Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Смирнов, Периодические двухфазные “волны-убийцы”, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 6, 871–883

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9343>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 18:20:04

Периодические двухфазные “волны-убийцы”

А. О. Смирнов

Построено семейство периодических по x и z двухзонных решений фокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера. Найдено условие, при котором двухзонные решения имеют поведение периодических “волн-убийц”.

Библиография: 34 названия.

DOI: 10.4213/mzm9343

Введение. В последнее время большое внимание стали привлекать к себе “волны-убийцы” (rogue waves) или “странные волны” (freak waves) [1]. Эти волны представляют собой локальный кратковременный рост амплитуды или “волны, появляющиеся ниоткуда и исчезающие без следа” [2]. Отметим, что появился ряд статей, посвященных симметричным конфигурациям “странных волн” [3], [4], несмотря на то, что возникновение в океане циклически расположенных “волн-убийц” кажется невероятным событием. Данные симметричные конфигурации являются частными случаями общих “многоугольных” решений [5]–[8] при специальных значениях параметров. В настоящей работе мы строим периодическое по обеим действительным переменным решение, описывающее “странные волны” с двумя пиками на прямоугольнике периодов. Основные области применения “странных волн” – это гидродинамика и нелинейная оптика. Поскольку в гидродинамике появление волн, изображенных на рис. 6, вряд ли возможно, то предполагаемая область приложения периодических “странных волн” – это нелинейная оптика, где можно ставить задачу о возбуждении периодически расположенных “световых точек”.

Обычно при изучении “странных волн” в главном приближении рассматривают фокусирующее нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ)

$$i\psi_z + \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi = 0, \quad (1)$$

и анализируют рациональные решения, получающиеся в результате преобразования Дарбу [3]–[8]. Точные решения, отличающиеся от рациональных, упоминаются довольно редко. При учете более тонких эффектов [9]–[15] уравнения отличаются от НУШ дополнительными слагаемыми, чаще всего приводящими к неинтегрируемости уравнения и, соответственно, к невозможности построения некоторых классов решений. Вместе с тем, существуют ситуации, когда этими дополнительными слагаемыми можно пренебречь [11], ограничить свое рассмотрение уравнением (1), которое является интегрируемым, и рассмотреть присущие интегрируемым уравнениям классы решений (в частности, многофазные периодические решения).

Для построения многофазных решений используется метод “конечнозонного (алгебро-геометрического) интегрирования”, становление которого связано, прежде всего, с именами Дубровина, Новикова, Лакса, Матвеева, Итса и Кричевера (см., например, [16]–[22]). Формулы для общего многофазного решения уравнения (1), найденные в то время, и основные используемые понятия приводятся в п. 1 настоящей статьи. Желающие более подробно ознакомиться с историей возникновения метода конечнозонного интегрирования могут обратиться к статье [23].

С начала 80-х в рамках метода “конечнозонного интегрирования” в работах Белоголоса, Энольского, Бабица, Бобенко, Матвеева и автора начал развиваться метод редукции g -зонных решений интегрируемых нелинейных уравнений к решениям, выражающимся через тэта-функции меньшей размерности (см., например, [24] и библиографию там). Одна из теорем, доказанная в то время автором [25], используется в п. 2 статьи для построения в эллиптических функциях семейства периодических двухфазных решений уравнения (1). Изображения решений, построенных в п. 2 при различных значениях параметров спектральной кривой, приведены в конце статьи.

В п. 3 статьи обсуждаются вопросы, связанные с возникновением пиков у двухфазных решений, и принципы построения периодических на плоскости решений, у которых на параллелограмме периодов находится группа пиков.

1. Конечнозонные решения фокусирующего НУШ. Фокусирующее нелинейное уравнение Шрёдингера (1) может быть получено из “расщепленного” нелинейного уравнения Шрёдингера (рНУШ)

$$\begin{cases} i\psi_z + \psi_{xx} - 2\psi^2\phi = 0, \\ i\phi_z - \phi_{xx} + 2\psi\phi^2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

редукцией $\phi = -\psi^*$. В свою очередь, рНУШ может быть получено как условие совместности следующей системы линейных уравнений:

$$R_x = \mathfrak{U}R, \quad (3)$$

$$R_z = \mathfrak{V}R, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} &= -i\lambda\sigma_3 + \begin{pmatrix} 0 & i\psi \\ -i\phi & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad i^2 = -1, \\ \mathfrak{V} &= 2\lambda\mathfrak{U} + \begin{pmatrix} -i\psi\phi & -\psi_x \\ -\phi_x & i\psi\phi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Конечнозонные решения системы (2) строятся по гиперэллиптической кривой $\Gamma = \{(w, \lambda)\}$ рода g [22], [24], [26], [27]:

$$\Gamma : w^2 = \prod_{j=1}^{2g+2} (\lambda - \lambda_j),$$

точки ветвления которой $\lambda = \lambda_j$, $j = 1, \dots, 2g + 2$, являются краями зон спектра оператора Дирака (3). Бесконечно удаленной точке спектра соответствуют две различные точки $\mathcal{P}_\infty^\pm$ кривой Γ . В случае $\phi = -\psi^*$ кривая Γ имеет вид [22], [24]

$$\Gamma : w^2 = \prod_{j=1}^{g+1} (\lambda - \lambda_j)(\lambda - \bar{\lambda}_j), \quad \text{Im } \lambda_j \neq 0. \quad (5)$$

Следуя стандартной процедуре построения конечнозонных решений [24], выберем на Γ канонический базис циклов $\gamma^t = (a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$ с матрицей индексов пересечения

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Ему соответствует нормированный базис голоморфных дифференциалов

$$\oint_{a_k} d\mathcal{U}_j = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, g. \quad (6)$$

Хорошо известно, что матрица периодов кривой Γ

$$B_{kj} = \oint_{b_k} d\mathcal{U}_j, \quad k, j = 1, \dots, g, \quad (7)$$

есть симметричная матрица с положительно определенной мнимой частью.

Построим по матрице периодов g -мерную тэта-функцию с характеристиками $\eta, \zeta \in \mathbb{R}^g$ [22], [28]:

$$\begin{aligned} \Theta[\eta^t; \zeta^t](\mathbf{p}|B) &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^g} \exp\{\pi i(\mathbf{m} + \eta)^t B(\mathbf{m} + \eta) + 2\pi i(\mathbf{m} + \eta)^t(\mathbf{p} + \zeta)\}, \\ \Theta[\mathbf{0}^t; \mathbf{0}^t](\mathbf{p}|B) &\equiv \Theta(\mathbf{p}|B), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^g$, суммирование проходит по целочисленной g -мерной решетке.

Определим также на Γ нормированные абелевы интегралы второго – $\Omega_1(\mathcal{P})$, $\Omega_2(\mathcal{P})$, и третьего – $\omega_0(\mathcal{P})$, рода с асимптотикой в бесконечно удаленных точках $\mathcal{P}_\infty^\pm$:

$$\begin{aligned} \oint_{a_k} d\Omega_1 &= \oint_{a_k} d\Omega_2 = \oint_{a_k} d\omega_0 = 0, & k &= 1, \dots, g, \\ \Omega_1(\mathcal{P}) &= \pm i(\lambda - K_1 + O(\lambda^{-1})), & \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm, \\ \Omega_2(\mathcal{P}) &= \mp i(2\lambda^2 + K_2 + O(\lambda^{-1})), & \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm, \\ \omega_0(\mathcal{P}) &= \mp (\ln \lambda - \ln K_0 + O(\lambda^{-1})), & \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm, \\ w &= \pm(\lambda^{g+1} + O(\lambda^g)), & \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm. \end{aligned}$$

Обозначим через $2\pi i\mathbf{U}$, $2\pi i\mathbf{V}$ векторы b -периодов абелевых интегралов второго рода $\Omega_1(\mathcal{P})$, $\Omega_2(\mathcal{P})$ соответственно.

ТЕОРЕМА 1 [24]. *Функция*

$$Y(\mathcal{P}, x, z) = \begin{pmatrix} y_1(\mathcal{P}, x, z) & y_1(\tau_0 \mathcal{P}, x, z) \\ y_2(\mathcal{P}, x, z) & y_2(\tau_0 \mathcal{P}, x, z) \end{pmatrix}$$

где τ_0 – гиперэллиптическая инволюция, $\tau_0: (w, \lambda) \rightarrow (-w, \lambda)$,

$$\begin{aligned} y_1(\mathcal{P}, x, z) &= \frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) + \mathbf{U}x + \mathbf{V}z - \mathbf{X})\Theta(\mathbf{Z})}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathbf{X})\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{Z})} \\ &\quad \times \exp\{\Omega_1(\mathcal{P})x + \Omega_2(\mathcal{P})z + i\Phi(x, z)\}, \\ y_2(\mathcal{P}, x, z) &= \rho \frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) + \mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{\Delta} - \mathbf{X})\Theta(\mathbf{Z} - \mathbf{\Delta})}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathbf{X})\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{Z})} \\ &\quad \times \exp\{\Omega_1(\mathcal{P})x + \Omega_2(\mathcal{P})z - i\Phi(x, z) + \omega_0(\mathcal{P})\}, \end{aligned} \quad (9)$$

при любом $\rho \neq 0$ и при любых z будет являться собственной функцией оператора Дирака (3) с потенциалом

$$\begin{aligned} \psi(x, z) &= \frac{2K_0}{\rho} \frac{\Theta(\mathbf{Z})\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{Z} - \mathbf{\Delta})}{\Theta(\mathbf{Z} - \mathbf{\Delta})\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{Z})} \exp\{2i\Phi(x, z)\}, \\ \phi(x, z) &= 2\rho K_0 \frac{\Theta(\mathbf{Z} - \mathbf{\Delta})\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{Z} + \mathbf{\Delta})}{\Theta(\mathbf{Z})\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{Z})} \exp\{-2i\Phi(x, z)\}, \end{aligned} \quad (10)$$

удовлетворяющим НУШ (2). Здесь $\mathbf{\Delta}$ – вектор абелевых голоморфных интегралов, вычисленных вдоль пути, соединяющего точки $\mathcal{P}_\infty^-$ и $\mathcal{P}_\infty^+$ и не пересекающего ни один из базисных циклов,

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta} &= \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-), & \Phi(x, z) &= K_1x + K_2z, \\ \mathbf{X} &= \mathcal{K} + \sum_{j=1}^g \mathcal{U}(\mathcal{P}_j), & \mathbf{Z} &= \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{X}, \end{aligned}$$

$\mathcal{K}$ – вектор римановых констант [22], [28]–[30]; $\mathcal{P}_j$, $j = 1, \dots, g$, – неспециальный дивизор.

Из (10) следует, что для фокусирующего НУШ выполняются равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \mathbf{Z} &= 0, \\ |\psi|^2 &= -4K_0^2 \frac{\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{Z} - \mathbf{\Delta})\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{Z} + \mathbf{\Delta})}{\Theta^2(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{Z})}. \end{aligned} \quad (11)$$

2. Решение, построенное по кривой с инволюцией. Построим двухфазное (двухзонное) решение по кривой $\Gamma_2 = \{(w, \lambda)\}$ рода $g = 2$:

$$\Gamma_2: w^2 = (\lambda^2 + c^2)(\lambda^4 + 2(b^2 - a^2)\lambda^2 + (a^2 + b^2)^2), \quad (12)$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Выберем на ней базис циклов, как показано на рис. 1, и базис нормированных голоморфных дифференциалов:

$$d\mathcal{U}_j = \frac{(c_{j1}\lambda + c_{j2}) d\lambda}{w}.$$

Нетрудно видеть, что на Γ_2 определена инволюция

$$\tau: (w, \lambda) \rightarrow (-w, -\lambda),$$

Рис. 1. Базис циклов на кривой Γ_2

преобразующая базис циклов по формуле

$$\hat{\tau} \mathbf{a} = M \mathbf{a}, \quad \hat{\tau} \mathbf{b} = (M^t)^{-1} \mathbf{b} + L \mathbf{a},$$

где

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица периодов кривой Γ_2 удовлетворяет уравнению

$$B = M^t B M - M^t L$$

и имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 2i\mathbf{b}_1 & -\frac{1}{2} + i\mathbf{b}_1 \\ -\frac{1}{2} + i\mathbf{b}_1 & i\mathbf{b}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_j \in \mathbb{R}.$$

Применяя матричную версию теоремы Аппеля [25], получаем, что тэта-функция Римана (8), построенная по матрице периодов кривой Γ_2 , может быть представлена в виде суммы из двух слагаемых, каждое из которых является произведением одномерных тэта-функций:

$$\begin{aligned} \Theta(\mathbf{p}|B) &= \Theta(p_1 - 2p_2|2 + 4i\mathbf{b}_2 - 2i\mathbf{b}_1) \Theta(p_1|2i\mathbf{b}_1) \\ &\quad - i\Theta\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right](p_1 - 2p_2|2 + 4i\mathbf{b}_2 - 2i\mathbf{b}_1) \Theta\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right](p_1|2i\mathbf{b}_1) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Theta(\mathbf{p}|B) &= \vartheta_3(p_1 - 2p_2|2 + 4i\mathbf{b}_2 - 2i\mathbf{b}_1) \vartheta_3(p_1|2i\mathbf{b}_1) \\ &\quad + \vartheta_1(p_1 - 2p_2|2 + 4i\mathbf{b}_2 - 2i\mathbf{b}_1) \vartheta_1(p_1|2i\mathbf{b}_1), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\vartheta_3(p|b) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{\pi i b m^2} \cos(2m\pi p),$$

$$\vartheta_1(p|b) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m e^{\pi i b (m+1/2)^2} \sin((2m+1)\pi p)$$

суть эллиптические функции Якоби [31].

Для вычисления параметров решения воспользуемся тем фактом, что инвариантность Γ_2 относительно инволюций τ_0 и τ приводит к наличию накрывающих отображений

$$\sigma_+ : \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2^+ = \Gamma_2 / \tau \tau_0, \quad \sigma_- : \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2^+ = \Gamma_2 / \tau.$$

Кривые Γ_2^+ (рис. 2) и Γ_2^- (рис. 3) задаются следующими равенствами:

$$\Gamma_2^+ : \chi_+^2 = (t + c^2)P_2(t), \quad \Gamma_2^- : \chi_-^2 = t(t + c^2)P_2(t),$$

где

$$P_2(t) = t^2 + 2(b^2 - a^2)t + (a^2 + b^2)^2, \quad (14)$$

$$t = \lambda^2, \quad \chi_+ = w, \quad \chi_- = w\lambda, \quad (15)$$

$$\frac{dt}{\chi_+} = \frac{2\lambda d\lambda}{w}, \quad \frac{dt}{\chi_-} = \frac{2d\lambda}{w}.$$

Рис. 2. Кривая Γ_2^+

Из равенств (14) вытекает, что накрывающие отображения $\sigma_{\pm}$ порождают следующие отображения между базами циклов:

$$\hat{\sigma}_+ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ b_+ \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_- \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_- \\ b_- \end{pmatrix},$$

$$\hat{\sigma}_+ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ b_+ \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_- \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_- \\ b_- \end{pmatrix}. \quad (16)$$

 Рис. 3. Кривая Γ_2^-

Из соотношений (15), (16) следует, что матрица коэффициентов нормированных голоморфных дифференциалов $d\mathcal{U}_j$ равна

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{i}{A_+} & 0 \\ -\frac{i}{2A_+} & -\frac{i}{2A_-} \end{pmatrix},$$

где

$$A_+ = \int_{-\infty}^{-c^2} \frac{dt}{\sqrt{-(t+c^2)P_2(t)}}, \quad A_- = \int_{-c^2}^0 \frac{dt}{\sqrt{-t(t+c^2)P_2(t)}}.$$

Вычисляя матрицу периодов кривой Γ_2 , имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_1 &= \frac{B_+}{2A_+}, & \mathfrak{b}_2 &= \frac{B_+}{4A_+} + \frac{B_-}{4A_-}, \\ \mathfrak{b}_+ &= 2\mathfrak{b}_1 = \frac{B_+}{A_+}, & \mathfrak{b}_- &= 4\mathfrak{b}_2 - 2\mathfrak{b}_1 = \frac{B_-}{A_-}, \end{aligned}$$

где $B_- = B_-^1 + B_-^2$,

$$\begin{aligned} B_-^1 &= \int_{-\infty}^{-c^2} \frac{dt}{\sqrt{t(t+c^2)P_2(t)}}, & B_-^2 &= \int_0^{-\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(t+c^2)P_2(t)}}, \\ B_+ &= \int_{-c^2}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(t+c^2)P_2(t)}}. \end{aligned}$$

В этих обозначениях координаты вектора Δ и связанные с ним сдвиги фаз решения δ_j равны

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} - i\delta_1, \quad \Delta_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}, \quad \delta_1 = \frac{B_+}{2A_+}, \quad \delta_2 = \frac{B_-^2 - B_-^1}{2A_-}.$$

Выражая гиперэллиптический интеграл $\omega_0(\mathcal{P})$ через эллиптические и вычисляя его асимптотику, получаем, что выполняется равенство

$$K_0^2 = \exp \left\{ \pi i + D_- \delta_2 + \frac{1}{2} (F_-^1 + F_-^2) \right\},$$

где

$$\begin{aligned} D_- &= \int_{-c^2}^0 \frac{t dt}{\sqrt{-t(t+c^2)P_2(t)}}, \\ F_-^1 &= \ln r - \int_{c^2}^r \frac{t dt}{\sqrt{t(t-c^2)P_2(-t)}} + \int_r^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{\sqrt{t(t-c^2)P_2(-t)}} \right) dt, \\ F_-^2 &= \ln r - \int_0^r \frac{t dt}{\sqrt{t(t+c^2)P_2(t)}} + \int_r^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{\sqrt{t(t+c^2)P_2(t)}} \right) dt. \end{aligned}$$

Подводя итоги вычислениям, получаем следующую формулу для квадрата амплитуды решения уравнения (1), построенного по кривой (12):

$$\begin{aligned} |\psi|^2 &= -4K_0^2 (\vartheta_4(\varphi_1 - i\delta_1 | i\mathbf{b}_+) \vartheta_4(\varphi_2 + i\delta_2 | i\mathbf{b}_-) - \vartheta_2(\varphi_1 - i\delta_1 | i\mathbf{b}_+) \vartheta_2(\varphi_2 + i\delta_2 | i\mathbf{b}_-)) \\ &\quad \times (\vartheta_4(\varphi_1 + i\delta_1 | i\mathbf{b}_+) \vartheta_4(\varphi_2 - i\delta_2 | i\mathbf{b}_-) - \vartheta_2(\varphi_1 + i\delta_1 | i\mathbf{b}_+) \vartheta_2(\varphi_2 - i\delta_2 | i\mathbf{b}_-)) \\ &\quad \times (\vartheta_3(\varphi_1 | i\mathbf{b}_+) \vartheta_3(\varphi_2 | i\mathbf{b}_-) + \vartheta_1(\varphi_1 | i\mathbf{b}_+) \vartheta_1(\varphi_2 | i\mathbf{b}_-))^{-2}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= k_1 x + Z_1, \quad \varphi_2 = \kappa_2 z + Z_1 - 2Z_2, \quad k_1 = \frac{2}{A_+}, \quad \kappa_2 = \frac{4}{A_-}, \\ \vartheta_4(p) &= \vartheta_3\left(p + \frac{1}{2}\right), \quad \vartheta_2(p) = \vartheta_1\left(p + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что в амплитуде построенного решения (17) координаты x и z отделены друг от друга и находятся в аргументах разных эллиптических тэта-функций. Следовательно, амплитуда решения будет периодической функцией по обеим координатам при любых значениях параметров a , b , c . Наличие явной формулы для амплитуды и параметров решения позволяет довольно легко исследовать зависимость внешнего вида решения от параметров спектральной кривой. Изображения амплитуды решения (17) при $a = 1$, $c = 5$ и разных значениях параметра b приведено в конце статьи.

3. Общий анализ двухфазных решений фокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера. Можно доказать (см., например, [32]), что действительные векторы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$, присутствующие в формулах (10) и (11), линейно независимы, и поэтому в случае $g = 2$ любой действительный вектор может быть представлен в виде линейной комбинации этих векторов. В частности, это относится к векторам $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^t$ и $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^t$, которые являются периодами двумерной тэта-функции Римана (8)

$$\Theta(\mathbf{p} + \mathbf{e}_j | B) \equiv \Theta(\mathbf{p} | B).$$

Таким образом, для любой гиперэллиптической поверхности рода $g = 2$ вида (5) существуют действительные числа α_j , β_j такие, что выполняются равенства

$$\alpha_1 \mathbf{U} + \beta_1 \mathbf{V} = \mathbf{e}_1, \quad \alpha_2 \mathbf{U} + \beta_2 \mathbf{V} = \mathbf{e}_2. \quad (18)$$

Из равенств (18) и формулы (11) следует, что амплитуда решения $|\psi|$ является периодической функцией на плоскости XOZ :

$$|\psi|(x + \alpha_j, z + \beta_j) \equiv |\psi|(x, z),$$

независимо от того, выражается двумерная тэта-функция через эллиптические или нет. Поскольку вектор начальной фазы $\mathbf{Z}$ также можно разложить по векторам $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$, то изменение $\mathbf{Z}$ ведет к тривиальному сдвигу решения на некоторый вектор на плоскости XOZ и не влияет на характерное поведение решения. Следовательно, если двухфазное решение фокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера (1) имеет пик в какой-то точке, то оно имеет бесконечно много аналогичных пиков, расположенных в узлах двумерной решетки.

Напомним, что при аффинном преобразовании спектральной кривой Γ (5) по правилу

$$\tilde{\lambda} = \rho\lambda + \delta, \quad \tilde{\lambda}_j = \rho\lambda_j + \delta, \quad \tilde{w} = \rho^{g+1}w \quad (19)$$

конечнозонное многофазное решение уравнения (1) преобразуется по формулам [32]:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(x, z) &= \rho\psi(\rho x - 4\rho\delta z, \rho^2 z) \exp(2i\delta x + 4\delta^2 z), \\ \tilde{\phi}(x, z) &= \rho\phi(\rho x - 4\rho\delta z, \rho^2 z) \exp(-2i\delta x - 4\delta^2 z). \end{aligned}$$

Эти равенства являются композицией преобразований, называемых в общей теории нелинейного уравнения Шрёдингера преобразованиями масштаба и Галилея [11]. Соответственно, параметры решетки периодов при преобразовании (19) меняются по формулам

$$\tilde{\alpha}_j = \frac{1}{\rho}\alpha_j + \frac{4\delta}{\rho^2}\beta_j, \quad \tilde{\beta}_j = \frac{1}{\rho^2}\beta_j,$$

из которых следует, что если изначально решетка периодов не была ортогональной,

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 \neq 0,$$

то при условии

$$\rho^2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 \geq 4\beta_1^2\beta_2^2$$

можно выбрать параметр сдвига δ так, чтобы новая решетка периодов была бы ортогональной

$$\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2 + \tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2 = 0.$$

Также нетрудно подобрать δ так, чтобы амплитуда решения была периодической функцией по z .

Отметим, что наличие пиков у амплитуды решения говорит о достаточно заметном присутствии членов соответствующего ряда Фурье с большими значениями частот и волновых векторов. То есть указывает на относительно медленное убывание коэффициентов ряда Фурье, которые экспоненциальным образом выражаются через матрицу периодов кривой. Следовательно, у двухфазных решений в виде “волн-убийц”, построенных по кривой (5), должны быть малы отношения b -периодов голоморфных интегралов к их a -периодам. Это возможно, только если достаточно близки друг к другу точки ветвления λ_j и достаточно велики их мнимые части $\text{Im } \lambda_j$. И чем точки ветвления ближе друг к другу, чем дальше они от оси действительных

чисел, тем круче фронт амплитуды решения. Обратим внимание, что изображенные на рис. 4–7 решения подтверждают вышеприведенные рассуждения, поскольку лучше всего понятию периодических “волн-убийц” соответствует изображение решения с $b = c = 5$ (рис. 6).

Рис. 4. Амплитуда решения $|\psi|$ (17) при $a = 1, b = 1, c = 5$

Рис. 5. Амплитуда решения $|\psi|$ (17) при $a = 1, b = 3, c = 5$

Рис. 6. Амплитуда решения $|\psi|$ (17) при $a = 1, b = 5, c = 5$

Анализ эллиптических двухфазных решений уравнений Кортевега–де Фриза и Буссинеска показал, что количество максимумов на параллелограмме периодов равно количеству прообразов накрывающих отображений (случаи $n = 2$ и $n = 3$ см.

 Рис. 7. Амплитуда решения $|\psi|$ (17) при $a = 1$, $b = 10$, $c = 5$

в [33], [34]). Поскольку этот факт связан, в первую очередь, со свойствами накрывающей многомерной тэта-функции, то он верен и для двухфазных решений нелинейного уравнения Шрёдингера. Лучше всего истинность данного утверждения проверяется на примере решения (17) из предыдущего пункта. Решение периодически и по x , и по z , т.е. параллелограммом периодов является прямоугольник. Из формул (14), (16) вытекает, что каждой точке кривых $\Gamma_2^\pm$ соответствуют две точки кривой Γ_2 , а на рисунках 4–7 видно, что на каждом прямоугольнике периодов находятся два максимума амплитуды решения. Следовательно, чтобы получать двухфазные “волны-убийцы” с большим числом пиков на параллелограмме периодов решения, необходимо рассматривать накрытия с большим числом прообразов.

4. Заключительные замечания. Если рассматривать трехфазные решения, т.е. если положить $g = 3$, то к векторам $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ добавляется линейно независимый вектор $\mathbf{W}$, в результате чего функция [24]

$$\psi(x, z, y) = \frac{2K_0}{\rho} \frac{\Theta(\mathbf{Z})\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{W}y + \mathbf{Z} - \Delta)}{\Theta(\mathbf{Z} - \Delta)\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{W}y + \mathbf{Z})} e^{2i(K_1x + K_2z + K_3y)}$$

при любом значении y будет решением уравнения (1). Разлагая векторы периодов решетки трехмерной тэта-функции $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^t$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^t$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^t$ по линейно независимым действительным векторам $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$:

$$\mathbf{e}_j = \alpha_j \mathbf{U} + \beta_j \mathbf{V} + \gamma_j \mathbf{W}, \quad j = 1, 2, 3,$$

получаем, что амплитуда решения $|\psi|$ будет периодической функцией в трехмерном пространстве

$$|\psi|(x + \alpha_j, z + \beta_j, y + \gamma_j) \equiv |\psi|(x, z, y),$$

и максимумы амплитуды будут находиться в вершинах трехмерной решетки с образующими $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$, $j = 1, 2, 3$. Поскольку трехфазное решение $\psi(x, z, y_0)$ зависит от двух координат x , z и параметризуется третьей координатой y_0 , то величина амплитуды этого решения зависит от того, насколько далеко от плоскости $y = y_0$ находятся вершины данной трехмерной решетки. Следовательно, амплитуда трехфазного решения, в отличие от двухфазного, существенно зависит от выбора начальной трехмерной фазы $\mathbf{Z}$. Естественно, как и в случае двухфазного решения, в параллелепипеде периодов решения могут находиться несколько максимумов. В этом случае

максимумы решения располагаются в вершинах нескольких трехмерных решеток с одинаковыми образующими. Соответственно, трехфазное решение уравнения (1) в общем случае имеет более сложный вид, чем двухфазное.

Автор благодарит В. Б. Матвеева за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. Ruban, Y. Kodama, M. Ruderman, J. Dudley, R. Grimshaw, P. V. E. McClintock, M. Onorato, C. Kharif, E. Pelinovsky, T. Soomere, G. Lindgren, N. Akhmediev, A. Slunyaev, D. Solli, C. Ropers, B. Jalali, F. Dias, A. Osborne, “Rogue Waves – towards a Unifying Concept?: Discussions & Debates”, *Eur. Phys. J. Special Topics*, **185**:1 (2010), 5–15.
- [2] N. Akhmediev, A. Ankiewicz, M. Taki, “Waves that appear from nowhere and disappear without a trace”, *Phys. Lett. A*, **373**:6 (2009), 675–678.
- [3] A. Ankiewicz, D. J. Kedziora, N. Akhmediev, “Rogue waves triplets”, *Phys. Lett. A*, **375**:28–29 (2011), 2782–2785.
- [4] D. J. Kedziora, A. Ankiewicz, N. Akhmediev, “Circular rogue wave clusters”, *Phys. Rev. A*, **84**:5 (2011), 056611.
- [5] P. Dubard, P. Gaillard, C. Klein, V. B. Matveev, “On multi-rogue waves solutions of the focusing NLS equation and positon solutions of the KdV equation”, *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, **185**:1 (2010), 247–261.
- [6] P. Dubard, V. B. Matveev, “Multi-rogue waves solutions to the focusing NLS equation and the KP-I equation”, *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, **11** (2011), 667–672.
- [7] B. Guo, L. Ling, Q. P. Liu, “Nonlinear Schrödinger equation: Generalized Darboux transformation and rogue wave solutions”, *Phys. Rev. E*, **85**:2 (2012), 026607.
- [8] Y. Ohta, J. Yang, “General higher order rogue waves and their dynamics in the nonlinear Schrödinger equation”, *Proc. R. Soc. A*, **468**:2142 (2012), 1716–1740.
- [9] A. I. Dyachenko, V. E. Zakharov, “On the formation of freak waves on the surface of deep water”, *Письма в ЖЭТФ*, **88**:5 (2008), 356–359.
- [10] В. Е. Захаров, Р. В. Шамин, “О вероятности возникновения волн-убийц”, *Письма в ЖЭТФ*, **91**:2 (2010), 68–71.
- [11] Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич, *Солитоны*, Физматлит, М., 2003.
- [12] K. B. Dysthe, “Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water waves”, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **369**:1736 (1979), 105–114.
- [13] K. Trulsen, K. B. Dysthe, “A modified nonlinear Schrödinger equation for broader bandwidth gravity waves on deep water”, *Wave Motion*, **24**:3 (1996), 281–289.
- [14] K. Trulsen, I. Kliakhandler, K. B. Dysthe, M. G. Velarde, “On weakly nonlinear modulation of waves on deep water”, *Phys. Fluids*, **12**:10 (2000), 2432–2437.
- [15] A. Saini, V. M. Vyas, S. N. Pandey, T. S. Raju, P. K. Panigrahi, *Travelling Wave Solutions to Nonlinear Schrodinger Equation With Self-Steepening and Self-Frequency Shift*, 2009, arXiv: nlin.PS/0911.2788.
- [16] С. П. Новиков, “Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза. Г”, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 54–66.
- [17] P. D. Lax, “Periodic solutions of the KdV equations”, *Nonlinear Wave Motion, Lectures in Appl. Math.*, **15**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974, 85–96.
- [18] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, “Периодическая задача для уравнений Кортевега–де Фриза и Штурма–Лиувилля. Их связь с алгебраической геометрией”, *Докл. АН СССР*, **219**:3 (1974), 19–22.
- [19] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, “Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N -солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза”, *ТМФ*, **23**:1 (1975), 51–68.

- [20] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, “Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия”, *УМН*, **31**:1 (1976), 55–136.
- [21] И. М. Кривевер, “Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений”, *УМН*, **32**:6 (1977), 183–208.
- [22] Б. А. Дубровин, “Тэта-функции и нелинейные уравнения”, *УМН*, **36**:2 (1981), 11–80.
- [23] V. B. Matveev, “30 years of finite-gap integration theory”, *Phil. Trans. R. Soc. A*, **366**:1867 (2008), 837–875.
- [24] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enol’skii, A. R. Its, V. B. Matveev, *Algebro-Geometrical Approach to Nonlinear Evolution Equations*, Springer Ser. Nonlinear Dynam., Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [25] А. О. Смирнов, “Матричный аналог теоремы Аппеля и редукции многомерных тэта-функций Римана”, *Матем. сб.*, **133**:3 (1987), 382–391.
- [26] А. Р. Итс, “Обращение гиперэллиптических интегралов и интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений”, *Вестн. ЛГУ. Сер. Матем., мех., астроном.*, **7**:2 (1976), 39–46.
- [27] Б. А. Дубровин, И. М. Кривевер, С. П. Новиков, “Уравнение Шредингера в периодическом поле и римановы поверхности”, *Докл. АН СССР*, **229**:1 (1976), 15–18.
- [28] J. D. Fay, *Theta Functions on Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Math., **352**, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [29] H. F. Baker, *Abel’s Theorem and the Allied Theory Including the Theory of the Theta Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1897.
- [30] A. Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionen*, B. G. Teubner, Leipzig, 1903.
- [31] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, М., 1970.
- [32] А. О. Смирнов, “Двухзонные эллиптические решения интегрируемых нелинейных уравнений”, *Матем. заметки*, **58**:1 (1995), 86–97.
- [33] E. G. Amosenok, A. O. Smirnov, “Two-gap 2-elliptic solution of Boussinesq equation”, *Lett. Math. Phys.*, **96**:1-3 (2011), 157–168.
- [34] А. О. Смирнов, Г. М. Головачев, Е. Г. Амосенок, “Двухзонные 3-эллиптические решения уравнений Буссинеска и Кортевега–де Фриза”, *Нелинейная динам.*, **7**:2 (2011), 239–256.

А. О. Смирнов

Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения
E-mail: alsmir@guap.ru

Поступило

24.04.2012

Исправленный вариант

16.01.2013