p} < \infty, \quad \text{где} \quad \underline{p} = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x), \quad \bar{p} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x).$$

Пусть ω – весовая функция, определенная в Ω , т.е. ω является неотрицательной, почти всюду (п.в.) положительной функцией в Ω . Лебегова мера множества Ω обозначается через $|\Omega|$. Хорошо известно, что

$$|B(0, 1)| = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}, \quad \text{где} \quad B(0, 1) = \{x : x \in \mathbb{R}^n, |x| < 1\}.$$

Всюду в дальнейшем будем считать, что рассматриваемые множества и функции являются измеримыми по Лебегу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обозначим через $L_{p(x), \omega}(\Omega)$ пространство всех измеримых на Ω функций f таких, что

$$I_{p, \omega}(f) = \int_{\Omega} (|f(x)|\omega(x))^{p(x)} dx < \infty,$$

где $p: \Omega \rightarrow (0, \infty)$. Рассмотрим выражение

$$\|f\|_{L_{p(x), \omega}(\Omega)} = \|f\|_{p, \omega, \Omega} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\lambda} \right)^{p(x)} dx \leq 1 \right\}. \quad (2.1)$$

Отметим, что при $\omega(x) \equiv 1$ пространство $L_{p(x), \omega}(\Omega)$ совпадает с обычным пространством $L_{p(x)}(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Топология пространств $L_{p(x)}(\Omega)$ для произвольного измеримого неотрицательного переменного показателя $p(x)$ при $\Omega = [0, 1]$ была подробно изучена в работе Шарапудинова [6]. В случае $p(x) \geq 1$ величина, определенная равенством (2.1), была впервые введена в работе [6] в качестве нормы пространства $L_{p(x)}([0, 1])$. В частности, в этой работе были изучены основные свойства этих пространств.

В дальнейшем будет показано, что выражение, определенное равенством (2.1), определяет одну из эквивалентных квазинорм в пространстве $L_{p(x),\omega}(\Omega)$ и это пространство является полным пространством, т.е. рассмотренное пространство является квазibanаховым пространством по отношению к рассмотренной величине (2.1). Отметим, что пространство называется *квазинормированным*, если неравенство треугольника в этом пространстве выполняется с постоянной, которая больше единицы.

Отметим некоторые важные свойства этого пространства.

Свойство 1. Пусть $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq \bar{p} < \infty$, $x \in \Omega$ и $0 < \|f\|_{p,\omega,\Omega} < \infty$. Тогда

$$I_{p,\omega}\left(\frac{f}{\|f\|_{p,\omega,\Omega}}\right) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $I_{p,\omega}(f/\|f\|_{p,\omega,\Omega}) < 1$, то можно найти число $0 < \lambda \leq \|f\|_{p,\omega,\Omega}$ такое, что $I_{p,\omega}(f/\lambda) < 1$. Действительно, положим

$$\lambda = \|f\|_{p,\omega,\Omega} \cdot I_{p,\omega}^{1/\bar{p}}\left(\frac{f}{\|f\|_{p,\omega,\Omega}}\right).$$

Тогда $\lambda < \|f\|_{p,\omega,\Omega}$ и справедливо неравенство

$$\begin{aligned} I_{p,\omega}\left(\frac{f}{\lambda}\right) &= \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\|f\|_{p,\omega,\Omega} I_{p,\omega}^{1/\bar{p}}(f/\|f\|_{p,\omega,\Omega})} \right)^{p(x)} dx \\ &\leq I_{p,\omega}^{-1}\left(\frac{f}{\|f\|_{p,\omega,\Omega}}\right) \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\|f\|_{p,\omega,\Omega}} \right)^{p(x)} dx = 1. \end{aligned}$$

Последнее неравенство противоречит определению пространства $L_{p(x),\omega}(\Omega)$. Таким образом, свойство 1 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что в случае, когда $\bar{p} = +\infty$, из определения 1 получим

$$I_{p,\omega}\left(\frac{f}{\|f\|_{p,\omega,\Omega}}\right) \leq 1.$$

Свойство 2. Справедливо следующее неравенство:

$$\min\{I_{p,\omega}^{1/\underline{p}}(f), I_{p,\omega}^{1/\bar{p}}(f)\} \leq \|f\|_{p,\omega,\Omega} \leq \max\{I_{p,\omega}^{1/\underline{p}}(f), I_{p,\omega}^{1/\bar{p}}(f)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала предположим, что $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq \bar{p} < \infty$. Пусть $I_{p,\omega}(f) \leq 1$. Тогда из определения 1 непосредственно следует, что $\|f\|_{p,\omega,\Omega} \leq 1$. В силу свойства 1 имеем

$$\begin{aligned} I_{p,\omega}(f) &= \int_{\Omega} \|f\|_{p,\omega,\Omega}^{p(x)} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\|f\|_{p,\omega,\Omega}} \right)^{p(x)} dx \\ &\leq \|f\|_{p,\omega,\Omega}^{\underline{p}} \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\|f\|_{p,\omega,\Omega}} \right)^{p(x)} dx = \|f\|_{p,\omega,\Omega}^{\underline{p}}. \end{aligned}$$

С другой стороны, $I_{p,\omega}(f) \geq \|f\|_{p,\omega,\Omega}^{\bar{p}}$. Аналогично рассматривается случай, когда $\|f\|_{p,\omega,\Omega} \geq 1$.

Пусть теперь $\bar{p} = +\infty$. Докажем, что

$$\min\{I_{p,\omega}^{1/\bar{p}}(f), 1\} \leq \|f\|_{p,\omega,\Omega} \leq \max\{I_{p,\omega}^{1/\bar{p}}(f), 1\}.$$

Пусть $I_{p,\omega}(f) \leq 1$. Тогда $(I_{p,\omega}(f))^{p(x)/\bar{p}} \leq I_{p,\omega}(f)$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{I_{p,\omega}^{1/\bar{p}}(f)} \right)^{p(x)} dx &= \int_{\Omega} (I_{p,\omega}(f))^{-p(x)/\bar{p}} (|f(x)|\omega(x))^{p(x)} dx \\ &\geq I_{p,\omega}^{-1}(f) \int_{\Omega} (|f(x)|\omega(x))^{p(x)} dx = 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{I_{p,\omega}^{1/\bar{p}}(f)} \right)^{p(x)} dx \geq 1$$

и поэтому $I_{p,\omega}^{1/\bar{p}}(f) \leq \|f\|_{p,\omega,\Omega}$. При $I_{p,\omega}(f) \leq 1$ неравенство $\|f\|_{p,\omega,\Omega} \leq 1$ автоматически следует из определения 1. В случае $I_{p,\omega}(f) \geq 1$ доказательство проводится аналогично.

Свойство 3. Пусть $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq \bar{p} < \infty$. Тогда пространство $L_{p(x),\omega}(\Omega)$ является действительным линейным пространством.

Доказательство. Прежде всего отметим известное неравенство

$$(a + b)^{\alpha} \leq \max\{1, 2^{\alpha-1}\}(a^{\alpha} + b^{\alpha}),$$

где $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $\alpha > 0$. Взяв $\alpha = \bar{p}$ и используя свойство 1, имеем

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left(\frac{|f(x) + g(x)|\omega(x)}{[2 \max\{1, 2^{\bar{p}-1}\}]^{1/\bar{p}} (\|f\|_{p,\omega,\Omega} + \|g\|_{p,\omega,\Omega})} \right)^{p(x)} dx \\ &\leq \max\{1, 2^{\bar{p}-1}\} \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{[2 \max\{1, 2^{\bar{p}-1}\}]^{1/\bar{p}} (\|f\|_{p,\omega,\Omega} + \|g\|_{p,\omega,\Omega})} \right)^{p(x)} dx \\ &\quad + \max\{1, 2^{\bar{p}-1}\} \int_{\Omega} \left(\frac{|g(x)|\omega(x)}{[2 \max\{1, 2^{\bar{p}-1}\}]^{1/\bar{p}} (\|f\|_{p,\omega,\Omega} + \|g\|_{p,\omega,\Omega})} \right)^{p(x)} dx \\ &\leq \max\{1, 2^{\bar{p}-1}\} \int_{\Omega} [2 \max\{1, 2^{\bar{p}-1}\}]^{-p(x)/\bar{p}} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\|f\|_{p,\omega,\Omega}} \right)^{p(x)} dx \\ &\quad + \max\{1, 2^{\bar{p}-1}\} \int_{\Omega} [2 \max\{1, 2^{\bar{p}-1}\}]^{-p(x)/\bar{p}} \left(\frac{|g(x)|\omega(x)}{\|g\|_{p,\omega,\Omega}} \right)^{p(x)} dx \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\|f\|_{p,\omega,\Omega}} \right)^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \left(\frac{|g(x)|\omega(x)}{\|g\|_{p,\omega,\Omega}} \right)^{p(x)} dx \right) = 1, \end{aligned}$$

откуда

$$\|f + g\|_{p,\omega,\Omega} \leq [2 \max\{1, 2^{\bar{p}-1}\}]^{1/\bar{p}} (\|f\|_{p,\omega,\Omega} + \|g\|_{p,\omega,\Omega})$$

и, следовательно,

$$f + g \in L_{p(x),\omega}(\Omega).$$

Пусть $0 < \underline{p} \leq p(x) < \infty$. Предположим, что $\alpha \in R \setminus \{0\}$ и $f \in L_{p(x),\omega}(\Omega)$. Покажем, что $\alpha f \in L_{p(x),\omega}(\Omega)$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_{p,\omega,\Omega} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \left(\frac{|\alpha f(x)|\omega(x)}{\lambda} \right)^{p(x)} dx \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\lambda/|\alpha|} \right)^{p(x)} dx \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Положим $\lambda = |\alpha|\mu$. Тогда, учитывая последнее равенство, получим

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_{p,\omega,\Omega} &= \inf \left\{ |\alpha|\mu > 0 : \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\mu} \right)^{p(x)} dx \leq 1 \right\} \\ &= |\alpha| \inf \left\{ \mu > 0 : \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\mu} \right)^{p(x)} dx \leq 1 \right\} = |\alpha| \|f\|_{p,\omega,\Omega}. \end{aligned}$$

Для $f = 0$ доказываемый факт является тривиальным. Таким образом, пространство $L_{p(x),\omega}(\Omega)$ является действительным линейным пространством.

СВОЙСТВО 4. Пусть $0 < \underline{p} \leq p(x) < \infty$ и $\|f\|_{p,\omega,\Omega} = 0$. Докажем, что $f = 0$ для п.в. $x \in \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\|f\|_{p,\omega,\Omega} = 0$, то по определению 1 $I_{p,\omega}(f/\lambda) \leq 1$ для всех $\lambda > 0$. Тогда для любого $\mu > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ имеем

$$I_{p,\omega}\left(\frac{f}{\mu}\right) = \int_{\Omega} \varepsilon^{p(x)} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\varepsilon\mu} \right)^{p(x)} dx \leq \varepsilon^{\underline{p}} I_{p,\omega}\left(\frac{f}{\varepsilon\mu}\right) \leq \varepsilon^{\underline{p}}.$$

Так как ε – любое число из $(0, 1)$, то $I_{p,\omega}(f/\mu) = 0$ для всех $\mu > 0$. Поэтому

$$\int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\mu} \right)^{p(x)} dx = 0$$

и, таким образом, $f = 0$ для п.в. $x \in \Omega$.

СВОЙСТВО 5. Пусть $0 < \underline{p} \leq p(x) < \infty$. Предположим, что $|f(x)| \leq |g(x)|$ для п.в. $x \in \Omega$. Тогда

$$\|f\|_{p,\omega,\Omega} \leq \|g\|_{p,\omega,\Omega}.$$

Действительно, в силу свойства 1 и замечания 2 имеем

$$\int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\|g\|_{p,\omega,\Omega}} \right)^{p(x)} dx = \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|}{|g(x)|} \frac{|g(x)|\omega(x)}{\|g\|_{p,\omega,\Omega}} \right)^{p(x)} dx \leq \int_{\Omega} \left(\frac{|g(x)|\omega(x)}{\|g\|_{p,\omega,\Omega}} \right)^{p(x)} dx \leq 1,$$

откуда в силу определения 1 $\|f\|_{p,\omega,\Omega} \leq \|g\|_{p,\omega,\Omega}$.

ЛЕММА 1. Пусть $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq \bar{p} < 1$ и $f, g \in L_{p(x),\omega}(\Omega)$. Тогда

$$\| |f| + |g| \|_{p,\omega,\Omega} \geq \|f\|_{p,\omega,\Omega} + \|g\|_{p,\omega,\Omega}. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что функция $h(t) = t^r$ при $0 < r < 1$ и $t > 0$ является вогнутой. Другими словами, докажем, что

$$(\alpha t_1 + \beta t_2)^r \geq \alpha t_1^r + \beta t_2^r, \quad \text{где } \alpha + \beta = 1, \quad \alpha, \beta \geq 0.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = \frac{(\alpha + \beta t)^r}{\alpha + \beta t^r}.$$

Дифференцируя по t , получим

$$F'(t) = \frac{\alpha\beta p(\alpha + \beta t)^{r-1}(1 - t^{r-1})}{(\alpha + \beta t^r)^2}.$$

Так как $r - 1 < 0$, то при $t = 1$ функция F принимает минимальное значение для всех $t > 0$. Поэтому $F(t) \geq F(1) = 1$. Таким образом, $(\alpha + \beta t)^r \geq \alpha + \beta t^r$. Взяв $t = t_2/t_1$, в последнем неравенстве получим $(\alpha t_1 + \beta t_2)^r \geq \alpha t_1^r + \beta t_2^r$, т.е. приведенная функция $h(t) = t^r$ является вогнутой.

Теперь докажем требуемое неравенство. Очевидно, что случай $f = g = 0$ для п.в. $x \in \Omega$ тривиальный. Пусть $\|f\|_{p,\omega,\Omega} > 0$ и $\|g\|_{p,\omega,\Omega} > 0$. Используя свойство вогнутости функции $h(t) = t^r$ и свойство 1, получим

$$\begin{aligned} I_{p,\omega} \left(\frac{|f| + |g|}{\|f\|_{p,\omega,\Omega} + \|g\|_{p,\omega,\Omega}} \right) &= \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)| + |g(x)|}{\|f\|_{p,\omega,\Omega} + \|g\|_{p,\omega,\Omega}} \omega(x) \right)^{p(x)} dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\|f\|_{p,\omega,\Omega}(|f(x)|/\|f\|_{p,\omega,\Omega}) + \|g\|_{p,\omega,\Omega}(|g(x)|/\|g\|_{p,\omega,\Omega})}{\|f\|_{p,\omega,\Omega} + \|g\|_{p,\omega,\Omega}} \omega(x) \right)^{p(x)} dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\|f\|_{p,\omega,\Omega}}{\|f\|_{p,\omega,\Omega} + \|g\|_{p,\omega,\Omega}} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{p,\omega,\Omega}} + \frac{\|g\|_{p,\omega,\Omega}}{\|f\|_{p,\omega,\Omega} + \|g\|_{p,\omega,\Omega}} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p,\omega,\Omega}} \right)^{p(x)} [\omega(x)]^{p(x)} dx \\ &\geq \frac{\|f\|_{p,\omega,\Omega}}{\|f\|_{p,\omega,\Omega} + \|g\|_{p,\omega,\Omega}} \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{p,\omega,\Omega}} \right)^{p(x)} dx \\ &\quad + \frac{\|g\|_{p,\omega,\Omega}}{\|f\|_{p,\omega,\Omega} + \|g\|_{p,\omega,\Omega}} \int_{\Omega} \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{p,\omega,\Omega}} \right)^{p(x)} dx \\ &= \frac{\|f\|_{p,\omega,\Omega}}{\|f\|_{p,\omega,\Omega} + \|g\|_{p,\omega,\Omega}} + \frac{\|g\|_{p,\omega,\Omega}}{\|f\|_{p,\omega,\Omega} + \|g\|_{p,\omega,\Omega}} = 1, \end{aligned}$$

откуда

$$\| |f| + |g| \|_{p,\omega,\Omega} \geq \|f\|_{p,\omega,\Omega} + \|g\|_{p,\omega,\Omega}.$$

Отметим, что доказанное неравенство не имеет места в форме

$$\|f + g\|_{p,\omega,\Omega} \geq \|f\|_{p,\omega,\Omega} + \|g\|_{p,\omega,\Omega}$$

для функций из пространства $L_{p(x),\omega}(\Omega)$. Действительно, взяв $g = -f$ убеждаемся, что $0 \geq 2\|f\|_{p,\omega,\Omega}$, что в свою очередь справедливо только для $f = 0$ п.в. на Ω .

Лемма 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что в случае $1 \leq p(x) < \infty$ неравенство (2.2) переходит в обратное. В этом случае лемма 1 при $\Omega = [0, 1]$ и $\omega \equiv 1$ была доказана в работе [6]. Вообще говоря, из свойства 3 вытекает, что в пространстве $L_{p(x), \omega}(\Omega)$ неравенство треугольника имеет место с постоянной, которая больше единицы. В литературе такие пространства принято называть *квазинормированными*.

Теперь переходим к определению величины (2.1) для отрицательных переменных показателей $q(x)$. Пусть $q: \Omega \rightarrow (-\infty, 0)$. Введем следующую величину:

$$\|f\|'_{L_{q(x), \omega}(\Omega)} = \|f\|'_{q, \omega, \Omega} = \sup \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\lambda} \right)^{q(x)} dx \leq 1 \right\}. \quad (2.3)$$

Теперь покажем, как выражается эта величина через положительные переменные показатели. Совершив замену $\lambda = \mu^{-1}$, имеем

$$\begin{aligned} \|f\|'_{L_{q(x), \omega}(\Omega)} &= \sup \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\lambda} \right)^{q(x)} dx \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \left[\left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\lambda} \right)^{-1} \right]^{-q(x)} dx \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{1}{\mu} > 0 : \int_{\Omega} \left(\frac{[|f(x)|\omega(x)]^{-1}}{\mu} \right)^{-q(x)} dx \leq 1 \right\} \\ &= \left(\inf \left\{ \mu > 0 : \int_{\Omega} \left(\frac{[|f(x)|\omega(x)]^{-1}}{\mu} \right)^{-q(x)} dx \leq 1 \right\} \right)^{-1} \\ &= (\|f^{-1}\|_{L_{-q(x), \omega^{-1}}(\Omega)})^{-1}. \end{aligned}$$

Далее, имеет место аналог свойства 1 для отрицательных переменных показателей.

СВОЙСТВО 1'. Пусть $-\infty < \underline{q} \leq q(x) \leq \bar{q} < 0$ и $0 < \|f\|'_{q, \omega, \Omega} < \infty$. Тогда

$$I_{q, \omega} \left(\frac{f}{\|f\|'_{q, \omega, \Omega}} \right) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $I_{q, \omega}(f/\|f\|'_{q, \omega, \Omega}) < 1$, то можно найти число $\lambda \geq \|f\|'_{q, \omega, \Omega}$ такое, что $I_{q, \omega}(f/\lambda) < 1$. Действительно, положим

$$\lambda = \|f\|'_{q, \omega, \Omega} \cdot I_{q, \omega}^{1/q} \left(\frac{f}{\|f\|'_{q, \omega, \Omega}} \right).$$

Тогда $\lambda > \|f\|'_{q, \omega, \Omega}$ и справедливо неравенство

$$\begin{aligned} I_{q, \omega} \left(\frac{f}{\lambda} \right) &= \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\|f\|'_{q, \omega, \Omega} I_{q, \omega}^{1/q} (f/\|f\|'_{q, \omega, \Omega})} \right)^{q(x)} dx \\ &= \int_{\Omega} I_{q, \omega}^{-q(x)/q} \left(\frac{f}{\|f\|'_{q, \omega, \Omega}} \right) \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\|f\|'_{q, \omega, \Omega}} \right)^{q(x)} dx \\ &\leq I_{q, \omega}^{-1} \left(\frac{f}{\|f\|'_{q, \omega, \Omega}} \right) \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\|f\|'_{q, \omega, \Omega}} \right)^{q(x)} dx = 1. \end{aligned}$$

Последнее неравенство противоречит определению величины (2.3). Таким образом, свойство 1' доказано.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq \bar{p} < 1$ и $p'(x) = p(x)/p(x) - 1$. Предположим, что ω – весовая функция, определенная на Ω . Тогда имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \geq \left(\frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{p}'} \right) \|f\|_{p,\omega,\Omega} \|g\|'_{p',\omega^{-1},\Omega}, \quad (2.4)$$

где $f \in L_{p(x),\omega}(\Omega)$, $g \in L_{p'(x),\omega^{-1}}(\Omega)$, $g(x) \neq 0$ для п.в. $x \in \Omega$ и величина $\|g\|'_{p',\omega^{-1},\Omega}$ определяется выражением (2.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$G(t) = \frac{t^s}{s} + \frac{t^{-s'}}{s'}, \quad \text{где } t > 0, \quad 0 < s < 1, \quad s' = \frac{s}{s-1}.$$

Дифференцируя по t , имеем

$$G'(t) = t^{s-1} - \frac{1}{t^{s'+1}} = \frac{t^{ss'} - 1}{t^{s'+1}}, \quad \text{где } s + s' = ss' < 0.$$

Поэтому при $t = 1$ функция $G(t)$ принимает максимальное значение для всех $t > 0$. Таким образом, $G(t) \leq G(1) = 1$, т.е. $t^s/s + t^{-s'}/s' \leq 1$. Положив в последнем неравенстве $t = a^{1/s'}/b^{1/s}$, получим

$$ab \geq \frac{a^s}{s} + \frac{b^{s'}}{s'}, \quad (2.5)$$

где a и b – любые положительные числа.

Взяв в неравенстве (2.5)

$$a = \frac{|f(x)|\omega(x)}{\|f\|_{p,\omega,\Omega}}, \quad b = \frac{|g(x)|\omega^{-1}(x)}{\|g\|_{p',\omega^{-1},\Omega}}, \quad s = s(x) = p(x), \quad s' = s'(x) = p'(x)$$

и используя свойства 1 и 1', имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{p,\omega,\Omega} \|g\|_{p',\omega^{-1},\Omega}} dx \\ & \geq \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\|f\|_{p,\omega,\Omega}} \right)^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p'(x)} \left(\frac{|g(x)|\omega^{-1}(x)}{\|g\|_{p',\omega^{-1},\Omega}} \right)^{p'(x)} dx \\ & \geq \frac{1}{\bar{p}} \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\|f\|_{p,\omega,\Omega}} \right)^{p(x)} dx + \frac{1}{\bar{p}'} \int_{\Omega} \left(\frac{|g(x)|\omega^{-1}(x)}{\|g\|_{p',\omega^{-1},\Omega}} \right)^{p'(x)} dx = \frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{p}'}, \end{aligned}$$

откуда и следует неравенство (2.4).

3. Основные результаты. Теперь сформулируем основные результаты работы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть

$$0 < \underline{p} \leq p(x) \leq q(x) \leq \bar{q} < \infty, \quad r(x) = \frac{p(x)q(x)}{q(x) - p(x)}.$$

Предположим, что ω_1 и ω_2 – весовые функции, определенные на Ω и удовлетворяющие условию

$$\left\| \frac{\omega_1}{\omega_2} \right\|_{r, \Omega} < \infty.$$

Тогда для любого $f \in L_{q(x), \omega_2}(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\|f\|_{p, \omega_1, \Omega} \leq (A + B + \|\chi_{\Omega_2}\|_{L_\infty(\Omega)})^{1/p} \left\| \frac{\omega_1}{\omega_2} \right\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega)} \|f\|_{q, \omega_2, \Omega},$$

где

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : p(x) < q(x)\}, \quad \Omega_2 = \{x \in \Omega : p(x) = q(x)\},$$

$$A = \sup_{x \in \Omega_1} \frac{p(x)}{q(x)}, \quad B = \sup_{x \in \Omega_1} \frac{q(x) - p(x)}{q(x)},$$

χ_{Ω_2} – характеристическая функция множества Ω_2 и

$$\left\| \frac{\omega_1}{\omega_2} \right\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega)} = \left\| \frac{\omega_1}{\omega_2} \right\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega_1)} + \left\| \frac{\omega_1}{\omega_2} \right\|_{L_\infty(\Omega_2)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{p, \omega_1, \Omega_2} &= \left\| f \omega_2 \frac{\omega_1}{\omega_2} \right\|_{p, \omega_1, \Omega_2} \leq \left\| \frac{\omega_1}{\omega_2} \right\|_{L_\infty(\Omega_2)} \|f \omega_2\|_{p, \Omega_2} \\ &= \left\| \frac{\omega_1}{\omega_2} \right\|_{L_\infty(\Omega_2)} \|f \chi_{\Omega_2}\|_{p, \omega_2, \Omega} \leq \left\| \frac{\omega_1}{\omega_2} \right\|_{L_\infty(\Omega_2)} \|\chi_{\Omega_2}\|_{L_\infty(\Omega)} \|f\|_{p, \omega_2, \Omega}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left\| \frac{f}{\|\omega_1/\omega_2\|_{L_\infty(\Omega_2)} \|f\|_{p, \omega_2, \Omega}} \right\|_{p, \omega_1, \Omega_2} \leq \|\chi_{\Omega_2}\|_{L_\infty(\Omega)} \leq 1.$$

На основании свойства 1 получим

$$\int_{\Omega_2} \left(\frac{|f(x)|\omega_1(x)}{\|\omega_1/\omega_2\|_{L_\infty(\Omega_2)} \|f\|_{p, \omega_2, \Omega}} \right)^{p(x)} dx \leq \|\chi_{\Omega_2}\|_{L_\infty(\Omega)}^p = \|\chi_{\Omega_2}\|_{L_\infty(\Omega)}. \quad (3.1)$$

Хорошо известно, что неравенство (2.5) при $s > 1$ переходит в обратное, т.е.

$$ab \leq \frac{a^s}{s} + \frac{b^{s'}}{s'}, \quad (3.2)$$

где $s' = s/(s-1)$. Положим

$$s = s(x) = \frac{q(x)}{p(x)}, \quad a = \left(\frac{|f(x)|\omega_2(x)}{\|f\|_{q, \omega_2, \Omega_1}} \right)^{p(x)}, \quad b = \left[\frac{\omega_1(x)}{\omega_2(x)} / \left\| \frac{\omega_1}{\omega_2} \right\|_{r, \Omega_1} \right]^{p(x)}.$$

Тогда $s' = s'(x) = q(x)/(q(x) - p(x))$ и с помощью неравенства (3.2) имеем

$$\begin{aligned} &\left(\frac{|f(x)|\omega_1(x)}{\|\omega_1/\omega_2\|_{r, \Omega_1} \|f\|_{q, \omega_2, \Omega_1}} \right)^{p(x)} \\ &\leq \frac{p(x)}{q(x)} \left(\frac{|f(x)|\omega_2(x)}{\|f\|_{q, \omega_2, \Omega_1}} \right)^{q(x)} + \frac{q(x) - p(x)}{q(x)} \left[\frac{\omega_1(x)/\omega_2(x)}{\|\omega_1/\omega_2\|_{r, \Omega_1}} \right]^{r(x)} \\ &\leq A \left(\frac{|f(x)|\omega_2(x)}{\|f\|_{q, \omega_2, \Omega_1}} \right)^{q(x)} + B \left[\frac{\omega_1(x)/\omega_2(x)}{\|\omega_1/\omega_2\|_{r, \Omega_1}} \right]^{r(x)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $1 \leq A + B \leq 2$. Интегрируя по Ω_1 , используя свойство 1 и замечание 2, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \left(\frac{|f(x)| \omega_1(x)}{\|\omega_1/\omega_2\|_{r, \Omega_1} \|f\|_{q, \omega_2, \Omega_1}} \right)^{p(x)} dx \\ & \leq A \int_{\Omega_1} \left(\frac{|f(x)| \omega_2(x)}{\|f\|_{q, \omega_2, \Omega_1}} \right)^{q(x)} dx + B \int_{\Omega_1} \left[\frac{\omega_1(x)/\omega_2(x)}{\|\omega_1/\omega_2\|_{r, \Omega_1}} \right]^{r(x)} dx \leq A + B. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из неравенств (3.1) и (3.3) вытекает, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)| \omega_1(x)}{\|\omega_1/\omega_2\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega)} \|f\|_{q, \omega_2, \Omega}} \right)^{p(x)} dx \\ & = \int_{\Omega_1} \left(\frac{|f(x)| \omega_1(x)}{\|\omega_1/\omega_2\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega)} \|f\|_{q, \omega_2, \Omega}} \right)^{p(x)} dx + \int_{\Omega_2} \left(\frac{|f(x)| \omega_1(x)}{\|\omega_1/\omega_2\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega)} \|f\|_{q, \omega_2, \Omega}} \right)^{p(x)} dx \\ & \leq \int_{\Omega_1} \left(\frac{|f(x)| \omega_1(x)}{\|\omega_1/\omega_2\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega_1)} \|f\|_{q, \omega_2, \Omega_1}} \right)^{p(x)} dx + \int_{\Omega_2} \left(\frac{|f(x)| \omega_1(x)}{\|\omega_1/\omega_2\|_{L_{\infty}(\Omega_2)} \|f\|_{q, \omega_2, \Omega}} \right)^{p(x)} dx \\ & \leq A + B + \|\chi_{\Omega_2}\|_{L_{\infty}(\Omega)}. \end{aligned}$$

В силу последнего неравенства получим

$$\begin{aligned} 1 & \geq \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)| \omega_1(x)}{(A + B + \|\chi_{\Omega_2}\|_{L_{\infty}(\Omega)})^{1/p(x)} \|\omega_1/\omega_2\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega)} \|f\|_{q, \omega_2, \Omega}} \right)^{p(x)} dx \\ & \geq \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)| \omega_1(x)}{(A + B + \|\chi_{\Omega_2}\|_{L_{\infty}(\Omega)})^{1/\underline{p}} \|\omega_1/\omega_2\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega)} \|f\|_{q, \omega_2, \Omega}} \right)^{p(x)} dx. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\|f\|_{p, \omega_1, \Omega} \leq (A + B + \|\chi_{\Omega_2}\|_{L_{\infty}(\Omega)})^{1/\underline{p}} \left\| \frac{\omega_1}{\omega_2} \right\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega)} \|f\|_{q, \omega_2, \Omega}.$$

Предложение 1 полностью доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае

$$n = 1, \quad 1 \leq \underline{p} \leq p(x) \leq q(x) \leq \bar{q} < \infty, \quad x \in [0, 1]$$

предложение 1 доказано в [10]. В случае

$$n > 1, \quad 1 \leq \underline{p} \leq p(x) \leq q(x) \leq \bar{q} < \infty, \quad x \in \Omega, \quad |\Omega| < \infty, \quad \omega_1 = \omega_2 = 1$$

предложение 1 доказано в [7]. В случае

$$1 \leq \underline{p} \leq p(x) \leq q(x) \leq \bar{q} < \infty$$

для общих мер предложение 1 доказано в [12] (см. также [13]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть X – действительное линейное пространство. Подпространство G пространства X называется *выпуклым*, если

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \in G \quad \text{для любых} \quad x_1, x_2, \dots, x_m \in G,$$

$$\text{где} \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

В частности, из определения 2 вытекает, что подпространство G содержит элемент $(1/m) \sum_{i=1}^m x_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Топологическое линейное пространство X называется *локально выпуклым*, если в нем существует фундаментальная система выпуклых окрестностей нуля.

ЛЕММА 2. Пусть $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq \bar{p} < 1$. Предположим, что ω – весовая функция, определенная на Ω и удовлетворяющая условию $0 < \omega(x) < \infty$ для п.в. $x \in \Omega$. Тогда пространство $L_{p(x), \omega}(\Omega)$ не является локально выпуклым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что функционал

$$\rho(f, g) = \int_{\Omega} [|f(x) - g(x)| \omega(x)]^{p(x)} dx$$

определяет метрику в пространстве $L_{p(x), \omega}(\Omega)$. Рассмотрим систему окрестностей нуля в пространстве $L_{p(x), \omega}(\Omega)$. Обозначим

$$U_R(0) = \{f \in L_{p(x), \omega}(\Omega) : \rho(f, 0) = I_{p(x), \omega}(f) < R\}.$$

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ ε -окрестность нуля содержит функции, у которых среднее арифметическое не принадлежит множеству $U_R(0)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $m \geq 1$ – любое натуральное число. Выберем попарно непересекающиеся множества $A_1, A_2, \dots, A_m$ из Ω , которые не покрывают множество Ω . Пусть

$$f_k = \left(\frac{\varepsilon}{\omega(A_k)} \right)^{1/p(x)} \chi_{A_k}, \quad \text{где} \quad \omega(A_k) = \int_{A_k} [\omega(x)]^{p(x)} dx, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Тогда

$$I_{p, \omega}(f_k) = \frac{\varepsilon}{\omega(A_k)} \int_{A_k} [\omega(x)]^{p(x)} dx = \varepsilon.$$

Таким образом, $\rho(f_k, 0) = \varepsilon$. Но так как функции f_k имеют носители на непересекающихся множествах, то их среднее $g_m = (1/m) \sum_{i=1}^m f_i$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} I_{p, \omega}(g_m) &= \int_{\Omega} g_m^{p(x)}(x) dx = \int_{\Omega} \frac{1}{m^{p(x)}} \left(\sum_{i=1}^m f_i \right)^{p(x)} [\omega(x)]^{p(x)} dx \\ &\geq \frac{1}{m^{\bar{p}}} \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} (f_i(x) \omega(x))^{p(x)} dx = \frac{\varepsilon}{m^{\bar{p}}} \sum_{i=1}^m 1 = m^{1-\bar{p}} \varepsilon. \end{aligned}$$

Тогда $I_{p, \omega}(g_m) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Поэтому $\rho(g_m, 0) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Таким образом, расстояние между функциями g_n и 0 может быть сделано сколь угодно большим.

Лемма 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Отметим, что в одномерном случае при $\omega = 1$ и $\Omega = [0, 1]$ лемма 2 была доказана в работе [6].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq \bar{p} < 1$. Предположим, что ω – весовая функция, определенная на Ω и удовлетворяющая условию $0 < \omega(x) < \infty$ для п.в. $x \in \Omega$. Тогда $[L_{p(x),\omega}(\Omega)]' = \{0\}$, где $[L_{p(x),\omega}(\Omega)]'$ – сопряженное пространство к пространству $L_{p(x),\omega}(\Omega)$, т.е. пространство всех непрерывных линейных функционалов, определенных на $L_{p(x),\omega}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное. Пусть $\varphi \neq 0$ и $\varphi \in [L_{p(x),\omega}(\Omega)]'$. Положим $\tilde{B}(0, t) = \Omega \cap B(0, t)$, где $0 < t < \infty$. Тогда можно найти функцию $f \in L_{p(x),\omega}(\Omega)$ такую, что $\varphi(f) = 1$. В силу интегрируемости функции $|f|^{p(x)}\omega(x)$ отображение $t \mapsto f\chi_{\tilde{B}(0,t)}$ является непрерывным. При $0 < t_1 < t_2$ имеем

$$\int_{\tilde{B}(0,t_2)} |f(x)|^{p(x)}\omega(x) dx - \int_{\tilde{B}(0,t_1)} |f(x)|^{p(x)}\omega(x) dx = \int_{\Omega \cap B_{t_1,t_2}} |f(x)|^{p(x)}\omega(x) dx,$$

где $B_{t_1,t_2} = \{x : t_1 \leq |x| < t_2\}$. Таким образом, можно выбрать $t \in (t_1, \infty)$ такое, что

$$\varphi(f\chi_{\tilde{B}(0,t)}) = \varphi(f\chi_{\Omega \setminus \tilde{B}(0,t)}) = \frac{1}{2}.$$

Положив $g = f\chi_{\tilde{B}(0,t)}$ и $h = f\chi_{\Omega \setminus \tilde{B}(0,t)}$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)}\omega(x) dx &= \int_{\tilde{B}(0,t)} |f(x)|^{p(x)}\omega(x) dx + \int_{\Omega \setminus \tilde{B}(0,t)} |f(x)|^{p(x)}\omega(x) dx \\ &= I_{p,\omega}(g) + I_{p,\omega}(h). \end{aligned}$$

Таким образом, по крайней мере один из функционалов $I_{p,\omega}(g)$ или $I_{p,\omega}(h)$ меньше, чем $(1/2)I_{p,\omega}(f)$. Пусть $I_{p,\omega}(g) \leq (1/2)I_{p,\omega}(f)$. Тогда для $f_1 = 2g$ получим

$$\varphi(f_1) = 1 \quad \text{и} \quad I_{p,\omega}(f_1) \leq 2^{\bar{p}}I_{p,\omega}(g) \leq 2^{\bar{p}-1}I_{p,\omega}(f).$$

По индукции можно найти последовательность $\|f_n\|_{n \geq 1}$ в $L_{p(x),\omega}(\Omega)$ такую, что

$$\varphi(f_n) = 1 \quad \text{и} \quad I_{p,\omega}(f_n) \leq 2^{n(\bar{p}-1)}I_{p,\omega}(f).$$

Очевидно, что $\bar{p} - 1 < 0$ и $\{f_n\}_{p,\omega,\Omega} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. С другой стороны, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi(f_n) = 1$. Полученное противоречие доказывает, что только нулевой функционал является линейным непрерывным функционалом на пространстве $L_{p(x),\omega}(\Omega)$.

Предложение 2 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Отметим, что в одномерном случае при $\omega = 1$ и $\Omega = [0, 1]$ предложение 2 доказано в [6].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < \underline{p} \leq p(x) < 1$, где $x \in \Omega$. Предположим, что ω – весовая функция, определенная на Ω и удовлетворяющая условию $0 < \omega(x) < \infty$ для п.в. $x \in \Omega$. Тогда пространство $L_{p(x),\omega}(\Omega)$ является полным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{f_n\}$, $n \in N$, – последовательность функций из пространства $L_{p(x),\omega}(\Omega)$ такая, что

$$\|f_n - f_m\|_{p,\omega,\Omega} \rightarrow 0 \quad \text{при } n, m \rightarrow \infty.$$

Из свойства 1 вытекает, что

$$\int_{\Omega} (|f_n - f_m| \omega(x))^{p(x)} dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n, m \rightarrow \infty.$$

Из последовательности $\{f_n\}$ выберем подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ такую, что

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} (|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \omega(x))^{p(x)} dx < \infty.$$

Тогда для любого $\ell \in N$ имеем

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{k=1}^{\ell} (|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \omega(x)) \right]^{p(x)} dx \leq \sum_{k=1}^{\ell} \int_{\Omega} (|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \omega(x))^{p(x)} dx \leq A.$$

По теореме о монотонной сходимости при $\ell \rightarrow \infty$ получим

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \omega(x)) \right]^{p(x)} dx \leq A. \quad (3.4)$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \omega(x) < \infty \quad \text{для п.в. } x \in \Omega.$$

Отсюда в силу полноты вещественной оси последовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится для п.в. x из Ω . Обозначим через f измеримую функцию, определенную следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) & \text{для п.в. } x \in \Omega, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, доказано, что $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ для п.в. x из Ω . В силу свойства 3 и неравенства (3.4) для всех $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} \|f_{n_k}\|_{p,\omega,\Omega} &= \left\| f_{n_1} + \sum_{\ell=1}^{k-1} (f_{n_{\ell+1}} - f_{n_{\ell}}) \right\|_{p,\omega,\Omega} \leq \left\| |f_{n_1}| + \sum_{\ell=1}^{k-1} |f_{n_{\ell+1}} - f_{n_{\ell}}| \right\|_{p,\omega,\Omega} \\ &\leq 2^{1/p} \left(\|f_{n_1}\|_{p,\omega,\Omega} + \left\| \sum_{\ell=1}^{k-1} |f_{n_{\ell+1}} - f_{n_{\ell}}| \right\|_{p,\omega,\Omega} \right) \\ &\leq 2^{1/p} (\|f_{n_1}\|_{p,\omega,\Omega} + \max\{A^{1/p}, A^{1/\bar{p}}\}). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим $\|f\|_{p,\omega,\Omega} \leq C$, т.е. $f \in L_{p(x),\omega}(\Omega)$. Теперь покажем, что $\|f - f_{n_k}\|_{p,\omega,\Omega} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. В силу свойства 2 и неравенства (3.4)

для всех $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} \|f - f_{n_k}\|_{p,\omega,\Omega} &= \left\| \sum_{\ell=k}^{\infty} (f_{n_{\ell+1}} - f_{n_{\ell}}) \right\|_{p,\omega,\Omega} \leq \left\| \sum_{\ell=k}^{\infty} |f_{n_{\ell+1}} - f_{n_{\ell}}| \right\|_{p,\omega,\Omega} \\ &\leq \left\| \sum_{\ell=1}^{\infty} |f_{n_{\ell+1}} - f_{n_{\ell}}| \right\|_{p,\omega,\Omega} \leq \max\{A^{1/p}, A^{1/\bar{p}}\}. \end{aligned}$$

По теореме о монотонной сходимости

$$\|f - f_{n_k}\|_{p,\omega,\Omega} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Наконец, докажем, что последовательность $\{f_n\}$ сходится по норме пространства $L_{p(x),\omega}(\Omega)$. В силу фундаментальности последовательности $\{f_n\}$ для заданного $\varepsilon > 0$ существует номер N_ε такой, что при всех $m, n > N_\varepsilon$ имеем

$$\|f_n - f_m\|_{p,\omega,\Omega} < \frac{\varepsilon}{2^{1/\underline{p}+1}}.$$

Выберем номер $n_k > N_\varepsilon$ такой, что

$$\|f - f_{n_k}\|_{p,\omega,\Omega} < \frac{\varepsilon}{2^{1/\underline{p}+1}}.$$

В силу свойства 3 имеем

$$\|f_n - f\|_{p,\omega,\Omega} \leq 2^{1/\underline{p}} (\|f_n - f_{n_k}\|_{p,\omega,\Omega} + \|f_{n_k} - f\|_{p,\omega,\Omega}) < \varepsilon.$$

Теорема 2 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Пусть $p(x) = p = 0$ и $\omega = 1$, где $x \in \Omega$. Тогда в качестве пространства $L_0(\Omega)$ в литературе берется совокупность всех вещественных (комплексных) лебегово измеримых и почти всюду конечных функций на Ω (см. [9]). Но, как известно, это пространство не является полным (см. [14]).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Отметим, что из свойства 5 и теоремы 2 следует, что пространство $L_{p(x),\omega}(\Omega)$ является идеальным.

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. Orlicz, “Über konjugierte exponentenfolgen”, *Studia Math.*, **3** (1931), 200–211.
- [2] H. Nakano, *Modulated Semi-Ordered Linear Spaces*, Maruzen, Tokyo, 1950.
- [3] H. Nakano, *Topology and Topological Linear Spaces*, Maruzen, Tokyo, 1951.
- [4] J. Musielak, “Orlicz Spaces and Modular Spaces”, *Lecture Notes in Math.*, **1034**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [5] J. Musielak, W. Orlicz, “On modular spaces”, *Studia Math.*, **18** (1959), 49–65.
- [6] И. И. Шарапудинов, “О топологии пространства $\mathcal{L}^{p(t)}([0, 1])$ ”, *Матем. заметки*, **26:4** (1979), 613–632.
- [7] O. Kováčik, J. Rákosník, “On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ ”, *Czechoslovak Math. J.*, **41:4** (1991), 592–618.

- [8] В. В. Жиков, “Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:4 (1986), 675–710.
- [9] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžička, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Lecture Notes in Math., **2017**, Springer-Verlag, Berlin, 2011.
- [10] И. И. Шарапудинов, “О базисности системы Хаара в пространстве $\mathcal{L}^{p(t)}([0, 1])$ и принципе локализации в среднем”, *Матем. сб.*, **130**:2 (1986), 275–283.
- [11] И. И. Шарапудинов, “О равномерной ограниченности в L^p ($p = p(x)$) некоторых семейств операторов свертки”, *Матем. заметки*, **59**:2 (1996), 291–302.
- [12] R. A. Bandaliev, “Embedding between variable exponent Lebesgue spaces with measures”, *Azerb. J. Math.*, **2**:1 (2012), 119–126.
- [13] Р. А. Бандалиев, “Об одном неравенстве в пространстве Лебега со смешанной нормой и с переменным показателем суммируемости”, *Матем. заметки*, **84**:3 (2008), 323–333.
- [14] N. J. Kalton, “A note on the spaces L_p for $0 < p \leq 1$ ”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **56**:1 (1976), 199–202.

Р. А. Бандалиев

Институт математики и механики НАН

Азербайджана, г. Баку

E-mail: bandaliev@rambler.ru

Поступило

22.03.2012

Исправленный вариант

28.01.2013