Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, О коммутативных подалгебрах алгебр Вейля, связанных с коммутирующими операторами произвольного ранга и рода, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 2, 314–316

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9339>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 14:19:16

О коммутативных подалгебрах алгебр Вейля, связанных с коммутирующими операторами произвольного ранга и рода

О. И. Мохов

В данной заметке построены примеры коммутирующих обыкновенных скалярных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами, отвечающих спектральной кривой произвольного рода g и произвольному четному рангу $r = 2k$, а также произвольному рангу вида $r = 3k$ векторного расслоения общих собственных функций коммутирующих операторов над спектральной кривой. На настоящий момент мы не знаем никаких явных примеров коммутирующих обыкновенных скалярных дифференциальных операторов, отвечающих спектральной кривой рода $g > 1$ для ранга вида $r = 6s \pm 1$, $s \geq 1$. Для всех остальных значений рода g и ранга r построены явные примеры коммутирующих операторов даже с полиномиальными коэффициентами. Наша гипотеза состоит в том, что существуют коммутирующие обыкновенные скалярные дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами, отвечающие спектральной кривой произвольного рода $g > 1$ и для произвольного ранга вида $r = 6s \pm 1$, $s \geq 1$, но такие примеры пока не построены, – это очень интересная проблема. Хорошо известно, что коммутирующие обыкновенные скалярные дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами задают коммутативные подалгебры алгебры Вейля W_1 , т.е. алгебры с двумя образующими p и q и соотношением $[p, q] = 1$. По лемме Бурхалла–Чаунди [1] любая пара коммутирующих обыкновенных скалярных дифференциальных операторов L и M связана некоторым полиномиальным соотношением $Q(L, M) = 0$, определяемым спектральной кривой $Q(\lambda, \mu) = 0$ пары коммутирующих операторов: $L\psi = \lambda\psi$, $M\psi = \mu\psi$, а общие собственные функции коммутирующих операторов задают r -мерное векторное расслоение над спектральной кривой (размерность r векторного расслоения общих собственных функций пары коммутирующих операторов над спектральной кривой называется *рангом коммутирующей пары операторов*; ранг пары коммутирующих операторов является общим делителем порядков этих коммутирующих операторов). Первые примеры коммутирующих обыкновенных скалярных дифференциальных операторов нетривиальных рангов 2 и 3 и нетривиального рода $g = 1$ были построены Диксмье [2] для неособой эллиптической спектральной кривой $\mu^2 = \lambda^3 - \alpha$, где α – произвольная ненулевая константа:

$$L = \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^2 + x^3 + \alpha \right)^2 + 2x, \quad (1)$$

$$M = \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^2 + x^3 + \alpha \right)^3 + 3x \left(\frac{d}{dx} \right)^2 + 3 \frac{d}{dx} + 3x(x^3 + \alpha) \quad (2)$$

– коммутирующая пара операторов Диксмье ранга 2 рода 1, $M^2 = L^3 - \alpha$, $[L, M] = 0$;

$$L = \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^3 + x^2 + \alpha \right)^2 + 2 \frac{d}{dx}, \quad (3)$$

$$M = \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^3 + x^2 + \alpha \right)^3 + 3 \left(\frac{d}{dx} \right)^4 + 3(x^2 + \alpha) \frac{d}{dx} + 3x \quad (4)$$

– коммутирующая пара операторов Диксмье ранга 3 рода 1, $M^2 = L^3 - \alpha$, $[L, M] = 0$. Эти замечательные примеры были получены Диксмье как коммутативные подалгебры алгебры

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 11-01-00197-а, 11-01-12067-офи-м-2011) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-4995-2012.1).

DOI: 10.4213/mzm9339

Вейля W_1 [2]. Общая классификация коммутирующих обыкновенных скалярных дифференциальных операторов нетривиальных рангов $r > 1$ была получена Кричевером [3]. Общий вид коммутирующих обыкновенных скалярных дифференциальных операторов ранга 2 для произвольной эллиптической спектральной кривой был найден Кричевером и Новиковым [4]. Выделение коммутирующих обыкновенных скалярных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами (коммутативных подалгебр алгебры Вейля W_1) является отдельной нетривиальной задачей, и полностью эта задача не решена даже для коммутирующих операторов Кричевера–Новикова ранга 2 рода 1, которые рационально параметризуются одной произвольной функцией (эта проблема была рассмотрена и изучена в [5], [6]). Мы также посвятим этому очень интересному вопросу отдельную статью. Функциональный параметр, отвечающий примеру Диксмье ранга 2 рода 1 среди всех коммутирующих операторов Кричевера–Новикова ранга 2 рода 1, найден Гриневичем [7]. Общий вид коммутирующих обыкновенных скалярных дифференциальных операторов ранга 3 для произвольной эллиптической спектральной кривой (общие коммутирующие операторы ранга 3 рода 1 параметризуются двумя произвольными функциями) был получен Моховым [8], [9], где также найдены функциональные параметры, отвечающие примеру Диксмье ранга 3 рода 1 среди всех коммутирующих операторов ранга 3 рода 1. Кроме того, для любого ранга r были построены примеры коммутирующих обыкновенных скалярных дифференциальных операторов рода 1 с полиномиальными коэффициентами (некоторые коммутативные подалгебры алгебры Вейля W_1) (см. также [10]). Отметим, что коэффициенты одного из пары коммутирующих операторов всегда выражаются полиномиально через коэффициенты второго оператора этой коммутирующей пары и их производные. Недавно Миронов [11] (см. также более ранние статьи [12]–[14]) построил для любого рода $g > 1$ замечательные примеры коммутирующих обыкновенных скалярных дифференциальных операторов рангов 2 и 3 с полиномиальными коэффициентами, естественно обобщающие примеры Диксмье рангов 2 и 3 рода 1:

$$L = \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^2 + x^3 + \alpha \right)^2 + g(g+1)x, \quad (5)$$

$$M^2 = L^{2g+1} + a_{2g}L^{2g} + \dots + a_1L + a_0, \quad (6)$$

где a_i – некоторые константы, α – произвольная ненулевая константа, L и M – коммутирующие операторы Миронова ранга 2 рода g (порядки операторов 4 и $4g+2$), коэффициенты оператора M выражаются полиномиально через коэффициенты оператора L и их производные, $[L, M] = 0$;

$$L = \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^3 + x^2 + \alpha \right)^2 + g(g+1)\frac{d}{dx}, \quad (7)$$

$$M^2 = L^{2g+1} + a_{2g}L^{2g} + \dots + a_1L + a_0, \quad (8)$$

где a_i – некоторые константы, α – произвольная ненулевая константа, L и M – коммутирующие операторы Миронова ранга 3 рода g (порядки операторов 6 и $6g+3$), коэффициенты оператора M выражаются полиномиально через коэффициенты оператора L и их производные, $[L, M] = 0$.

Построим примеры коммутирующих обыкновенных скалярных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами, отвечающих спектральной кривой произвольного рода g для произвольного четного ранга $r = 2k$, $k > 1$.

ТЕОРЕМА 1. *Операторы L и M порядков $4k$ и $4kg + 2k$ соответственно,*

$$L = \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^{2k} - 2x \left(\frac{d}{dx} \right)^k - k \left(\frac{d}{dx} \right)^{k-1} + \left(\frac{d}{dx} \right)^3 + x^2 + \alpha \right)^2 + g(g+1)\frac{d}{dx}, \quad (9)$$

$$M^2 = L^{2g+1} + a_{2g}L^{2g} + \dots + a_1L + a_0, \quad (10)$$

где a_i – некоторые константы, α – произвольная ненулевая константа, являются коммутирующими операторами ранга $r = 2k$, $k > 1$, рода g , $[L, M] = 0$, коэффициенты оператора M выражаются полиномиально через коэффициенты оператора L и их производные. При $k > 2$ коммутирующие операторы L и M имеют стандартный (канонический) вид.

Построим примеры коммутирующих обыкновенных скалярных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами, отвечающих спектральной кривой произвольного рода g для произвольного ранга вида $r = 3k$, $k \geq 1$.

ТЕОРЕМА 2. Операторы L и M порядков $6k$ и $6kg + 3k$ соответственно,

$$L = \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^{3k} - 3x \left(\frac{d}{dx} \right)^{2k} - 3k \left(\frac{d}{dx} \right)^{2k-1} + 3x^2 \left(\frac{d}{dx} \right)^k + 3kx \left(\frac{d}{dx} \right)^{k-1} + k(k-1) \left(\frac{d}{dx} \right)^{k-2} + \left(\frac{d}{dx} \right)^2 - x^3 + \alpha \right)^2 - g(g+1)x, \quad (11)$$

$$M^2 = L^{2g+1} + a_{2g}L^{2g} + \dots + a_1L + a_0, \quad (12)$$

где a_i – некоторые константы, α – произвольная ненулевая константа, являются коммутирующими операторами ранга $3k$, $k \geq 1$, рода g , $[L, M] = 0$, коэффициенты оператора M выражаются полиномиально через коэффициенты оператора L и их производные. При $k > 1$ коммутирующие операторы L и M имеют стандартный (канонический) вид.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J.L. Burchall, I.W. Chaundy, *Proc. London Math. Soc.* (2), **21** (1923), 420–440.
 [2] J. Dixmier, *Bull. Soc. Math. France*, **96** (1968), 209–242. [3] И. М. Кричевер, *Функц. анализ и его прил.*, **12:3** (1978), 20–31. [4] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *ДАН СССР*, **247:1** (1979), 33–37. [5] О. И. Mokhov, *International Conference on Algebra in Memory of A. I. Shirshov* (1921–1981), Reports on Theory of Rings, Algebras and Modules (Barnaul, USSR, 20–25 August 1991), 1991, 85. [6] О. И. Mokhov, *Third International Conference on Algebra in Memory of M. I. Kargapolov* (1928–1976) (Krasnoyarsk, Russia, 23–28 August 1993), Inopprof, Krasnoyarsk, 1993, 421. [7] П. Г. Гриневич, *Функц. анализ и его прил.*, **16:1** (1982), 19–24. [8] О. И. Мохов, *УМН*, **37:4(226)** (1982), 169–170. [9] О. И. Мохов, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53:6** (1989), 1291–1315. [10] P. Dehornoy, *Compositio Math.*, **43:1** (1981), 71–99. [11] А. Е. Mironov, *Self-Adjoint Commuting Differential Operators and Commutative Subalgebras of the Weyl Algebra*, arXiv:1107.3356. [12] А. Е. Миронов, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **6** (2009), 533–536. [13] А. Е. Миронов, *Функц. анализ и его прил.*, **39:3** (2005), 91–94. [14] А. Е. Миронов, *Матем. сб.*, **195:5** (2004), 103–114.

О. И. Мохов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: mokhov@mi.ras.ru,

mokhov@landau.ac.ru, mokhov@bk.ru

Поступило

31.01.2012