Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Иванов, С. А. Авдонин, Теорема Левина–Головина
для пространств Соболева, *Матем. заметки*, 2000, том 68,
выпуск 2, 163–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm934>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:35:32

УДК 517.88+517.54

ТЕОРЕМА ЛЕВИНА–ГОЛОВИНА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

С. А. Авдонин, С. А. Иванов

В работе получены достаточные условия базисности семейства экспонент $\{e^{i\lambda_n t} / (1 + |\lambda_n|^s)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ в пространстве Соболева $H^s(0, a)$ в терминах поведения порождающей функции – целой функции экспоненциального типа с нулями λ_n . Этот результат является обобщением теоремы Левина–Головина о базисности в $L^2(0, a)$ семейства экспонент, порожденного функцией типа синуса. Дано приложение доказанной теоремы к проблеме интерполяции целых функций экспоненциального типа, являющееся обобщением теоремы Котельникова–Шеннона в теории сигналов.

Библиография: 30 названий.

Семейства экспоненциальных функций $\{e^{i\lambda_k t}\}$ возникают в таких в различных областях математики, как теория несамосопряженных операторов (модель Нады–Фояша; [1], [2]); задача Редже в теории резонансного рассеяния [3], [4]; теория начально-краевых задач для уравнений в частных производных [5]–[7]; теория управления системами с распределенными параметрами [6]–[9]; теория сигналов [10]. Одним из центральных вопросов при этом является вопрос о базисности по Риссу семейства экспонент. В пространстве $L^2(0, a)$ эта проблема впервые рассматривалась в классической работе Пэли и Винера [11]. В [12] Левин предложил новый подход, введя порождающую функцию – целую функцию экспоненциального типа с нулями λ_n . В терминах порождающей функции окончательное решение было получено на основе подхода, предложенного Павловым [13]–[16].

Базисность семейств экспонент в соболевских пространствах $H^m(0, a)$ с целыми m впервые изучалась в работе Расселла [17]. В ней было доказано, что если семейство $\{e^{i\lambda_k t}\}$ образует базис Рисса в $L^2(0, a)$, то после добавления $m > 0$ экспоненциальных функций и перенормирования полученное семейство образует базис в $H^m(0, a)$. При отрицательных m для получения базисного семейства надо удалить $|m|$ экспонент. Базисность семейств экспонент в $H^s(0, a)$ при произвольных s рассматривалась в статье [18] для случая, когда λ_k^2 являются собственными значениями оператора Штурма–Лиувилля с гладким потенциалом, что является весьма ограничительным условием. В настоящей работе получены достаточные условия базисности в $H^s(0, a)$ семейства экспонент $\mathcal{E} := \{e^{\lambda_n t} / (1 + |\lambda_n|^s)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ в терминах поведения порождающей функции.

Этот результат является естественным обобщением теоремы Левина–Головина [12], [19], для формулировки которой введем следующее определение.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 97-01-01115, № 99-01-00744.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Целая функция F называется *функцией типа синуса*, если при некотором $a > 0$ функция F имеет экспоненциальный тип $a/2$ в верхней и нижней полуплоскостях, ее нули лежат в полосе, параллельной вещественной оси, и при некотором $h \in \mathbb{R}$ выполнено соотношение¹

$$|F(x + ih)| \asymp 1. \quad (1)$$

Будем далее называть множество $\{\lambda_n\}$ *отделимым*, если

$$\inf_{n \neq m} |\lambda_m - \lambda_n| > 0.$$

ТЕОРЕМА ЛЕВИНА–ГОЛОВИНА [12], [19]. *Если отделимое множество $\{\lambda_n\}$ является множеством нулей функции типа синуса экспоненциального типа $a/2$ и нули простые, то семейство $\{e^{i\lambda_n t}\}$ образует базис Рисса в $L^2(0, a)$.*

Эта теорема явилась первым результатом, дающим условия базисности семейства экспонент в терминах порождающей функции. Она оказала сильное стимулирующее влияние на дальнейшие исследования в этой области. Показателем ее важности является тот факт, что в литературе имеется несколько различных ее доказательств. Помимо первоначального [12], [19] известны доказательства Левина [20], Кацнельсона [21], Павлова [13]. Многочисленные применения этой теоремы в теории управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных, можно найти в [6], [7].

В [22] Хо изучал семейства экспонент, у которых $\operatorname{Im} \lambda_n$ логарифмически растет, а порождающая функция ведет себя в верхней полуплоскости как $|z|^m (1 + |z|^k e^{-\operatorname{Im} z})$ с целым m и натуральным k . Для этого случая доказана базисность семейства экспонент в некотором пространстве, лежащем между $H^m(0, 1)$ и $H^{m+k}(0, 1)$, причем доказательство не переносится на случай нецелых m .

В данной работе условие (1) заменено на степенное поведение порождающей функции:

$$|F(x + ih)| \asymp (1 + |x|)^s, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

при некотором вещественном s и доказано, что семейство $\mathcal{E}$ образует базис Рисса в $H^s(0, a)$. Отметим, что при целом s этот результат может быть легко получен из работы Расселла [17].

Схема доказательства этого утверждения (как и схема доказательства Хо) близка к схеме доказательства теоремы Левина–Головина, приведенного в [20].

Доказанный результат о базисности экспонент может быть сформулирован в терминах интерполяции в пространствах целых функций экспоненциального типа. Для функций, имеющих степенное поведение на вещественной оси, дается аналог теоремы Шеннона–Котельникова в теории сигналов.

Мы показываем также, что семейство экспонент, порожденное описанной выше функцией F , остается полным в пространстве $H^{s+1/2}(0, a)$ и минимальным в $H^{s-1/2+\varepsilon}(0, a)$ при любом $\varepsilon > 0$.

Во время работы над замечаниями рецензентов нам стало известно (Ю. Любарский, К. Сейп, частное сообщение), что получены результаты по интерполяции целых функций, содержащие, в частности, критерий базисности семейства экспонент в пространствах Соболева. Тем не менее, авторы полагают, что полезно иметь короткое доказательство для случая, когда порождающая функция имеет такое простое поведение, как (2). Полученный в работе результат уже использовался авторами в других работах при исследовании управляемости систем, описываемых волновым уравнением [23], [24].

¹Соотношение (1) означает существование положительных постоянных c и C таких, что $c \leq |F(x + ih)| \leq C$, $x \in \mathbb{R}$. Односторонние оценки такого рода мы будем обозначать знаками $\prec$ и $\succ$.

1. Основной результат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Классом $\mathcal{F}_s$, $s \in \mathbb{R}$, называется множество целых функций F таких, что

- 1) функция $e^{-iaz/2}F(z)$ имеет экспоненциальный тип $a/2$ в верхней и нижней полуплоскостях;
- 2) на некоторой прямой $\{x + ih\}_{x \in \mathbb{R}}$ выполнена оценка $|F(x + ih)| \asymp (1 + |x|)^s$;
- 3) множество нулей $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ функции F отделимо, нули простые и лежат в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq \operatorname{const}$.

Отметим, что при $s = 0$ функция $e^{-iaz/2}F$ является функцией типа синуса.

ТЕОРЕМА 1. Если $F \in \mathcal{F}_s$, то семейство

$$\mathcal{E} := \{e_n\}_{n=1}^\infty = \left\{ \frac{e^{i\lambda_n t}}{(1 + |\lambda_n|)^s} \right\}_{n=1}^\infty$$

образует базис Рисса в пространстве $H^s(0, a)$ при s , не являющемся отрицательным полуцелым, и в пространстве $[H_{00}^{m-1/2}(0, a)]'$ при $s = -m + 1/2$ с натуральным m .

Здесь $[H_{00}^{m-1/2}(0, a)]'$ – пространство, двойственное к $H_{00}^{m-1/2}(0, a)$ (определение см. в [25]). Как известно [25], это пространство состоит из распределений, лежащих в $H^{1/2-m}(\mathbb{R})$ с носителем в $[0, a]$. В частности, элементы f пространства $[H_{00}^{1/2}(0, a)]'$ могут быть представлены в виде (см. [25, с. 91])

$$f = f_0 + f_1, \quad f_0 \in H^{-1/2}(0, a), \quad \text{где } \sqrt{t(a-t)} f_1(t) \in L^2(0, a).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F \in \mathcal{F}_s$. Тогда

- 1) семейство $\mathcal{E}$ полно в $H^p(0, a)$ при $p \neq -m + 1/2$ с натуральным m (в пространстве $[H_{00}^{-p}(0, a)]'$ при $p = -m + 1/2$) тогда и только тогда, когда $p \leq s + 1/2$;
- 2) семейство $\mathcal{E}$ минимально в $H^p(0, a)$, $p \neq -m + 1/2$ (в $[H_{00}^{-p}(0, a)]'$ при $p = -m + 1/2$), тогда и только тогда, когда $p > s - 1/2$.

2. Свойства целых функций класса $\mathcal{F}_s$. Без ограничения общности можно считать, что множество нулей Λ лежит в полосе $0 < d < \operatorname{Im} z < D$, расположенной строго в верхней полуплоскости. Действительно, оператор умножения на функцию e^{ict} , переводящий $e^{i\lambda_n t}$ в $e^{i(\lambda_n + c)t}$, является, очевидным образом, изоморфизмом в пространствах $H^m(0, a)$ и $H_0^m(0, a)$. Следовательно, этот оператор является изоморфизмом в интерполяционных пространствах H^s, H_0^s при $s > 0$ и $H_{00}^{m-1/2}$, а также в двойственных к ним пространствах $H^s, [H^{-s}(0, a)]'$ при $s < 0$ и $[H_{00}^{m-1/2}]'$.

Следующая лемма описывает поведение функций из $\mathcal{F}_s$.

ЛЕММА 1. Для любой $F \in \mathcal{F}_s$ справедливы соотношения:

- а) при $\operatorname{Im} z > 0$ $|F(z)| \prec (1 + |z|)^s$;
- б) при $\operatorname{Im} z > D$ $|F(z)| \asymp (1 + |z|)^s$; при $\operatorname{Im} z \leq 0$ $|F(z)| \asymp e^{-a \operatorname{Im} z} (1 + |z|)^s$;
- в) в нулях λ_n верна оценка

$$|F'(\lambda_n)| \asymp (1 + |\lambda_n|)^s, \quad n \in \mathbb{N}; \quad (3)$$

- г) при $z = x + ih$, $h \in \mathbb{R}$, справедливо неравенство

$$|F'(z)| \prec (1 + |z|)^s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство утверждений а)–в) может быть проведено по той же схеме, что и для случая функций типа синуса, т.е. для случая $s = 0$ [12], [20].

Для доказательства г) воспользуемся обобщением неравенства Бернштейна на случай степенного поведения целых функций [26, теорема 3.1.5]: если F – функция экспоненциального типа a такая, что

$$\sup_x \left| \frac{F(z)}{(1 + |z|)^s} \right| < \infty, \quad z = x + iy,$$

то

$$\sup_x \left| \frac{F'(z)}{(1 + |z|)^s} \right| \leq a \sup_x \left| \frac{F(z)}{(1 + |z|)^s} \right|.$$

Утверждение г) теперь следует из а), б).

ЗАМЕЧАНИЕ. Известно [12], что для функций типа синуса соотношение $|F'(\lambda_n)| \asymp 1$, $n \in \mathbb{N}$, эквивалентно отделимости $\{\lambda_n\}$. Пусть функция экспоненциального типа удовлетворяет условию 2) определения 2 и ее нули лежат в полосе, параллельной вещественной оси. Тогда соотношение (3) эквивалентно отделимости множества нулей.

Для проверки этого утверждения можно воспользоваться приведенным выше обобщением неравенства Бернштейна и стандартными рассуждениями, использующими представление функции в окрестности ее нуля.

3. Пространства распределений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Через Φ_s обозначается пространство целых функций φ таких, что

- 1) $|\varphi(z)| \prec (1 + |e^{iaz}|)(1 + |z|)^s$, $z \in \mathbb{C}$;
- 2) $\varphi(x)/(1 + |x|)^s \in L^2(\mathbb{R})$.

Норма в Φ_s вводится формулой

$$\|\varphi\|_{\Phi_s} := \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{|\varphi(x)|^2}{(1 + |x|)^{2s}} dx \right]^{1/2}.$$

Легко видеть, что Φ_s является гильбертовым пространством относительно этой нормы.

Для распределения $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ с компактным носителем далее через $\hat{y}$ обозначается преобразование Фурье

$$\hat{y}(z) = \int_{\mathbb{R}} y(x) e^{ixz} dx.$$

Через R_s^* обозначим прообраз Φ_s при преобразовании Фурье.

ЛЕММА 2. *Справедливы соотношения*

$$R_s^* = \begin{cases} [H^s(0, a)]', & s \geq 0; \\ H_0^{-s}(0, a), & s < 0, \quad s \neq -m + 1/2, \quad m \in \mathbb{N}; \\ H_{00}^{-s}(0, a), & s = -m + 1/2, \quad m \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4)$$

Равенство понимается в том смысле, что функционалы из правой части (4) продолжены нулем на $\mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus [0, a])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из свойства 2) определения 3 непосредственно следует, что элементы R_s^* лежат в $H^{-s}(\mathbb{R})$. Поскольку элементы φ_s – целые функции, из свойства 1) этого же определения и теоремы Пэли–Винера имеем

$$R_s^* = \{y \in H^{-s}(\mathbb{R}) \mid \text{supp } y \subset [0, a]\}.$$

При $s \geq 0$ утверждение леммы следует из того факта, что $H^s(0, a)$ совпадает с сужением $H^s(\mathbb{R})$ на $[0, a]$ (см. [25, с. 56]). При $s < 0$, $s \neq -m + 1/2$, лемма следует из теоремы о продолжении нулем функций из $H^{-s}(0, a)$ на $\mathbb{R}$, а при $s = -m + 1/2$ – из описания пространств $H_{00}^{m-1/2}(0, a)$ (см. [25, с. 78, 85]).

Определим стандартным образом [25] пространства R_s , двойственные к R_s^* . Из леммы 2 имеем

$$R_s = \begin{cases} H^s(0, a), & s \neq -m + 1/2, m \in \mathbb{N}; \\ [H_{00}^{m-1/2}(0, a)]', & s = -m + 1/2, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

4. Доказательство теоремы 1. Докажем сначала, что семейство $\{F(z)/(z - \lambda_n)\}$ образует базис Рисса в Φ_s .

ЛЕММА 3. *Справедливы соотношения*

$$\sum_n \frac{|\varphi(\lambda_n)|^2}{(1 + |\lambda_n|)^{2s}} \prec \|\varphi\|_{\Phi_s}^2, \quad \varphi \in \Phi_s. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тем фактом, что отображение

$$\varphi(z) \mapsto \psi(z) := \frac{\varphi(z)}{(z + i)^s}$$

переводит функцию класса Φ_s в функцию, аналитическую в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ и квадратично суммируемую на вещественной оси, т.е. принадлежащую пространству Харди H_+^2 .

Поскольку множество Λ лежит в полосе в $0 < d < \text{Im } z < D$ и отделимо, то Λ – карлесово множество [2, с. 334], [6, с. 42], [7, с. 53], [27, с. 236]. Из карлесовости меры $\mu E = \sum_{\lambda_n \in E} 1$ с носителем на Λ мы имеем оценку

$$\sum_n |\psi(\lambda_n)|^2 \prec \|\psi\|_{H_+^2}^2,$$

которая дает (5).

ЛЕММА 4. *Для $\varphi \in \Phi_s$ ряд*

$$\sum_n \varphi(\lambda_n) \frac{F(z)}{F'(\lambda_n)(z - \lambda_n)} \quad (6)$$

равномерно сходится к $\varphi(z)$ на любом компакте.

Доказательство леммы проводится аналогично [19]. Мы приводим его для полноты изложения. Обозначим ряд (6) через $\tilde{\varphi}(z)$. При $z \notin \Lambda$

$$|\tilde{\varphi}(z)| \leq \left[\sum_n \left| \frac{\varphi(\lambda_n)}{F'(\lambda_n)} \right|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_n \frac{1}{|z - \lambda_n|^2} \right]^{1/2} |F(z)|. \quad (7)$$

В силу соотношения в) леммы 1 и леммы 3 первый ряд в (7) оценивается через $\|\varphi\|_{\Phi_s}^2$. Поскольку множество Λ отделимо, второй ряд в (7) сходится равномерно во всей комплексной плоскости вне ε -окрестности множества Λ . Так как любой компакт содержит лишь конечное число точек λ_n , мы имеем равномерную сходимость на любом компакте. Покажем, что ряд сходится к целой функции экспоненциального типа. Вне ε -окрестности множества Λ из (7) следует оценка $|\tilde{\varphi}| \prec |F(z)|$. Если z лежит в окрестности точки λ_k , то выделяем в (6) слагаемое, отвечающее λ_k , и для него из условия $\phi \in \Phi_s$ получаем неравенство

$$|\phi(\lambda_k)| \left| \frac{F(z)}{F'(\lambda_k)(z - \lambda_k)} \right| \prec (1 + |z|)^s \left| \frac{F(z)}{F'(\lambda_k)(z - \lambda_k)} \right|.$$

Используем представление $F(z)$ в окрестности U_k точки λ_k :

$$F(z) = F'(\theta)(z - \lambda_k), \quad \theta \in U_k.$$

Из оценки $F(\lambda_k)$ (соотношение в) леммы 1) и из обобщенного неравенства Бернштейна (соотношение г) леммы 1) следует, что $|F(z)/(F'(\lambda_k)(z - \lambda_k))| \prec 1$. Таким образом, для $\tilde{\varphi}$ во всей комплексной плоскости получаем оценку

$$|\tilde{\varphi}(z)| \prec |F(z)| + (1 + |z|)^s. \quad (8)$$

Следовательно, $\tilde{\varphi}$ – функция экспоненциального типа. Положим

$$\Psi(z) = \frac{\varphi(z) - \tilde{\varphi}(z)}{F(z)}. \quad (9)$$

Из равномерной сходимости ряда (5) имеем

$$\tilde{\varphi}(z) \xrightarrow{z \rightarrow \lambda_n} \varphi(\lambda_n),$$

поэтому Ψ – целая функция. Лемма будет проверена, если мы покажем, что функция Ψ тождественно равна 0. Как видно из (9), Ψ является отношением двух функций экспоненциального типа. Следовательно, Ψ является функцией не более чем экспоненциального типа [28].

Ввиду соотношений а), б) леммы 1 при $\text{Im } z < 0$ и $\text{Im } z > D$ функция $\Psi(z)$ ограничена в силу (8). Мы получили целую функцию экспоненциального типа, ограниченную вне полосы и, следовательно, постоянную.

Определим $\chi(z) := e^{-iaz}\varphi(z)/(z - i)^s$, выбрав аналитическую в $\mathbb{C}_-$ ветвь корня. Поскольку $\chi \in H_-^2$, то $\chi(z) \xrightarrow{\text{Im } z \rightarrow -\infty} 0$ [27, с. 139]. Тогда в силу соотношения б) леммы 1 получаем

$$\left| \frac{\varphi(-iy)}{F(-iy)} \right| = \left| \chi(-iy) \frac{(1+y)^s e^{ay}}{F(-iy)} \right| \prec |\chi(-iy)| \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0.$$

Из (7) следует, что и $\tilde{\varphi}(-iy)/F(-iy) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0$. Следовательно, $\Psi(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -i\infty$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Семейство $\{f_n\} := \{F(z)/(z - \lambda_n)\}$ образует базис Рисса в Φ_s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из карлесоновости множества Λ следует, что семейство дробей $1/(z - \lambda_n)$ образует базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки в H_-^2 [2, с. 328]. В силу теоремы Бари (см., например, [2]) это означает справедливость оценок

$$\left\| \sum \frac{b_n}{z - \lambda_n} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \asymp \sum |b_n|^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \sum b_n \frac{F(z)}{z - \lambda_n} \right\|_{\Phi_s}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \sum b_n \frac{1}{x - \lambda_n} \right|^2 \left| \frac{F(x)}{(1 + |x|)^s} \right|^2 dx \\ &\asymp \int_{\mathbb{R}} \left| \sum b_n \frac{1}{x - \lambda_n} \right|^2 dx \asymp \sum |b_n|^2. \end{aligned}$$

Полученное соотношение доказывает, что $\{f_n\}$ образует базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки в Φ_s .

Для доказательства леммы осталось проверить полноту $\{f_n\}$. Возьмем $\varphi \in \Phi_s$. В силу леммы 3 и соотношения в) леммы 1 последовательность $\{\varphi(\lambda_n)/F'(\lambda_n)\}$ квадратично суммируема. Поэтому, используя полученное свойство базисности $\{f_n\}$, заключаем, что ряд

$$\tilde{\varphi}(z) := \sum \frac{\varphi(\lambda_n)F(z)}{F'(\lambda_n)(z - \lambda_n)}$$

сходится в Φ_s . Из сходимости в Φ_s следует поточечная сходимость (как это имеет место в пространствах Харди). По лемме 4 ряд $\tilde{\varphi}(z)$ поточечно сходится к $\varphi(z)$ и, следовательно, $\tilde{\varphi} = \varphi$.

Перейдем к заключительной части доказательства теоремы. Рассмотрим в R_s^* семейство $\{y_n\}$ такое, что преобразование Фурье элемента y_n дает f_n , т.е. $\hat{y}_n = f_n$. Поскольку преобразование Фурье изометрически отображает R_s^* на Φ_s , то $\{y_n\}$ – базис Рисса в R_s^* . Покажем, что семейство $\{e^{i\lambda_n t}/F'(\lambda_n)\}$ является дуальным к $\{y_n\}$ и, значит, также образует базис Рисса. Действительно, при $m \neq n$

$$\left\langle y_n, \frac{e^{i\lambda_m t}}{F'(\lambda_m)} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} y_n(t) \frac{e^{i\lambda_m t}}{F'(\lambda_m)} dt = \frac{\hat{y}_n(\lambda_m)}{F'(\lambda_m)} = \frac{F(\lambda_m)}{\lambda_m - \lambda_n} \frac{1}{F'(\lambda_m)} = 0. \quad (10)$$

Поскольку $\hat{y}_n(\lambda_n) = F'(\lambda_n)$, то

$$\left\langle y_n, \frac{e^{i\lambda_n t}}{F'(\lambda_n)} \right\rangle = 1. \quad (11)$$

В силу соотношения в) леммы 1 имеем $|F'(\lambda_n)| \asymp (1 + |\lambda_n|)^s$. Теорема 1 доказана.

5. Интерполяция в пространстве Φ_s . Будем называть множество $\Lambda = \{\lambda_n\}$ *интерполяционным множеством в пространстве Φ_s* , если для любой последовательности $\{c_n\}$ такой, что $\sum |c_n|^2 / (1 + |\lambda_n|^s)^2 < \infty$, найдется функция $\varphi \in \Phi_s$, удовлетворяющая равенствам $\varphi(\lambda_n) = c_n$. Интерполяционное множество Λ будем называть *полным*, если

$$\|\varphi\|_{\Phi_s}^2 \asymp \sum \frac{|\varphi(\lambda_n)|^2}{(1 + |\lambda_n|^s)^2}.$$

В теории информации важную роль играет теорема Уиттекера–Котельникова–Шеннона (историю вопроса можно найти в [29]). Эта теорема говорит о том, что множество $\mathbb{Z}$ является полным интерполяционным множеством для пространства PW (Пэли–Винера) – пространства целых функций экспоненциального типа, не превышающего π , квадратично суммируемых на вещественной оси. В случае $a = 2\pi$ пространство PW получается из Φ_0 умножением каждой функции на e^{ipz} . Связь интерполяции и свойства семейства экспонент образовывать базис Рисса известна с работы [1] (см. также [10]).

Теорема 1 влечет следующий результат об интерполяции для шкалы пространств целых функций.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ есть множество нулей функции $F \in \mathcal{F}_s$. Тогда Λ есть полное интерполяционное множество пространства Φ_s , и представление $\varphi \in \Phi_s$ через $\varphi(\lambda_n)$ дается формулой (6).

6. Доказательство теоремы 2. Если $\mathcal{E}$ – базис Рисса в R_s , то семейство $\mathcal{E}^{s+1} := \{e^{i\lambda_n t} / (1 + |\lambda_n|)^{s+1}\} \cup \{e^{i\mu t}\}$, $\mu \notin \Lambda$, образует базис Рисса в R_{s+1} , поскольку спектр этого семейства $\Lambda \cup \{\mu\}$ является множеством нулей функции $F(z)(z - \mu) =: F_{s+1}(z)$, принадлежащей $\mathcal{F}_{s+1}$. Следовательно, исходное семейство $\mathcal{E}$ имеет в R_{s+1} дефект, равный 1. Обозначим через y_μ элемент семейства, дуального к $\mathcal{E}^{s+1}$, равный нулю на $\mathcal{E}$. Из (10), (11) следует, что

$$\hat{y}_\mu(z) = \frac{F_{s+1}(z)}{z - \mu} = F(z). \quad (12)$$

Для $s \leq p \leq s + 1$ определим пространства

$$\mathcal{H}_p := \text{Cl}_{R_p} \{f \in C^\infty[0, a] \mid \langle y_\mu, f \rangle = 0\}.$$

Несложно проверить, что для $s \leq p \leq s + 1$ семейство $\mathcal{E}$ полно в $\mathcal{H}_p$.

Докажем утверждение теоремы 2 о полноте. Если функционал y_μ ограничен в R_p , то, очевидно, $\mathcal{H}_p$ есть подпространство R_p коразмерности 1. Используя стандартные рассуждения, нетрудно показать, что неограниченность y_μ в R_p влечет равенство $\mathcal{H}_p$ и R_p . Поэтому $\mathcal{E}$ будет полно в R_p тогда и только тогда, когда y_μ – неограниченный функционал над R_p .

Из (12) следует, что $y_\mu \in R_p^*$ (что эквивалентно $\hat{y}_\mu \in \Phi_p$) в том и только том случае, когда

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|F(x)|^2}{(1 + |x|)^{2p}} dt < \infty,$$

т.е. при $p > s + 1/2$. Утверждение теоремы 2 о полноте доказано.

Для исследования минимальности воспользуемся соотношениями (10), (11), записанными в виде

$$\left\langle y_n, \frac{e^{i\lambda_m t}}{F'(\lambda_m)} \right\rangle = \delta_{mn}. \quad (13)$$

Это равенство понимается как значения преобразования Фурье в точках λ_m . Если $y_n \in R_p^*$, то (13) может рассматриваться как соотношение двойственности R_p и R_p^* . Условие $y_n \in R_p^*$ означает в силу формулы для дуального семейства, что

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{F(x)}{x - \lambda_n} \right|^2 \frac{1}{(1 + |x|)^{2p}} dx < \infty,$$

т.е. $p > s - 1/2$. Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Метод доказательства теоремы 2 может быть использован и в других ситуациях. Пусть $\mathcal{E} = \{e_n\}$, $e_n = e^{i\lambda_n t}$, — полное и минимальное в $L^2(0, a)$ семейство. Тогда существует порождающая функция $F(z)$ с нулями $\{\lambda_n\}$, которая является целой функцией экспоненциального типа. С функцией F свяжем характеристическое число

$$s_{\Lambda} := \inf \left\{ s \mid \int_{\mathbb{R}} \frac{|F(x)|^2}{(1 + |x|)^{2s}} dx < \infty \right\}.$$

Известно [30], что полнота $\mathcal{E}$ в $L^2(0, a)$ влечет соотношение

$$\int |F(x)|^2 dx = \infty,$$

а минимальность в свою очередь, влечет соотношение

$$\int \frac{|F(x)|^2}{(1 + |x|)^2} dx < \infty \quad (14)$$

(см. [11]). Поэтому $s_{\Lambda} \in [0, 1]$.

С функцией F свяжем также функционал l_{Λ} , преобразование Фурье $\hat{l}_{\Lambda}$ которого совпадает с F . В силу (14) $l_{\Lambda} \in H^{-1}(\mathbb{R})$ и, следовательно, l_{Λ} ограничен на $H^1(0, 1)$. Поскольку $\langle l_{\Lambda}, e_n \rangle = F(\lambda_n) = 0$, то $l_{\Lambda}|_{\mathcal{E}} = 0$. Следуя рассуждениям, приведенным в доказательстве теоремы 2, получаем, что семейство $\mathcal{E}$ полно в R_s при $s < s_{\Lambda}$ и неполно при $s > s_{\Lambda}$; $\mathcal{E}$ минимально в R_s при $s > s_{\Lambda} - 1$ и переполнено (неминимально) при $s < s_{\Lambda} - 1$. Если интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|F(x)|^2}{1 + |x|^{2s_{\Lambda}}} dx$$

конечен, то $\mathcal{E}$ неполно в $R_{s_{\Lambda}}$ и минимально в $R_{s_{\Lambda}-1}$. Если этот интеграл расходится, то $\mathcal{E}$ полно в $R_{s_{\Lambda}}$ и неминимально в $R_{s_{\Lambda}-1}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Никольский Н. К., Павлов Б. С. Базисы из собственных векторов неунитарных сжатий и характеристическая функция // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. № 1. С. 90–133.
- [2] Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980.
- [3] Павлов Б. С. О совместной полноте сжатия и его сопряженного // Проблемы математической физики. Вып. 5. Л., 1971. С. 101–112.
- [4] Иванов С. А., Павлов Б. С. Карлесоновские серии резонансов в задаче Редже // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. № 1. С. 26–55.
- [5] Lasiecka I., Lions J. L., Triggiani R. Nonhomogeneous boundary value problem for second order hyperbolic operator // J. Math. Pures Appl. 1986. V. 65. P. 149–192.

- [6] Авдонин С. А., Иванов С. А. Управляемость систем с распределенными параметрами и семейства экспонент. Киев: УМК ВО, 1989.
- [7] Avdonin S. A., Ivanov S. A. Families of Exponentials. The Method of Moments in Controllability Problems for Distributed Parameter Systems. New York: Cambridge Univ. Press, 1995.
- [8] Бутковский А. Г. Методы теории оптимального управления распределенными системами. М.: Наука, 1975.
- [9] Russell D. L. Nonharmonic Fourier series in the control theory of distributed parameter systems // J. Math. Anal. 1967. V. 18. № 3. P. 542–559.
- [10] Seip K. On the connection between exponential bases and certain related sequences in $L^2(-\pi, \pi)$ // J. Funct. Anal. 1995. V. 130. № 1. P. 131–160.
- [11] Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964.
- [12] Левин Б. Я. О базисах Рисса из показательных функций в L^2 // Записки мат. отделения физ. ф-та Харьковского ун-та и Харьковского матем. общества. Сер. 4. 1961. Т. 27. С. 39–48.
- [13] Павлов Б. С. Спектральный анализ дифференциального оператора с размазанным граничным условием // Проблемы математической физики. Вып. 6. Л., 1973. С. 101–119.
- [14] Павлов Б. С. Базисность системы экспонент и условие Макенхаупта // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. № 1. С. 37–40.
- [15] Hruščev S. V., Nikol'skii N. K., Pavlov B. S. Unconditional bases of exponentials and reproducing kernels // Complex Analysis and Spectral Theory. Lecture Notes in Math. V. 864. Berlin–Heidelberg: Springer, 1981. P. 214–335.
- [16] Минкин А. М. Отражение показателей и безусловные базисы из экспонент // Алгебра и анализ. 1992. Т. 3. С. 1043–1068.
- [17] Russell D. L. On exponential bases for the Sobolev spaces over an interval // J. Math. Anal. Appl. 1982. V. 87. № 2. P. 528–550.
- [18] Narukawa K., Suzuki T. Nonharmonic Fourier series and its applications // Appl. Math. Optim. 1986. V. 14. P. 249–264.
- [19] Головин В. Д. О биортогональных разложениях в L^2 по линейным комбинациям показательных функций // Записки мех. ф-та ХГУ и Харьковского матем. общества. 1964. Т. 30. С. 18–24.
- [20] Левин Б. Я. Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа // Тр. физ.-техн. института низких температур АН УССР Харьковского матем. общества. 1969. Вып. 1. С. 136–146.
- [21] Кацнельсон В. Э. Базисы из экспоненциальных функций в пространстве L^2 // Функцион. анализ и его прилож. 1971. Т. 5. № 1. С. 37–74.
- [22] Ho L. P. Uniform basis properties of exponential solutions of functional differential equations of retarded type // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Ser. A. 1984. V. 96. P. 79–94.
- [23] Avdonin S. A., Ivanov S. A. Controllability types of a circular membrane with rotationally symmetric data // Control and Cybernetics. (to appear).
- [24] Avdonin S. A., Ivanov S. A., Russell D. L. Exponential bases in Sobolev spaces in control and observation problems // Optimal Control of Partial Differential Equations / ed. K.-H. Hoffmann, G. Leugering, Tröltzsch. Birkhäuser (to appear).
- [25] Лионс Ж. Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
- [26] Ибрагимов И. И. Теория приближения целыми функциями. Баку: ЭЛМ, 1979.
- [27] Кусис Р. Введение в теорию пространств H^p . М.: Мир, 1984.
- [28] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
- [29] Higgins J. R. Five short stories about the cardinal series // Bull. Amer. Math. Soc. 1985. V. 12. P. 45–89.
- [30] Levinson N. Gap and Density Theorems. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. V. 26. Providence (R.I.), 1940.