Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Беляев, К вычислению функций матриц, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 2, 175–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9345>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:05:07

К вычислению функций матриц

Ю. Н. Беляев

Получено представление целых функций матриц с помощью симметрических многочленов n -го порядка. Указан способ получения аналитических формул для функций матриц 2–4 порядков. Метод симметрических многочленов использован для построения алгоритмов численных расчетов целых функций матриц, в частности, матричной экспоненты, которые не требуют нахождения собственных значений матриц. Проведена оценка эффективности предложенных численных методов.

Библиография: 5 названий.

DOI: 10.4213/mzm9345

1. Симметрические многочлены n -го порядка. Вычисление функции $f(M)$ матрицы M порядка n по формуле Лагранжа–Сильвестра [1; гл. 5] подразумевает знание собственных значений λ_l , $l = 1, \dots, n$, матрицы M , определяемых решением характеристического уравнения $\lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^{n-2} \sigma_n = 0$. Коэффициенты этого уравнения σ_j , $j = 1, \dots, n$, вычисляемые суммированием соответствующих главных миноров j -го порядка определителя матрицы M , являются элементарными симметрическими многочленами относительно собственных значений λ_l матрицы M ($\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \text{tr } M$, $\sigma_2 = \sum_{l \neq j} \lambda_l \lambda_j$, ..., $\sigma_n = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \det M$). В данной работе представлен метод вычисления аналитической функции $f(M)$, основанный на использовании симметрических многочленов матрицы и не требующий нахождения собственных значений λ_l матрицы M .

Обозначим $p_j = (-1)^{j-1} \sigma_j$, $j = 1, \dots, n$. Очевидно, что величины

$$\mathcal{B}_j(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } j = 0, 1, \dots, n-2, \\ 1, & \text{если } j = n-1, \\ p_1 \mathcal{B}_{j-1}(n) + p_2 \mathcal{B}_{j-2}(n) + \dots + p_n \mathcal{B}_{j-n}(n), & \text{если } j \geq n, \end{cases} \quad (1.1)$$

являются симметрическими многочленами относительно собственных значений матрицы M . Будем называть их *симметрическими многочленами матрицы M n -го порядка*.

Если матрица M невырожденная, то многочлены $\mathcal{B}_j(n)$, определяемые рекуррентными формулами (1.1), существуют для любого целого j . А именно, для $j < 0$ имеем

$$\mathcal{B}_j(n) = \frac{1}{p_n}(\mathcal{B}_{j+n}(n) - p_1\mathcal{B}_{j+n-1}(n) - \cdots - p_{n-1}\mathcal{B}_{j+1}(n)). \quad (1.2)$$

Симметрические многочлены $\mathcal{B}_j(2)$ несложно выразить явным образом через собственные числа λ_j . Так решениями уравнений (1.1) при $n = 2, 3, 4$ являются функции [2]

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_j(2) &= \frac{\lambda_2^j - \lambda_1^j}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\ \mathcal{B}_j(3) &= \frac{\lambda_1^j\lambda_3 - \lambda_1^j\lambda_2 + \lambda_2^j\lambda_1 - \lambda_2^j\lambda_3 + \lambda_3^j\lambda_2 - \lambda_3^j\lambda_1}{\lambda_1^2\lambda_3 - \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_2^2\lambda_1 - \lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_3^2\lambda_2 - \lambda_3^2\lambda_1}, \quad \mathcal{B}_j(4) = \frac{u}{d}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где в последней формуле для упрощения записи использованы обозначения

$$\begin{aligned} u &= \lambda_1^j[\lambda_2^2(\lambda_3 - \lambda_4) + \lambda_3^2(\lambda_4 - \lambda_2) + \lambda_4^2(\lambda_2 - \lambda_3)] \\ &\quad + \lambda_2^j[\lambda_3^2(\lambda_1 - \lambda_4) + \lambda_4^2(\lambda_3 - \lambda_1) + \lambda_1^2(\lambda_4 - \lambda_3)] \\ &\quad + \lambda_3^j[\lambda_4^2(\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_1^2(\lambda_2 - \lambda_4) + \lambda_2^2(\lambda_4 - \lambda_1)] \\ &\quad + \lambda_4^j[\lambda_1^2(\lambda_3 - \lambda_2) + \lambda_2^2(\lambda_1 - \lambda_3) + \lambda_3^2(\lambda_2 - \lambda_1)], \\ d &= \lambda_1^3[\lambda_2^2(\lambda_3 - \lambda_4) + \lambda_3^2(\lambda_4 - \lambda_2) + \lambda_4^2(\lambda_2 - \lambda_3)] \\ &\quad + \lambda_2^3[\lambda_3^2(\lambda_1 - \lambda_4) + \lambda_4^2(\lambda_3 - \lambda_1) + \lambda_1^2(\lambda_4 - \lambda_3)] \\ &\quad + \lambda_3^3[\lambda_4^2(\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_1^2(\lambda_2 - \lambda_4) + \lambda_2^2(\lambda_4 - \lambda_1)] \\ &\quad + \lambda_4^3[\lambda_1^2(\lambda_3 - \lambda_2) + \lambda_2^2(\lambda_1 - \lambda_3) + \lambda_3^2(\lambda_2 - \lambda_1)]. \end{aligned}$$

Отметим, что вычисление собственных многочленов $\mathcal{B}_j(n)$ более быстро (по числу операций сложения и умножения) и, следовательно, более точно выполняется по рекуррентным формулам (1.1), чем по соответствующим равенствам (1.3), явно выражающим многочлены $\mathcal{B}_j(n)$ через собственные значения матрицы.

В ряде случаев [3] многочлены $\mathcal{B}_j(n)$ имеют представления с помощью ортогональных полиномов.

2. Представление функций матриц с помощью симметрических многочленов. Оно основано на следующей теореме о целочисленных степенях матрицы.

ТЕОРЕМА. Любая целочисленная степень j невырожденной матрицы M n -го порядка может быть представлена с помощью ее симметрических многочленов $\mathcal{B}_j(n)$ через n первых степеней $M^0 \equiv I, M, \dots, M^{n-1}$ формулами

$$\begin{aligned} M^j &= I[\mathcal{B}_{j+n-1}(n) - p_1\mathcal{B}_{j+n-2}(n) - \cdots - p_{n-1}\mathcal{B}_j(n)] \\ &\quad + M[\mathcal{B}_{j+n-2}(n) - p_1\mathcal{B}_{j+n-3}(n) - \cdots - p_{n-2}\mathcal{B}_j(n)] + \cdots \\ &\quad + M^{n-2}[\mathcal{B}_{j+1}(n) - p_1\mathcal{B}_j(n)] + M^{n-1}[\mathcal{B}_j(n)] \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} M^l \sum_{g=0}^l p_{n-l+g} \mathcal{B}_{j-1-g}(n). \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (2.2) – это лишь другая, более удобная для расчетов форма равенства (2.1), которая получается из последнего заменой каждого выражения в квадратных скобках с помощью определения (1.1) симметрических многочленов n -го порядка. Поэтому доказательство формулы (2.1) является обоснованием и (2.2).

Равенство (2.1) легко проверяется при $j = 0, 1, \dots, n-1$ и доказано [4; с. 274] по индукции для $j \geq n$.

Доказательство (2.1) для отрицательных степеней j также выполняется по индукции. По формуле (1.2) $\mathcal{B}_{-1}(n) = 1/p_n$, и по теореме Гамильтона–Кэли находим

$$M^{-1} = \frac{M^{n-1} - p_1 M^{n-2} - \dots - p_{n-1} I}{p_n}.$$

Предполагая выполнение (2.1) при некотором $j = k \leq 0$, вычисляем M^{k-1} как произведение матриц M^k и M^{-1} :

$$\begin{aligned} M^{k-1} &= M^k M^{-1} = M^{-1}(\mathcal{B}_{k+n-1}(n) - p_1 \mathcal{B}_{k+n-2}(n) - \dots - p_{n-1} \mathcal{B}_k(n)) \\ &\quad + I(\mathcal{B}_{k+n-2}(n) - p_1 \mathcal{B}_{k+n-3}(n) - \dots - p_{n-2} \mathcal{B}_k(n)) + \dots \\ &\quad + M^{n-3}(\mathcal{B}_{k+1}(n) - p_1 \mathcal{B}_k(n)) + M^{n-2} \mathcal{B}_k(n) \\ &= (M^{n-1} - p_1 M^{n-2} - \dots - p_{n-1} I) \mathcal{B}_{k-1}(n) \\ &\quad + I(\mathcal{B}_{k+n-2}(n) - p_1 \mathcal{B}_{k+n-3}(n) - \dots - p_{n-2} \mathcal{B}_k(n)) + \dots \\ &\quad + M^{n-3}(\mathcal{B}_{k+1}(n) - p_1 \mathcal{B}_k(n)) + M^{n-2} \mathcal{B}_k(n) \\ &= I(\mathcal{B}_{k+n-2}(n) - p_1 \mathcal{B}_{k+n-3}(n) - \dots - p_{n-1} \mathcal{B}_{k-1}(n)) \\ &\quad + M(\mathcal{B}_{k+n-3}(n) - p_1 \mathcal{B}_{k+n-4}(n) - \dots - p_{n-2} \mathcal{B}_{k-1}(n)) + \dots \\ &\quad + M^{n-2}(\mathcal{B}_k(n) - p_1 \mathcal{B}_{k-1}(n)) + M^{n-1} \mathcal{B}_{k-1}(n). \end{aligned}$$

Получился результат, совпадающий с тем, что дает формула (2.1) при $j = k-1$, что и требовалось доказать.

Заметим, что для случая $j \geq 0$ теорема (2.1) справедлива для любых матриц.

Формула (2.1) позволяет получить аналитические выражения степеней некоторых матриц через ортогональные полиномы. Примеры таких представлений с помощью полиномов Чебышёва второго рода даны в [3].

Как известно (см., например [1; гл. V, § 4]), разложение целой функции $f(\zeta)$ в степенной ряд $f(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \zeta^j$ сохраняет силу, если скалярный аргумент ζ заменить любой квадратной матрицей M : $f(M) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j M^j$. Используя этот факт совместно с теоремой (2.1), получаем

СЛЕДСТВИЕ. Целая функция $f(Mz)$ произведения любой квадратной матрицы M порядка n и скаляра z может быть представлена с помощью симметрических многочленов матрицы M в виде

$$f(Mz) = \sum_{l=0}^{n-1} M^l \sum_{g=0}^l p_{n-l+g} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j z^j \mathcal{B}_{j-1-g}(n) \quad (2.3)$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} M^l \left(\alpha_l z^l + \sum_{g=0}^l p_{n-l+g} \sum_{j=n}^{\infty} \alpha_j z^j \mathcal{B}_{j-1-g}(n) \right), \quad (2.4)$$

где α_k – коэффициенты разложения целой функции $f(\zeta)$ комплексной переменной ζ в степенной ряд в окрестности нуля.

Представление (2.3) удобно использовать для получения аналитических выражений функций матриц, а (2.3) – для разработки методов численных расчетов $f(Mz)$.

В качестве примеров применения представления (2.3) ниже показан вывод формул для некоторых функций матриц второго порядка. Используем $\mathcal{B}_j(2)$ из формул (1.3) и учтем, что собственные значения $\lambda_{1,2}$ матрицы второго порядка выражаются через элементарные симметрические многочлены $\sigma_{1,2}$ следующим образом: $\lambda_{1,2} = (\sigma_1/2) \pm is$, $s = \sqrt{\sigma_2 - \sigma_1^2/4}$.

ПРИМЕР 1. Для матрицы M второго порядка по формуле (2.3) находим

$$\exp(Mz) = Ip_2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \mathcal{B}_{j-1}(2) + M \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \mathcal{B}_j(2),$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \mathcal{B}_{j-1}(2) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[\frac{e^{\lambda_2 z}}{\lambda_2} - \frac{e^{\lambda_1 z}}{\lambda_1} \right] = \frac{\exp(\sigma_1 z/2)}{\sigma_2} \left[\frac{\sigma_1}{2s} \sin(sz) - \cos(sz) \right].$$

Аналогично $\sum_{j=0}^{\infty} (z^j/(j!)) \mathcal{B}_j(2) = \exp(\sigma_1 z/2) \sin(sz)/s$. В результате получаем

$$\exp(Mz) = \exp\left(\frac{\sigma_1 z}{2}\right) \left[\frac{1}{s} \left(M - I \frac{\sigma_1}{2} \right) \sin(sz) + I \cos(sz) \right]. \quad (2.5)$$

Используя равенство (2.5), легко получить следующие формулы:

$$\begin{aligned} \sin(Mz) &= \frac{e^{iMz} - e^{-iMz}}{2i} = \left(M - I \frac{\sigma_1}{2} \right) \frac{\text{sh}(sz)}{s} \cos\left(\frac{\sigma_1 z}{2}\right) + I \text{ch}(sz) \sin\left(\frac{\sigma_1 z}{2}\right), \\ \cos(Mz) &= \frac{e^{iMz} + e^{-iMz}}{2} = -\left(M - I \frac{\sigma_1}{2} \right) \frac{\text{sh}(sz)}{s} \sin\left(\frac{\sigma_1 z}{2}\right) + I \text{ch}(sz) \cos\left(\frac{\sigma_1 z}{2}\right), \\ \text{sh}(Mz) &= \frac{e^{Mz} - e^{-Mz}}{2} = \left(M - I \frac{\sigma_1}{2} \right) \frac{\sin(sz)}{s} \text{ch}\left(\frac{\sigma_1 z}{2}\right) + I \cos(sz) \text{sh}\left(\frac{\sigma_1 z}{2}\right), \\ \text{ch}(Mz) &= \frac{e^{Mz} + e^{-Mz}}{2} = \left(M - I \frac{\sigma_1}{2} \right) \frac{\sin(sz)}{s} \text{sh}\left(\frac{\sigma_1 z}{2}\right) + I \cos(sz) \text{ch}\left(\frac{\sigma_1 z}{2}\right). \end{aligned}$$

Примеры аналитического суммирования в формуле (2.3) при вычислении экспонент некоторых матриц четвертого порядка представлены в [5].

Рассмотрим далее применение формул (2.2) и (2.4) в сочетании с рекуррентным алгоритмом (1.1) нахождения многочленов $\mathcal{B}_j(n)$ с точки зрения численных расчетов функций матриц.

3. Метод симметрических многочленов при численных расчетах функций матриц. Оценка эффективности различных алгоритмов может быть проведена на основе сравнения трудоемкости (например, по числу операций сложения и умножения) их выполнения. Начнем с оценки метода симметрических многочленов (МСМ) применительно к степенным функциям.

Последовательность действий при вычислении степеней квадратной матрицы по формуле (2.2) можно условно разделить на следующие четыре этапа:

- 1) вычисление степеней матрицы M со второй по n -ю включительно и нахождение следа $s_g = \text{tr } M^g$ каждой из матриц M^g , $g = 1, \dots, n$;
- 2) последовательное вычисление коэффициентов p_g , определяющих симметрические многочлены n -го порядка, можно выполнить по формуле Ньютона [1; с. 91] $gp_g = s_g - p_1 s_{g-1} - \dots - p_{g-1} s_1$, $g = 1, 2, \dots, n$;
- 3) многочлены $\mathcal{B}_j(n)$ последовательно определяются по формулам (1.1) через ранее найденные $\mathcal{B}_{j-1}(n), \dots, \mathcal{B}_{j-n}(n)$;
- 4) по формуле (2.2) вычисляется M^j .

Число операций сложения и умножения, необходимое для выполнения каждого этапа, дано в таблице. Общее число сложений и умножений, которое требуется для вычисления j -й степени матрицы n -го порядка M^j , $j > n$, по МСМ, равно

$$N_1 = n^2(2n-1)(n-1) + (2n-1)j + 2n^3.$$

Если же вычислять M^j как $j-1$ произведение матриц M , то для нахождения одного элемента матрицы M^j потребуется $N_2 = n^2(2n-1)(j-1)$ сложений и умножений.

ТАБЛИЦА. Число операций сложения и умножения по МСМ

№	Операции этапа	число сложений	число умножений
1	$M^2 = MM$, $M^3 = M^2M$, $\dots$, $M^n = M^{n-1}M$ $s_g = \text{Tr } M^g$, $g = 1, \dots, n$	$n^2(n-1)(n-1)$ $n(n-1)$	$n^2n(n-1)$ 0
2	$p_1 = s_1/1$ $p_2 = (s_2 - p_1 s_1)/2$ $\vdots$ $p_n = (s_n - p_1 s_{n-1} - \dots - p_{n-1} s_1)/n$	0 1 $\vdots$ $n-1$	1 2 $\vdots$ n
3	$\mathcal{B}_l(n) = p_1 \mathcal{B}_{l-1}(n) + \dots + p_n \mathcal{B}_{l-n}(n)$ $l = n, n+1, \dots, j-1$	$(n-1)(j-n)$	$n(j-n)$
4	$M^j = I p_n \mathcal{B}_{j-1}(n)$ $+ M(p_{n-1} \mathcal{B}_{j-1}(n) + p_n \mathcal{B}_{j-1}(n))$ $+ \dots$ $+ M^{n-1}(p_1 \mathcal{B}_{j-1}(n) + \dots + p_n \mathcal{B}_{j-n}(n))$	0 $1 + n^2$ $\vdots$ $n-1 + n^2$	$n^2 + 1$ $n^2 + 2$ $\vdots$ $n^2 + n$

Несложно показать, что

$$\frac{N_2}{N_1} > 1, \quad \text{если } j > n+1 + \frac{3n^2 + n - 1}{(2n-1)(n^2-1)}.$$

Отсюда находим, что если $n \geq 3$, то при возведении матрицы в j -ю степень МСМ в сравнении со вторым методом требует меньшее число операций сложения и умножения, начиная со значений $j = n+2$. Предельное значение N_2/N_1 при $j \rightarrow \infty$ равно n^2 .

Аналогичные соображения обосновывают целесообразность применения МСМ в вычислениях степеней M^j в разложении $f(Mz) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j M^j z^j$, т.е. представления $f(Mz)$ в формуле (2.4) с помощью $\mathcal{B}_j(n)$.

4. Метод масштабирования. При вычислении матричной экспоненты и других функций, выражаемых через нее, удобно использовать фундаментальное свойство экспоненциальной функции: $\exp M = (\exp(M/k))^k$. Нужно выбрать такое целое k , для которого матрица

$$A = \exp\left(\frac{1}{k} M\right) = \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k} M\right)^l \frac{1}{l!} \left[1 + l! \sum_{g=0}^l p_{n-l+g} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathcal{B}_{j-1-g}(n)\right] \quad (4.1)$$

может быть надежно и эффективно вычислена, т.е. обеспечивается быстрая сходимость ряда $\sum_{j=n}^{\infty} \mathcal{B}_{j-1-g}(n)/(j!)$, в котором $\mathcal{B}_{j-1-g}(n)$ – симметрические многочлены матрицы M/k . После этого находится $\exp M = A^k$ (если $k > n + 2$, используя симметрические многочлены матрицы A , по формуле (2.2)).

Оценим величину k , необходимую для указанной выше процедуры. Элементарный симметрический многочлен σ_j матрицы M n -го порядка равен сумме главных миноров j -го порядка определителя матрицы M . Таких миноров C_n^j . Минор j -го порядка содержит $j!$ слагаемых, каждое из которых является произведением j элементов матрицы M . Обозначим наибольшее по модулю значение элемента m_{gl} матрицы M через $\max |m_{gl}|$. Очевидно, что модуль $|\sigma_j|$ элементарного симметрического многочлена σ_j матрицы M не превосходит $C_n^j j! (\max |m_{gl}|)^j$.

Следовательно, коэффициенты p_j , определяющие симметрические многочлены n -го порядка матрицы M/k , удовлетворяют неравенствам

$$|p_j| \leq p_{jM} = \frac{n!}{(n-j)!} \left(\frac{\max |m_{gl}|}{k}\right)^j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2)$$

Используем эти условия и определение (1.1) для оценки модулей $|\mathcal{B}_j(n)|$ симметрических многочленов n -го порядка матрицы M/k .

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_j(n)| &\leq \sum_{l=1}^n p_{lM} |\mathcal{B}_{j-l}(n)| \\ &\leq p_{1M} (p_{1M} |\mathcal{B}_{j-2}(n)| + \dots + p_{nM} |\mathcal{B}_{j-n-1}(n)|) \\ &\quad + p_{2M} |\mathcal{B}_{j-2}(n)| + \dots + p_{(n-1)M} |\mathcal{B}_{j-n+1}(n)| + p_{nM} |\mathcal{B}_{j-n}(n)| \\ &= \frac{p_{1M}^2 + p_{2M}}{p_{1M}} \sum_{l=1}^n c_l |\mathcal{B}_{j-1-l}(n)|. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь

$$c_l = p_{lM} \frac{p_{1M}^2 + p_{1M} p_{(l+1)M} / p_{lM}}{p_{1M}^2 + p_{2M}}, \quad l = 0, 1, \dots, n-1, \quad c_n = p_{nM} \frac{p_{1M}^2}{p_{1M}^2 + p_{2M}}.$$

Применяя (4.2), находим

$$\frac{p_{1M}^2 + p_{2M}}{p_{1M}} = \frac{2n-1}{n} p_{1M}, \quad \frac{p_{1M} p_{(l+1)M}}{p_{lM}} < p_{2M}, \quad l = 0, \dots, n.$$

Отсюда $c_l < p_{lM}$, $l = 0, \dots, n$. Эти соотношения позволяют переписать формулу (4.3) в виде

$$|\mathcal{B}_j(n)| \leq \sum_{l=1}^n p_{lM} |\mathcal{B}_{j-l}(n)| < \frac{2n-1}{n} p_{1M} \sum_{l=1}^n p_{lM} |\mathcal{B}_{j-1-l}(n)|. \quad (4.4)$$

Сравнивая неравенства (4.4) и продолжая процесс понижения индекса у симметрических многочленов n -го порядка в правой части последнего неравенства, приходим к следующему результату:

$$|\mathcal{B}_j(n)| < \left(\frac{2n-1}{n} p_{1M}\right)^{j-n} \sum_{l=1}^n p_{lM} |\mathcal{B}_{n-l}(n)| = p_{1M} \left(\frac{2n-1}{n} p_{1M}\right)^{j-n}. \quad (4.5)$$

Соответственно, для сумм в квадратных скобках формулы (4.1) получаем

$$\begin{aligned} |S| &= \left| l! \sum_{g=0}^l p_{n-l+g} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathcal{B}_{j-1-g}(n) \right| \leq l! \sum_{g=0}^l |p_{n-l+g}| \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} |\mathcal{B}_{j-1-g}(n)| \\ &< l! \sum_{g=0}^l \frac{n!}{(l-g)!} \left(\frac{\max |m_{gl}|}{k} \right)^{n-l+g} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} p_{1M} \left(\frac{2n-1}{n} p_{1M} \right)^{j-n-1-g} \\ &= \frac{n}{(2n-1)^{n-l+1}} \sum_{g=0}^l \frac{l!}{(l-g)! (2n-1)^g} x^{n-l} \left(1 + \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \dots \right). \end{aligned}$$

Здесь $x = (2n-1) \max |m_{gl}|/k$, а l может принимать значения $0, 1, \dots, n-1$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \frac{n}{(2n-1)^{n-l+1}} \sum_{g=0}^l \frac{l!}{(l-g)! (2n-1)^g} &< \frac{n}{(2n-1)^2} \sum_{g=0}^{n-1} \frac{(n-1)^g}{(2n-1)^g} \\ &= \frac{1}{2n-1} \left(1 - \left(\frac{n-1}{2n-1} \right)^n \right) < \frac{1}{2n-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$|S| < \frac{1}{2n-1} x^{n-l} \left(1 + \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \dots \right).$$

Дальнейшие преобразования этого соотношения выполним в предположении, что $x/(n+1) < 1$.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \dots \right) &= \left(1 + \frac{x}{n+1} + \left(\frac{x}{n+1} \right)^2 \frac{n+1}{n+2} + \dots \right) \\ &< \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x}{n+1} \right)^i = \frac{1}{1 - x/(n+1)} = \frac{n+1}{n+1-x}. \end{aligned}$$

В результате получаем следующую оценку величины $|S|$:

$$|S| < \frac{n+1}{(n+1-x)(2n-1)} x^{n-l}, \quad \text{где } x = (2n-1) \frac{\max |m_{gl}|}{k} < n+1. \quad (4.6)$$

В частности, $|S| < 1/2$, если $x < 1$.

Найдем теперь погрешность, которую вызывает замена ряда $\sum_{j=n}^{\infty} \mathcal{B}_{j-1-g}(n)/j!$ конечной суммой $\sum_{j=n}^{n+i} \mathcal{B}_{j-1-g}(n)/j!$. При такой аппроксимации величина, выделенная в формуле (4.1) квадратными скобками, будет вычисляться с абсолютной

погрешностью, не превосходящей

$$|\Delta S_i| = \left| l! \sum_{g=0}^l p_{n-l+g} \sum_{j=n+i+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathcal{B}_{j-1-g}(n) \right|.$$

Выполнив оценку данного выражения подобно тому, как это было сделано для $|S|$, несложно показать, что относительная погрешность вычислений, обусловленная усечением ряда, при условии $x < 1$, не превысит

$$\varepsilon = \left| \frac{\Delta S_i}{1+S} \right| < 2|\Delta S_i| < \frac{1}{(n+1) \cdots (n+i)} \frac{x^{i+1}}{i+n}. \quad (4.7)$$

ПРИМЕР 2. Пусть коэффициент масштабирования k матрицы четвертого порядка равен наименьшему целому, удовлетворяющему условию $k \geq 10(2n-1) \max |m_{gl}|$. В этом случае $x \leq 10^{-1}$ и аппроксимация ряда $\sum_{j=n}^{\infty} \mathcal{B}_{j-1-g}(4)/(j!)$ суммой первых трех слагаемых обеспечивает проведение вычислений с относительной погрешностью ε менее 10^{-5} .

Если для выполнения условия $x < n+1$ требуется достаточно большое значение k , последнее удобно взять в виде степени двойки: а именно, $k = 2^l$, где l – целое число. Например, если необходимо уменьшить элементы матрицы (масштабировать матрицу) более чем в 1000 раз, то целесообразно взять $k = 2^{10} = 1024$ и проводить вычисления A^k с использованием повторного возведения в квадрат.

5. Заключение. Представление целых функций матриц с помощью симметрических многочленов в виде формулы (2.3) (или (2.4)) замечательно в двух отношениях. Во-первых, из (2.3) могут быть получены аналитические формулы для функций матриц 2–4 порядков, выражающие эти функции через главные миноры матрицы. Во-вторых, представление (2.3) является основой для разработки новых методов численного расчета функций матриц, не требующих для своей реализации вычисления собственных значений матрицы. Два примера таких методов, а именно МСМ, применительно к расчету M^j , и МСМ с масштабированием, применительно к $\exp M$, были представлены в данной работе. По совокупности таких свойств, как простота программирования, легкость использования, надежность и точность они при вычислении указанных функций матриц общего вида, не имеют себе равных.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1988.
- [2] Ю. Н. Беляев, “Метод рекуррентного расчета степеней матриц”, *Алгебра и геометрия*, Тезисы Международной конференции (Екатеринбург, 22–27 августа 2011 г.), УМЦ–УПИ, Екатеринбург, 2011, 23–26.
- [3] Ю. Н. Беляев, “Матричный метод расчета перерассеяния волн в периодической структуре”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **2(23)** (2011), 142–148.
- [4] Ю. Н. Беляев, *Векторный и тензорный анализ*, Изд-во СыктГУ, Сыктывкар, 2010.
- [5] Ю. Беляев, *Матричный подход теории волн к слоистым средам*, Lambert Acad. Publ., Saarbrücken, 2012.

Ю. Н. Беляев

Сыктывкарский государственный университет

E-mail: ybelyayev@mail.ru

Поступило

03.03.2012

Исправленный вариант

30.09.2012