Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Будревич, Построение неконвертируемых $(0, 1)$ матриц, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 2, 186–193

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9336>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 18:06:02

Построение неконвертируемых $(0, 1)$ матриц

М. В. Будревич

В данной работе полностью решается проблема о существовании неконвертируемых $(0, 1)$ матриц. Аналогичный результат получен для множества симметричных $(0, 1)$ -матриц.

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm9336

1. Введение. В данной работе полностью решается проблема, поставленная в работе [1] (проблема 3), о существовании неконвертируемых $(0, 1)$ -матриц. Аналогичный результат получен для множества симметричных $(0, 1)$ -матриц, исследование которого проводилось в работе [2].

Через $M_n(0, 1)$ обозначим квадратные $(0, 1)$ -матрицы порядка n . Симметричные $(0, 1)$ -матрицы порядка n обозначим через $SM_n(0, 1)$. Напомним определения *детерминанта* и *перманента* квадратной матрицы:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}, \quad \text{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Детерминант является одной из основных функций в теории матриц, так как имеет хорошую геометрическую интерпретацию и вычисляется за полиномиальное время, например, алгоритмом Гаусса. Перманент также используется в комбинаторике и теории графов.

В отличие от детерминанта, на сегодняшний день не известно полиномиального алгоритма нахождения перманента. Один из стандартных способов его вычисления – формула Райзера, асимптотическая сложность которой $\bar{O}(n2^n)$ [3]. Более того, Валиант показал, что нахождение перманента даже $(0, 1)$ -матрицы является $\#P$ -полной задачей (подробнее см. в [4]).

Начиная с работ Полия [5], исследователи изучают вопрос возможности вычисления перманента матрицы через детерминант. А именно, Полия обратил внимание, что для $n = 2$ преобразование $\phi: M_2 \rightarrow M_2$, определенное по правилу

$$\phi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

позволяет перейти от вычисления перманента к вычислению детерминанта: $\text{per}(A) = \det(\phi(A))$. Указанное преобразование может быть обобщено на матрицы более высокого порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Матрица $A \in M_n(0, 1)$ называется *конвертируемой*, если существует матрица $X \in M_n(\pm 1)$ такая, что выполнено тождество $\text{per}(A) = \det(A \circ X)$, где $\circ$ обозначает операцию поэлементного умножения матриц.

Вопрос о существовании универсального способа конвертации был разрешен в работе Сегё [6], где было показано, что для $n \geq 3$ такого отображения не существует, а именно, для $n \geq 3$ можно указать неконвертируемую блочнодиагональную матрицу $I_{(n-3)} \oplus J_3$, где $I_{(n-3)}$ – единичная матрица порядка $(n-3)$, а

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем данный вопрос исследовался с точки зрения наложения различных ограничений на расположение единичных элементов в матрице и на их количество. Через $\nu(A)$ будем обозначать количество единичных элементов в матрице $A \in M_n(0, 1)$. Гибсон доказал (см. [7]), что для всякой матрицы $A \in M_n(0, 1)$, перманент которой не равен 0 и для количества единичных элементов в которой имеет место неравенство

$$\nu(A) > \frac{n^2 + 3n - 2}{2} = \Omega_n,$$

конвертация невозможна. Более того, если $\nu(A) = \Omega_n$, то существует единственная, с точностью до перестановки строк и столбцов, конвертируемая матрица, которая обычно называется *матрицей Гибсона* и имеет вид

$$G_n = \begin{cases} 0, & \text{если } 1 \leq i < j < n, \\ 1, & \text{если } i \geq j \text{ или } j = n. \end{cases} \quad (1.1)$$

Вопрос построения конвертора для матрицы G_n изучается в [8] с использованием аппарата парадетерминантов. В частности, в работе построена матрица $X \in M_n(\pm 1)$, для которой имеет место равенство $\text{per}(G_n) = \det(X \circ G_n)$. Таким образом, возникает следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [1]). Число Ω_n называется *верхней границей* конвертации, если любая матрица $A \in M_n(0, 1)$ с ненулевым перманентом и количеством ненулевых элементов большим чем Ω_n является неконвертируемой. Число ω_n называется *нижней границей* конвертации, если всякая матрица $A \in M_n(0, 1)$ с меньшим чем ω_n количеством ненулевых элементов будет заведомо конвертируемой. Числа Ω_n , ω_n также называются *барьерами конвертации*.

Задача о вычислении ω_n была решена Литтлом в работе [9] с использованием теории графов. Решение Литтла достаточно сложно. Более простое решение в терминах теории матриц можно найти в [1].

Вопрос о существовании конвертируемых и неконвертируемых матриц с $\nu(A) \in [\omega_n, \Omega_n]$ был изучен в работе [1], где для произвольного значения числа единиц $\nu \in$

$[\omega_n, \Omega_n]$ и для любого $n \geq 26$ построены примеры конвертируемых и неконвертируемых матриц. Отметим, что в работе [1] примеры конвертируемых матриц были построены для любого $n > 3$ и $\nu \in [\omega_n, \Omega_n]$, а для неконвертируемых матриц сформулирована следующая проблема.

ПРОБЛЕМА 1. Для любого ли целого $r \in [\omega_n, \Omega_n]$, где $3 < n < 26$, существует неконвертируемая матрица $A \in M_n(0, 1)$, для которой $\nu(A) = r$.

При исследовании конвертации симметричных матриц можно дополнительно требовать симметричности матрицы $X \circ A$. Отсюда возникает следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Матрица $A \in SM_n(0, 1)$ называется *симметрично конвертируемой*, если существует матрица $X \in SM_n(\pm 1)$ такая, что

$$\text{per}(A) = \det(A \circ X).$$

Матрица $A \in M_n(0, 1)$ называется *слабо симметрично конвертируемой*, если существует симметричная матрица $X \in M_n(\pm 1)$ такая, что

$$\text{per}(A) = \pm \det(A \circ X).$$

Из определения видно, что из симметричной конвертации следует слабая симметричная конвертация, но обратное верно не всегда, а именно, имеет место следующий

ПРИМЕР 1. Матрицы порядка 2 являются слабо симметрично конвертируемыми, конвертация реализуется следующим отображением:

$$\phi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

но такие матрицы не являются симметрично конвертируемыми.

Вопрос о существовании симметрично конвертируемых и неконвертируемых матриц для произвольного $\nu(A) \in [\omega_n, \Omega_n]$ подробно изучается в [2], где построены примеры конвертируемых симметричных матриц для $n > 3$ и с любым значением $\nu \in [\omega_n, \Omega_n]$, а также примеры слабо симметрично неконвертируемых матриц для любого $n \geq 26$ со значением $\nu(A) \in [\omega_n, \Omega_n]$. Также для симметричной конвертации обобщены результаты Гибсона [7] и Литтла [9].

ТЕОРЕМА 1 [2; теорема 1.4]. Пусть $n \geq 3$, и предположим $A \in S_n$ является симметричной $(0, 1)$ -матрицей, для которой $\text{per}(A) > 0$. Если

$$\nu(A) = \Omega_n = \frac{n^2 + 3n - 2}{2},$$

то A является конвертируемой матрицей тогда и только тогда, когда $A = PT_n P^t$ для некоторой матрицы-перестановки P .

Более того, если $n \not\equiv 2 \pmod{4}$, то матрица A является симметрично конвертируемой. Если $n \equiv 2 \pmod{4}$, то A является только симметрично слабо конвертируемой. Здесь через T_n обозначается матрица вида

$$t_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i + j \leq n - 1, \\ 1, & \text{если } i + j > n - 1, \end{cases}$$

перестановочно эквивалентная матрице Гибсона (1.1) и называемая симметричной матрицей Гибсона.

ТЕОРЕМА 2 [2; теорема 4.4]. Пусть $n \geq 3$ и $A \in S_n(0, 1)$ – симметрическая $(0, 1)$ -матрица, у которой $\nu(A) < n + 6 = \omega_n$. Тогда матрица A является симметрично слабо конвертируемой.

В дальнейшем будем говорить о паре (n, ν) , сопоставляемой матрице A . Будем рассматривать случай, когда $n > 3$ и $\nu(A) \in [\omega_n, \Omega_n]$. Заметим, что в случае $n = 3$ имеет место неравенство $\omega_3 = 9 > 8 = \Omega_3$, а значит, вопрос о конвертируемости и неконвертируемости матриц полностью описывается уже упомянутыми результатами Гибсона [7] и Литгла [9].

Данная работа состоит из двух пунктов. В п. 1 для любой допустимой пары (n, ν) будут построены неконвертируемые матрицы из множества $M_n(0, 1)$, что полностью разрешит проблему 1. В п. 2 будет рассмотрен вопрос о построении неконвертируемых симметричных матриц. Будет доказано, что для пары $(n, \nu) = (4, 11)$ симметричная матрица будет заведомо слабо симметрично конвертируемой. Для прочих значений пары параметров (n, ν) будут построены примеры матриц, которые не являются слабо симметрично конвертируемыми.

2. Построение неконвертируемой матрицы – общий случай. В работе [1] показано, что для любого значения $r \in [\omega_n, \Omega_n]$ существует конвертируемая матрица с $\nu(A) = r$ элементами. Также в [1; теорема 3.1] изучен вопрос существования неконвертируемых матриц для различных значений $r \in [\omega_n, \Omega_n]$ и доказано, что начиная с $n = 26$ для любого $r \in [\omega_n, \Omega_n]$ существует неконвертируемая матрица с $\nu(A) = r$. Докажем, что это верно начиная с $n = 3$.

Пусть $X = (x_{ij}) \in M_n$ – квадратная матрица порядка n . Пусть $\tau \in S_n$ перестановка на n элементах. В случае, когда это не вызывает путаницы, будем обозначать $x_\tau = x_{1,\tau(1)} \cdots x_{n,\tau(n)}$ – произведение элементов обобщенной диагонали, соответствующей τ .

ЛЕММА 1. Пусть $A, B \in M_n(0, 1)$. Пусть матрица $A \circ B$ неконвертируемая. Тогда матрицы A и B неконвертируемые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, пусть существует $X \in M_n(\pm 1)$ такая, что $\text{per}(A) = \det(A \circ X)$. Положим

$$\mathcal{T} = \{\tau \in S_n : a_\tau \neq 0\}.$$

Пользуясь определением перманента, получаем

$$\begin{aligned} \text{per}(A) &= \sum_{\tau} a_\tau + \sum_{\sigma \in S_n \setminus \mathcal{T}} a_\sigma \\ &= \sum_{\tau} (-1)^{\text{sign}(\tau)} x_\tau a_\tau + \sum_{\sigma \in S_n \setminus \mathcal{T}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} x_\sigma a_\sigma = \det(X \circ A). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Так как $a_\sigma = 0$ для $\sigma \in S_n \setminus \mathcal{T}$ и $x_\tau \neq 0$ для любой $\tau \in S_n$, то (2.1) преобразовывается в

$$\sum_{\tau} a_\tau = \sum_{\tau} (-1)^{\text{sign}(\tau)} x_\tau a_\tau. \quad (2.2)$$

В левой части (2.2) все слагаемые равны 1. В правой части (2.2) все слагаемые по модулю равны 1, а значит, они все равны 1. Таким образом, для каждой $\tau \in \mathcal{T}$ имеем

$$(-1)^{\text{sign}(\tau)} x_\tau = 1.$$

Обозначим

$$T' = \{\tau \in S_n : a_\tau \neq 0, b_\tau \neq 0\} \subset T.$$

Умножая теперь в (2.1) матрицу A на матрицу B , получаем

$$\text{per}(A \circ B) = \sum_{T'} a_\tau b_\tau + \sum_{\sigma \in S_n \setminus T'} a_\sigma b_\sigma = \|T'\|. \quad (2.3)$$

Для детерминанта матрицы $X \circ A \circ B$ получаем

$$\det(X \circ A \circ B) = \sum_{T'} (-1)^{\text{sign}(\tau)} x_\tau a_\tau b_\tau + \sum_{\sigma \in S_n \setminus T'} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} x_\sigma a_\sigma b_\sigma = \|T'\|. \quad (2.4)$$

Воспользовались тем, что $T' \subset T$, а значит, $a_\tau b_\tau = 1$ для любого $\tau \in T'$ и $a_\tau b_\tau = 1$ для любого $\tau \notin T'$. Далее, согласно (2.2)

$$(-1)^{\text{sign}(\tau)} x_\tau = 1 \quad \text{при } \tau \in T',$$

что доказывает (2.4).

Сравнивая (2.3) и (2.4), получаем

$$\text{per}(A \circ B) = \|T'\| = \det(X \circ A \circ B),$$

что противоречит условию леммы.

Меняя в рассуждении матрицы A и B местами, получаем утверждение леммы.

Из доказанного имеем очевидное

СЛЕДСТВИЕ 1. Если матрица $A \in M_n(0, 1)$ конвертируемая, то для любой матрицы $B \in M_n(0, 1)$ матрица $A \circ B$ будет конвертируемой.

Следствие 1 может быть обобщено и на случай слабой симметричной конвертации.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если матрица $A \in SM_n(0, 1)$ слабо симметрично конвертируемая, то для любой матрицы $B \in SM_n(0, 1)$ матрица $A \circ B$ будет слабо симметрично конвертируемой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства леммы 1 следует, что матрица $A \circ B$ конвертируется с помощью той же матрицы X , что и матрица A . Таким образом, достаточно выбрать симметричную матрицу X . Это возможно, так как матрица A слабо симметрично конвертируемая.

ТЕОРЕМА 3. Для $n \geq 3$ и для любого целого $r \in [\omega_n, \Omega_n]$ существует матрица $A \in M_n(0, 1)$ с $\nu(A) = r$ такая, что A – неконвертируемая матрица и перманент A отличен от 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. БлочнодиAGONальная матрица $D = I_{n-3} \oplus J_3$ неконвертируемая, так как ее блок J_3 неконвертируемый по теореме Гибсона. Для любого $r \in [\omega_n, \Omega_n]$ выберем матрицу $H \in M_n(0, 1)$, которая содержит $r - n - 6$ единичных элементов и $D \circ H$ будет нулевой матрицей. Положим $A = D + H$. Матрица A содержит r элементов. Более того, $A \circ D = D$, а значит, по лемме 1 матрица B неконвертируемая. Полагая $e \in S_n$, тождественной перестановкой получаем $a_e = 1$ и

$$\text{per } A = a_e + \sum_{S_n \setminus e} a_\sigma > 0.$$

3. Построение неконвертируемых симметричных матриц. Для начала рассмотрим связь между конвертацией и симметричной конвертацией. Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 2. 1) Если симметричная матрица $A \in SM_n(0, 1)$ слабо симметрично конвертируемая (симметрично конвертируемая), то она конвертируемая.

2) Если симметричная матрица $A \in SM_n(0, 1)$ неконвертируемая в обычном смысле, то она не является симметрично и слабо симметрично конвертируемой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если существует симметричная матрица $X \in M_n(\pm 1)$ такая, что $\det(X \circ A) = \text{per } A$, то матрица A конвертируемая. Если существует только симметричная матрица $Y \in M_n(\pm 1)$ такая, что $\det(Y \circ A) = -\text{per } A$, то положим X равной Y , первая строка которой умножена на -1 . Получаем $\det(X \circ A) = \text{per } A$. Таким образом, A конвертируемая.

2) Предположим противное, пусть матрица симметрично или слабо симметрично конвертируемая. Тогда по пункту 1) матрица должна быть конвертируемой, что полностью доказывает лемму.

Докажем, что неконвертируемые симметричные матрицы существуют для любого $n \geq 3$ и для любого $r \in [\omega_n, \Omega_n]$, за исключением случая $n = 4, \nu(A) = r = 11$, причем любая матрица $A \in SM_4(0, 1)$ с $\nu(A) = 11$ будет слабо симметрично конвертируемой. В начале подробно разберем исключительный случай $n = 4$, а затем докажем общее утверждение для $n \geq 5$.

ЛЕММА 3. Матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

неконвертируемые. При этом

$$\nu(A_1) = 10, \quad \nu(A_2) = 12, \quad \nu(A_3) = 13.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матрица $A_1 = I_1 \oplus J_3$ блочнодиагональная, ее перманент больше 0 и один из блоков неконвертируемый, а значит, и вся матрица будет неконвертируемой.

Для матрицы A_2 имеем $A_2 \circ A_1 = A_1$, по лемме 1 матрица A_2 неконвертируемая.

Для матрицы A_3 имеет место равенство $\nu(A_3) = \Omega_4$. Согласно теореме Гибсона эта матрица может быть конвертируемой, только если существуют матрицы перестановок P_1, P_2 такие, что $P_1 A_3 P_2$ – матрица Гибсона. Заметим, что в любом столбце и любой строке матрицы A_3 не более одного нулевого элемента. При перестановке строк и столбцов в них не может меняться количество нулевых элементов. Однако в матрице Гибсона существует столбец с двумя нулевыми элементами. А значит, требуемых P_1 и P_2 не существует и A_3 – неконвертируемая матрица.

Следующая лемма показывает, что для симметричных матриц существует пара $(n, \nu) = (4, 11)$, для которой любая матрица будет слабо симметрично конвертируемой. Отметим, что существование подобной пары отличает симметричный случай от пространства всех $(0, 1)$ -матриц. В дальнейших рассуждениях будет показано, что это единственная такая пара для симметричных матриц.

ЛЕММА 4. Пусть $A \in SM_4(0, 1)$ и $\nu(A) = 11$. Тогда матрица A слабо симметрично конвертируемая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. В матрице $A = (a_{ij})$ пять элементов, равных нулю. Значит, по принципу Дирихле существует строка с двумя нулевыми элементами. Без ограничения общности, будем считать, что в первой строке есть два нулевых элемента.

Случай 1. Предположим $a_{11} = 0$. Переставим столбцы и строки так, чтобы $a_{12} = a_{21} = 0$. Пусть это выполнено для A . Тогда $A \circ T_4 = A$ и по следствию 2 матрица A слабо симметрично конвертируемая.

Случай 2. Предположим $a_{11} = 1$. Заметим, что тогда в первой строке не может быть 3 нулевых элемента, так как тогда в первом столбце будет 3 нулевых элемента, отличных от этих, а их всего 5 в матрице A . Можно считать, что $a_{13} = a_{14} = 0$. При этом элементы $a_{12}, a_{23}, a_{24}, a_{34}$ не равны 0, так как это приведет к появлению как минимум 6 нулевых элементов в матрице A в силу ее симметричности. Также элементы a_{11}, a_{33}, a_{44} не равны нулю, так как тогда получим строчку с двумя нулевыми элементами, один из которых лежит на диагонали. В этом случае по пункту 1 матрица A конвертируемая.

Итак, остался единственный кандидат на неконвертируемую матрицу A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Однако имеет место равенство

$$\text{per} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Получили противоречие, лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4. Для $n \geq 5$ существует матрица A с $\nu(A) = r$, не являющаяся слабо симметрично конвертируемой, для любого целого $r \in [\omega_n, \Omega_n]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2 достаточно доказать обычную неконвертируемость матрицы.

Рассмотрим матрицы вида

$$B = I_{(n-3)} \oplus J_3, \quad C = D \oplus I_{(n-5)} \oplus J_3, \quad \text{где } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\nu(B) = (n + 6)$ и $\nu(C) = (n + 7)$, матрицы B, C симметричные и неконвертируемые, так как являются блочнодиагональными с ненулевым перманентом и содержат неконвертируемые блок J_3 . Выберем $r \in [\omega_n, \Omega_n]$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Если $r - n$ четное, то положим $A = B + U$, где $B \circ U = 0$, U симметричная матрица с $r - n - 6$ единицами. Это возможно сделать, так как $r - n - 6$ четное

и единичные элементы в U можно выбирать парами, симметричными относительно главной диагонали. Так как $A \circ B = B$, то по лемме 1 матрица A неконвертируемая. Полагая $e \in S_n$ нейтральным элементом группы перестановок, находим

$$a_e = 1 \quad \text{и} \quad \text{per}(A) = a_e + \sum_{S_n \setminus e} a_\sigma > 0.$$

Случай 2. Если $r - n$ нечетное, то положим $A = C + U$, где $C \circ U = 0$, U симметричная матрица с $r - n - 7$ единицами. Это возможно сделать, так как $r - n - 7$ четное и единичные элементы в U можно выбирать парами, симметричными относительно главной диагонали. Так как $A \circ C = C$, то по лемме 1 матрица A неконвертируемая. Полагая $\tau = (1, 2) \in S_n$ находим

$$a_\tau = 1 \quad \text{и} \quad \text{per}(A) = a_\tau + \sum_{S_n \setminus \tau} a_\sigma > 0.$$

В обоих случаях построенная матрица A неконвертируемая, а значит, по лемме 2 она не является и слабо симметрично конвертируемой. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю А. Э. Гутерману за постановку задачи, внимание к работе и ценные обсуждения. Также автор выражает благодарность рецензенту за ценные замечания, позволившие существенно упростить изложение результатов, полученных в работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Долинар, А. Э. Гутерман, Б. Кузьма, “Барьеры Гибсона для проблемы Поля”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **16**:8 (2010), 73–86.
- [2] А. Э. Гутерман, Г. Долинар, Б. Кузьма, “Проблема Поля о конвертируемости для симметрических матриц”, *Матем. заметки*, **92**:5 (2012), 684–698.
- [3] Х. Минк, *Перманенты*, Мир, М., 1982.
- [4] L. G. Valiant, “The complexity of computing the permanent”, *Theoret. Comput. Sci.*, **8**:2 (1979), 189–201.
- [5] G. Polya, “Aufgabe 424”, *Arch. der Math. u. Phys.* (3), **20** (1913), 271.
- [6] G. Szegő, “Lösung zu 424”, *Arch. der Math. u. Phys.* (3), **21** (1913), 291–292.
- [7] P. M. Gibson, “Conversion of the permanent into the determinant”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **27** (1971), 471–476.
- [8] В. Е. Тараканов, Р. А. Заторский, “О связи детерминантов с перманентами”, *Матем. заметки*, **85**:2 (2009), 292–299.
- [9] C. H. C. Little, “A characterization of convertible $(0, 1)$ -matrices”, *J. Combin. Theory. Ser. B*, **18**:3 (1975), 187–208.

М. В. Будревич

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: mbudrevich@yandex.ru

Поступило

04.02.2012

Исправленный вариант

30.07.2013