Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Садов, Характеризация мер Карлесона посредством свойства Хаусдорфа–Юнга, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 4, 582–590

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9344>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:04:59

Характеризация мер Карлесона посредством свойства Хаусдорфа–Юнга

С. Ю. Садов

Показано, что преобразование Лапласа L^p -функции, $1 < p \leq 2$, определенной на положительной полуоси, удовлетворяет неравенству типа Хаусдорфа–Юнга с весом в правой комплексной полуплоскости тогда и только тогда, когда вес является мерой Карлесона. В качестве вспомогательного результата приведена теорема Карлесона о весовой L^p оценке гармонического продолжения с явной константой.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm9344

1. Введение. Классическое неравенство Хаусдорфа–Юнга для (одномерного) преобразования Фурье

$$u(t) \rightarrow \mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(t) e^{-it\xi} dt$$

утверждает, что

$$\|\mathcal{F}u\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} \leq B(p) \|u\|_{L^p(\mathbb{R})}. \quad (1)$$

Как обычно, $1 \leq p \leq 2$, $p' = (1 - 1/p)^{-1}$ обозначает сопряженный показатель, и $p = 1$ соответствует $p' = \infty$. Общеизвестна классическая оценка Титчмарша $B(p) \leq (2\pi)^{1/p'}$, легко вытекающая из теоремы Парсеваля и интерполяционной теоремы Рисса–Торина. Точное значение константы

$$B(p) = (2\pi)^{1/p'} \left(\frac{p^{1/p}}{p'^{1/p'}} \right)^{1/2} \quad (2)$$

(в котором для наших целей важен характер зависимости от p) установлено Бабенко [1] в случае целого четного p' и Бекнером [2] в общем случае.

С этого момента будем предполагать, что функция $u(t)$ определена на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Ее интеграл Фурье (с областью интегрирования $\mathbb{R}_+$) является аналитической функцией в верхней полуплоскости $\mathbb{H} = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ и принадлежит классу Харди $H^{p'}(\mathbb{H})$, если $u \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq 2$.

Поворот на 90° в комплексной плоскости приводит к эквивалентной картине, которую мы предпочтем ради инвариантности относительно комплексного сопряжения. Вместо преобразования Фурье со значениями в верхней полуплоскости будем рассматривать преобразование Лапласа

$$\mathcal{L}u(z) = \int_0^\infty u(t)e^{-zt} dt \quad (3)$$

со значениями в правой полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0\}$.

Классы Харди в правой полуплоскости будут обозначаться $H^s(\mathbb{C}_+)$. Напомним, что при $s \geq 1$ норма функции $v(z)$ в $H^s(\mathbb{C}_+)$ дается формулой

$$\|v\|_{H^s(\mathbb{C}_+)} = \sup_{x>0} \left(\int_{-\infty}^\infty |v(x+iy)|^s dy \right)^{1/s}.$$

Ввиду (1) и равенства $\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}, dt)} = \|u(t)e^{itx}\|_{L^p(\mathbb{R}, dt)}$ имеем

$$\|\mathcal{L}u\|_{H^{p'}(\mathbb{C}_+)} \leq B(p)\|u\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}. \quad (4)$$

В статье [3] рассмотрены условия на весовые функции $v(t)$ и $w(x)$, определенные на $\mathbb{R}_+$, при которых $\mathcal{L}$ действует ограниченным образом из $L^p(\mathbb{R}_+, v)$ в $L^q(\mathbb{R}_+, w)$ с заданными показателями p и q . Нас же будут интересовать условия на меру μ , определенную на правой полуплоскости $\mathbb{C}_+$ или ее замыкании $\overline{\mathbb{C}}_+$, при которых $\mathcal{L}$ действует ограниченным образом из $L^p(\mathbb{R}_+)$ (с мерой Лебега) в $L^{p'}(\overline{\mathbb{C}}_+, d\mu)$.

Тема настоящей работы возникла в процессе сотрудничества автора с А. Е. Мерзонам. С целью получения некоторых оценок в двумерной задаче дифракции на угле (см. [4]) Мерзон поставил следующий вопрос. *Допустим, что $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Следует ли отсюда, что $\mathcal{L}u \in L^2(\gamma)$, где γ – гипербола в $\mathbb{C}_+$ с мерой ds , порожденной натуральным параметром?* В терминологии настоящей статьи вопрос звучит так: *обладает ли мера ds на гиперболе в $\mathbb{C}_+$ свойством Хаусдорфа–Юнга порядка 2?*

Положительный ответ дан в статье [5]. Поиск обобщений привел к теореме 1 настоящей заметки, которая выражает простое необходимое и достаточное условие: класс мер, обладающих свойством Хаусдорфа–Юнга любого порядка $p \in (1, 2]$ (см. определение 1 в п. 2) совпадает с известным классом мер Карлесона.

В теореме 1 помимо качественного результата (который в несколько строк следует из известных фактов) мы отслеживаем зависимость констант в неравенствах от показателя p . В пределе $p \rightarrow 1^+$ это приводит к любопытному разложению класса карлесоновых мер на подклассы, параметризованные числами отрезка $[1/2, 1]$ – см. замечание 2 в конце п. 2.

Для наших целей понадобилась версия теоремы Карлесона с явной константой – см. теорему 2 в п. 3. Оказалось проще передоказать теорему – возможно, более прямым путем по сравнению с опубликованными доказательствами, – чем найти такую версию в литературе.

2. Меры со свойством Хаусдорфа–Юнга и основная теорема.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть μ – положительная борелевская мера на замкнутой правой полуплоскости $\overline{\mathbb{C}}_+ = \{z \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$. Скажем, что μ обладает *свойством Хаусдорфа–Юнга порядка p* или, для краткости, что μ есть $\text{HY}(p)$ -мера (пишем $\mu \in \text{HY}(p)$), если существует постоянная C такая, что

$$\|\mathcal{L}u(z)\|_{L^{p'}(\overline{\mathbb{C}}_+, d\mu)} \leq C\|u\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}$$

для любой функции $u \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Если C – наименьшая постоянная с этим свойством и $p > 1$, то назовем величину $N_{\mathcal{H}\mathcal{U},p}(\mu) = C^{p'}$ *нормой Хаусдорфа–Юнга* порядка p меры μ . (При $p = 1$ норма $N_{\mathcal{H}\mathcal{U},1}(\mu)$ не определена.)

Из неравенства (1) видно, что лебегова мера вдоль мнимой оси, $\delta(x) \otimes dy$, есть $\mathcal{H}\mathcal{U}(p)$ -мера с любым $p \in [1, 2]$. То же верно в отношении лебеговой меры вдоль положительной вещественной полуоси, $dx \otimes \delta(y)$ ($x > 0$). Соответствующее неравенство

$$\|\mathcal{L}\|_{L^p(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}_+)} \leq \left(\frac{2\pi}{p'}\right)^{1/p'} \quad (5)$$

принадлежит Харди [6].

Заметим еще, что любая положительная борелевская мера на $\overline{\mathbb{C}}_+$ есть $\mathcal{H}\mathcal{U}(1)$ ввиду очевидной поточечной оценки

$$|\mathcal{L}u(z)| \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}.$$

Определим класс мер Карлесона. Наше определение слегка нестандартно – ср., например, [7; § I.5] (но согласуется с определением, скажем, в [8]) – в том плане, что допускаются меры с ненулевой массой границы области (здесь – правой полуплоскости). Введем семейство квадратов, прилегающих к границе:

$$Q_{a,h} = \{z \mid \operatorname{Im} z \in [a, a+h], \operatorname{Re} z \in [0, h]\}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad h > 0. \quad (6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Положительная борелевская мера μ на $\overline{\mathbb{C}}_+$ называется *мерой Карлесона*, а величина $N_{\mathcal{C}}(\mu)$ – ее *нормой Карлесона*, если верхняя грань

$$N_{\mathcal{C}}(\mu) = \sup_{a,h} \frac{\mu(Q_{a,h})}{h}$$

конечна.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Любая мера μ из определения 2 единственным образом представляется в виде $\mu = \mu_1 + \mu_2$, где $\mu_1 = \mu|_{x=0}$ – граничная компонента меры μ , а μ_2 – мера Карлесона в смысле обычного определения (с той лишь разницей, что мы работаем в правой полуплоскости $\mathbb{C}_+$, в отличие от обычно используемой верхней полуплоскости $\mathbb{H}$). Из определения 2 следует, что компонента μ_1 абсолютно непрерывна относительно меры Лебега dy . Более точно, имеет место оценка производной Радона–Никодима

$$\frac{d\mu_1}{dy} \leq N_{\mathcal{C}}(\mu). \quad (7)$$

В частности, $L^q(dy) \subset L^q(d\mu_1)$ для всех $q \geq 1$.

ТЕОРЕМА 1 ($\mathcal{H}\mathcal{U}$ -характеризация мер Карлесона). *Следующие утверждения эквивалентны:*

- (a) μ – мера Карлесона на $\overline{\mathbb{C}}_+$;
- (b) $\mu \in \mathcal{H}\mathcal{U}(p)$ при некотором $p \in (1, 2]$;
- (c) $\mu \in \mathcal{H}\mathcal{U}(p)$ при всех $p \in [1, 2]$.

Более того, при любом $p \in (1, 2]$ справедливы неравенства

$$A_1(p)^{-1}N_C(\mu) \leq N_{\mathcal{H}\mathcal{U},p}(\mu) \leq A_2(p)N_C(\mu), \quad (8)$$

где $A_1(p) \leq 2^{3/2}p'$ и $A_2(p) \leq 160\pi\sqrt{e/p'}$. Эти оценки точны по порядку величины при $p' \rightarrow \infty$, т.е. $A_1(p) \neq o(p')$ и $A_2(p) \neq o(p'^{-1/2})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что качественное утверждение (а) $\Rightarrow$ (с) является простым следствием теоремы Карлесона [7; теорема II.3.9]. Затем выведем, что (b) $\Rightarrow$ (а) по аналогии с доказательством обратной импликации в цитированной теореме и установим левое неравенство в (8). Доказательство правого неравенства в (8) отложим до п. 3.

(а) $\Rightarrow$ (с). Случай $p = 1$ тривиален, поэтому будем считать, что $1 < p \leq 2$. Если $u \in L^p(\mathbb{R}_+)$, то $\mathcal{L}u \in H^{p'}(\mathbb{C}_+)$ и (4) выполнено. Используя разложение $\mu = \mu_1 + \mu_2$ из замечания 1, получаем $\|\mathcal{L}u\|_{L^{p'}(d\mu_1)} < \infty$, в то время как неравенство $\|\mathcal{L}u\|_{L^{p'}(d\mu_2)} < \infty$ составляет содержание части (а) $\Rightarrow$ (b) теоремы Карлесона [7; теорема II.3.9].

(с) $\Rightarrow$ (b). Тривиально.

(b) $\Rightarrow$ (а). Если $p = 2$, то $(2\pi)^{-1/2}\mathcal{L}$ – унитарный изоморфизм $L^2(\mathbb{R}_+)$ на $H^2(\mathbb{C}_+)$, и часть (с) $\Rightarrow$ (а) цитированной теоремы Карлесона влечет карлесоновость меры μ . Такое рассуждение не проходит при $1 < p < 2$, так как $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}_+))$ – собственное подмножество в $H^{p'}(\mathbb{C}_+)$. Вместо ссылки на утверждение части (с) $\Rightarrow$ (а) из [7] мы адаптируем ее доказательство к нашей ситуации.

Возьмем функцию $u \in L^p(\mathbb{R}_+)$ с нормой $\|u\|_p = 1$, преобразование Лапласа которой, $v = \mathcal{L}u$, таково, что

$$b = \inf_{z \in Q_{0,1}} |v(z)| > 0.$$

Для $h > 0$ определим

$$u_h(t) = h^{1/p}u(ht).$$

Тогда $\|u_h\|_p = 1$ и

$$v_h(z) = \mathcal{L}u_h(z) = h^{-1/p'}v\left(\frac{z}{h}\right).$$

Если $z \in Q_{0,h}$, то $|v_h(z)| \geq h^{-1/p'}b$. Следовательно,

$$\|v_h\|_{L^{p'}(d\mu)}^{p'} \geq \int_{Q_h} |v_h(z)|^{p'} d\mu(z) \geq \mu(Q_h)h^{-1}b^{p'}.$$

С другой стороны, в силу условия (b) теоремы

$$\|v_h\|_{L^{p'}(d\mu)}^{p'} \leq N_{\mathcal{H}\mathcal{U},p}(\mu)\|u_h\|_p^{p'} = N_{\mathcal{H}\mathcal{U},p}(\mu).$$

Значит,

$$\mu(Q_{0,h}) \leq hb^{-p'}N_{\mathcal{H}\mathcal{U},p}(\mu).$$

Оценки для $\mu(Q_{a,h})$ при $a \neq 0$ получаются аналогично при помощи пробных функций $u_h(t)e^{iat}$. Таким образом, μ – мера Карлесона, и ее норма Карлесона оценивается как

$$N_C(\mu) \leq b^{-p'}N_{\mathcal{H}\mathcal{U},p}(\mu).$$

Получаем левое неравенство в (8) с оценкой $A_1(p) \leq b^{-p'}$.

Остается показать, что $b^{-p'}$ имеет мажоранту, растущую линейно по p' . Достаточно указать конкретную пробную функцию, для которой это так. В качестве такой функции возьмем

$$u(t) = \begin{cases} \varepsilon^{-1/p}, & 0 < t < \varepsilon, \\ 0, & t > \varepsilon. \end{cases}$$

Тогда $v(z) = \varepsilon^{1/p'}(1 - e^{-z\varepsilon})/(z\varepsilon)$.

При $\operatorname{Re} w \geq 0$ справедливо неравенство $|e^{-w} - w + 1| \leq |w|^2/2$ (в силу формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме). Значит, $|(e^{-w} - 1)/w| \geq 1 - |w|/2$. Следовательно,

$$|v(z)|^{p'} \geq \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon|z|}{2}\right)^{p'}.$$

Минимум b правой части на квадрате $z \in Q_{0,1}$ достигается в угловой точке $z = 1 + i$; при этом $|z| = \sqrt{2}$. Полагая $\varepsilon = \sqrt{2}/p'$, получаем

$$b^{-p'} \leq \frac{p'}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{p'}\right)^{-p'} \leq \frac{4p'}{\sqrt{2}},$$

как и утверждалось.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Неулучшаемость оценок (8) по порядку величины означает, что в пределе при $p \rightarrow 1^+$ возникает шкала неэквивалентных норм мер Карлесона. Их можно определить, скажем, так:

$$N_{\mathcal{HY},(1,\alpha)}(\mu) = N_{\mathcal{HY},2}(\mu) + \limsup_{p \rightarrow 1^+} (p-1)^{-\alpha} N_{\mathcal{HY},p}(\mu), \quad \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1.$$

Классы

$$\mathcal{HY}(1, \alpha) = \{\mu \in N_{\mathcal{C}}(\mathbb{C}_+) : N_{\mathcal{HY},(1,\alpha)}(\mu) < \infty\}$$

расширяются с убыванием α от 1 до $1/2$. Было бы интересно понять, какое геометрическое свойство карлесоновой меры ответственно за ее принадлежность тому или иному классу.

3. Оценки постоянных в неравенствах. Чтобы получить верхнюю оценку постоянной $A_2(p)$ в правом неравенстве (8), нам нужна карлесоновская оценка интеграла Пуассона с явно выписанной постоянной, которая составляет содержание теоремы 2. Обратим внимание на следующую деталь ее доказательства: в интерполяционной части мы используем комбинацию теорем Марцинкевича и Рисса–Торина для оптимизации оценки постоянной как функции p .

Для удобства ссылок в теореме 2 мы пользуемся обычным определением мер Карлесона (т.е. граница не имеет массы) в верхней полуплоскости $\mathbb{H}$. Вместо квадратов $Q_{a,h}$ из определения 2 используются квадраты

$$R_{a,h} = \{x + iy \mid a < x < a + h, 0 < y < h\}.$$

Формула для $N_{\mathcal{C}}(\mu)$ подлежит очевидной модификации.

Вдобавок, понадобятся следующие обозначения:

- ядро Пуассона для верхней полуплоскости $P_a(t) = \pi^{-1}a/(a^2 + t^2)$;
- оператор гармонического продолжения (свертки с ядром Пуассона):

$$\mathcal{P}f(x + iy) = \int_{-\infty}^{\infty} P_y(x - t)f(t) dt;$$

- $E_g(\lambda)$ – надмножество уровня: для функции $g(z)$ и данного $\lambda > 0$

$$E_g(\lambda) = \{z : |g(z)| > \lambda\}.$$

ТЕОРЕМА 2 (теорема Карлесона с числовыми постоянными). *Предположим, что μ – мера Карлесона в $\mathbb{H}$. Пусть $f(x) \in L^p(\mathbb{R})$ и $g(x + iy) = \mathcal{P}f(x + iy)$. Тогда*

(a) *если $p = 1$, то*

$$\mu(E_g(\lambda)) \leq 10N_C(\mu)\|f\|_1; \quad (9)$$

(b) *если $1 < p < \infty$, то*

$$\|g\|_{L^p(d\mu)} \leq (M(p)N_C(\mu))^{1/p}\|f\|_p, \quad (10)$$

где $M(p) \leq 40p'$ при $1 < p < 2$ и $M(p) \leq 79$ при $p \geq 2$.

Закончим теперь доказательство теоремы 1, а затем докажем теорему 2.

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1. Пусть дана мера Карлесона μ на $\overline{\mathbb{C}}_+$, и пусть $\mu = \mu_1 + \mu_2$ – ее разложение из замечания 1. Для любой функции $v \in H^{p'}(\mathbb{C}_+)$ имеем в силу (7) и (10)

$$\|v\|_{L^{p'}(d\mu)}^{p'} = \|v\|_{L^{p'}(d\mu_1)}^{p'} + \|v\|_{L^{p'}(d\mu_2)}^{p'} \leq N_C(\mu)(1 + M(p'))\|v\|_{H^{p'}}^{p'}.$$

Поэтому если $v = \mathcal{L}u$, то ввиду (4) будет

$$\|v\|_{L^{p'}(d\mu)}^{p'} \leq N_C(\mu)(1 + M(p')) \cdot (B(p))^{p'}\|u\|_p^{p'}.$$

(Здесь появляется в качестве коэффициента величина $M + 1$; этим объясняется наше мелочное предпочтение коэффициента 79 круглому 80 в теореме 2.) Подставляя значение $B(p)$ из (2) и оценку для $M(p')$ из теоремы 2, находим

$$N_{\mathcal{H}\mathcal{U},p}(\mu) \leq 80 \cdot 2\pi p'^{1/2} p'^{-1/2} N_C(\mu).$$

Для получения верхней оценки для $A_2(p)$ в том виде, как утверждается в теореме 1, остается заметить, что

$$\sup_{1 < p \leq 2} (p' p^{-1} \ln p) = \lim_{p \rightarrow 1} (\dots) = 1.$$

Наконец, покажем, что найденные верхние оценки для $A_1(p)$ и $A_2(p)$ в (8) неуллучшаемы по порядку.

Возьмем $\mu = \delta(z - 1/p')$, так что $\int v(z) d\mu = v(1/p')$. Ясно, что $N_C(\mu) = p'$. В то же время по неравенству Гёльдера $N_{\mathcal{H}\mathcal{U},p}(\mu) \leq 1$. Значит, $A_1(p) \geq p'$.

Возьмем $\mu = dy$ – меру Лебега на мнимой оси. Тогда $N_C(\mu) = 1$. В то же время $N_{\mathcal{H}\mathcal{U},p}(\mu) = B(p)^{p'}$. Значит, $A_2(p) \geq B(p)^{p'} \sim 2\pi\sqrt{e/p'}$ при $p' \rightarrow \infty$.

Теорема 1 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Сначала выведем часть (b) из части (a). Из неравенства (9) и тривиального неравенства $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ посредством интерполяционной теоремы Марцинкевича [7; теорема. I.4.5] находим

$$\|g\|_{L^p(d\mu)} \leq 2(10p'N_C(\mu))^{1/p} \|f\|_p.$$

В теореме 2 обещана постоянная с асимптотическим поведением вида $O(1)^{1/p}$ при $p \rightarrow \infty$, в то время как постоянная в только что полученном неравенстве стремится к пределу 2. Для улучшения оценки используем теорему Рисса–Торина. Согласно ей

$$\left(\frac{\|g\|_{L^p(d\mu)}}{\|f\|_p} \right)^p \leq \inf_{1 < r \leq p} \left(\frac{\|g\|_{L^r(d\mu)}}{\|f\|_r} \right)^r \leq \inf_{1 < r \leq p} (2^r \cdot 10r'N_C(\mu)).$$

Функция $r \rightarrow 2^r r' = 2^r r / (r - 1)$ достигает своего минимума m в корне r_0 уравнения $r_0(r_0 - 1) \ln 2 = 1$. Вычисляя, находим $r_0 \approx 1.80104$ и $m \approx 7.83495$. Таким образом, $10m < 79$, и получается верхняя оценка для $M(p)$, указанная в теореме 2.

Доказательство части (a) теоремы 2 при систематическом изложении теории, как в [7], состояло бы из трех шагов: разложение Кальдерона–Зигмунда $\Rightarrow$ максимальная теорема Харди–Литтлвуда $\Rightarrow$ оценка для некасательной максимальной функции $\Rightarrow$ теорема Карлесона. В нашем изложении этот путь спрямлен, и промежуточные теоремы, при всей их общетеоретической важности, не упоминаются.

Зафиксируем $\lambda > 0$ и рассмотрим разложение Кальдерона–Зигмунда функции f на уровне $\alpha = \lambda/7$ [7; лемма VI.2.2]: $\mathbb{R} = B \cup G$, $B \cap G = \emptyset$. Здесь $f(x) \leq \alpha$ для почти всех $x \in G$, $B = \bigcup I_j$ – конечное или счетное объединение непересекающихся интервалов и

$$\alpha \leq M_j \leq 2\alpha, \quad \text{где} \quad M_j = \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} |f| dx.$$

Можно предположить, что число интервалов I_j конечно: множество функций f , для которых это так, плотно в L^1 .

Если $I_j = [a_j, b_j]$, положим $\tilde{I}_j = [a_j - |I_j|, b_j + |I_j|]$, так что $|\tilde{I}_j| = 3|I_j|$. Пусть R_j – квадрат в $\mathbb{H}$ с основанием $\tilde{I}_j$, т.е.

$$x + iy \in R_j \iff x \in \tilde{I}_j, \quad 0 < y \leq 3|I_j|.$$

Наша цель – показать, что $E_g(\lambda) \subset \cup R_j$.

Зафиксируем $z = x_0 + iy \notin \cup R_j$ и изучим отдельно вклады в $g(x_0 + iy)$ от сужений f на три типа интервалов I_j в зависимости от того, как интервал $\tilde{I}_j$ расположен по отношению к точке x_0 : содержит он эту точку или же лежит целиком справа или целиком слева от x_0 . Формально: пусть x_j – ближайшая к x_0 точка интервала $\tilde{I}_j$. Определим попарно непересекающиеся множества индексов S_0, S_+, S_- согласно правилу: $j \in S_0$ (соответственно S_+ или S_-), если $x_j - x_0 = 0$ (соответственно > 0 или < 0).

В случае $S_0 \neq \emptyset$ предположим, что $L = \max_{j \in S_0} |I_j|$ достигается при $j = j_0$. Тогда $y > 3L$, так как иначе было бы $z \in R_{j_0}$. Ясно, что $I_j \subset [x_0 - 2L, x_0 + 2L]$ для любого $j \in S_0$, поэтому $\sum_{j \in S_0} |I_j| \leq 4L$. Поскольку $P_y(t) < (\pi y)^{-1}$, имеем

$$\sum_{j \in S_0} \int P_y(x_0 - t) |f(t)| dt \leq \frac{1}{\pi y} \sum_{j \in S_0} M_j |I_j| \leq \frac{2\alpha \cdot 4L}{\pi y} < \frac{8}{3\pi} \alpha. \quad (11)$$

Оценим теперь вклады в $g(x_0 + iy)$ от интервалов I_j с $j \in S_+$. Для таких интервалов введем функцию распределения полной (накапливающейся) длины:

$$F(t) = \sum |I_j| \quad \text{по } j \text{ таким, что } x_0 < a_j \leq x_0 + t.$$

Функция F определена на $(0, +\infty)$, не убывает, непрерывна справа, и $F(x) = 0$ в правой полукрестности нуля. Справедливы неравенства

$$F(b_j - x_0) \leq b_j - x_0, \quad j \in S_+, \quad \text{и} \quad F(x) < 2x. \quad (12)$$

Первое из них очевидно; более того, если $b_j \leq x < a_{j+1}$, то $F(x - x_0) < x - x_0$. Если же $a_j \leq x < b_j$, то $F(x - x_0) = F(a_j - x_0) \leq (a_j - x_0) + |I_j| < 2(a_j - x_0)$.

Положим $J = \max j$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j \in S_+} \int_{I_j} P_y(x_0 - t) |f(t)| dt &\leq \sum_{j \in S_+} P_y(a_j - x_0) \int_{I_j} |f(t)| dt \\ &\leq 2\alpha \sum_{j \in S_+} P_y(a_j - x_0) |I_j| = 2\alpha \int_0^{b_J - x_0} P_y(t) dF(t). \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, используя (12) и элементарное неравенство $tP_y(t) \leq (2\pi)^{-1}$, получаем

$$\sum_{j \in S_+} \int_{I_j} P_y(x - t) |f(t)| dt \leq 2\alpha \left(\frac{1}{2\pi} - \int_0^\infty \frac{d}{dt} P_y(t) 2t dt \right) \leq 2\alpha \left(\frac{1}{2\pi} + 1 \right).$$

Вклад от интервалов I_j с $j \in S_-$ удовлетворяет той же оценке. Комбинируя эти оценки с (11), приходим к неравенству

$$\int_B P_y(x_0 - t) |f(t)| dt \leq \alpha \left(\frac{2}{\pi} + 4 + \frac{8}{3\pi} \right) < \frac{11}{2} \alpha.$$

Наконец, ввиду $\sup_G |f| \leq \alpha$ заключаем

$$|g(x_0 + iy)| \leq \int_{B \cup G} P_y(x_0 - t) |f(t)| dt < \frac{13}{2} \alpha.$$

Подведем итог: нам удалось покрыть множество $E_g(\lambda)$ объединением квадратов R_j с суммарной длиной сторон $\sum 3|I_j| \leq 3\|f\|_1/\alpha < 10\|f\|_1/\lambda$. Этим доказано неравенство (9).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К. И. Бабенко, “Об одном неравенстве в теории интегралов Фурье”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **25**:4 (1961), 531–542.
- [2] W. Beckner, “Inequalities in Fourier analysis”, *Ann. of Math.* (2), **102**:1 (1975), 159–182.
- [3] S. Bloom, “Hardy integral estimates for the Laplace transform”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **116**:2 (1992), 417–426.
- [4] A. E. Merzon, F.-O. Speck, T. J. Villalba-Vega, “On the weak solution of the Neumann problem for the 2D Helmholtz equation in a convex cone and H^s regularity”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **34**:1 (2011), 24–43.

- [5] S. Sadov, A. Merzon, “ L^2 -estimates for the Laplace transform along a family of hyperbolas in the right half-plane”, *Commun. Math. Anal.*, 2011, Conference 3, 204–208.
- [6] G. H. Hardy, “The constants of certain inequalities”, *J. London Math. Soc.*, **8**:2 (1933), 114–119.
- [7] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984.
- [8] R. R. Coifman, Y. Meyer, E. M. Stein, “Some new function spaces and their applications to harmonic analysis”, *J. Funct. Anal.*, **62**:2 (1985), 304–335.

С. Ю. Садов

E-mail: serge.sadov@gmail.com

Поступило

13.02.2012