Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Н. Белянова, И. В. Блудова, О гомеоморфизме непрерывных отображений, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 2, 183–189

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9346>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 12:26:13

О гомеоморфизме непрерывных отображений

Э. Н. Беянова, И. В. Блудова

Через $\mathcal{C}(X)$ обозначается частично упорядоченное (ЧУ) множество всех непрерывных эпиморфизмов пространства X при естественном отождествлении гомеоморфных эпиморфизмов. В работе Магилла (1968) в неявном виде содержится теорема о гомеоморфизме бикомпактов: бикомпакты X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны ЧУ множества $\mathcal{C}(X)$ и $\mathcal{C}(Y)$.

В настоящей статье теорема Магилла распространяется на категорию отображений, в которой роль бикомпактов играют совершенные отображения. Получены результаты в двух вариантах: в категории TOP_Z (треугольных коммутативных диаграмм) и в категории MAP (четырёхугольных коммутативных диаграмм).

Библиография: 5 названий.

DOI: 10.4213/mzm9346

1. Введение. Ниже под пространством понимается топологическое T_2 -пространство, под непрерывным отображением – непрерывное отображение пространств.

Непрерывные отображения “на” λ и μ пространства X будут отождествляться при помощи (однозначно определенного) гомеоморфизма $h: \lambda X \rightarrow \mu X$, если таковой существует. После такого отождествления мы получаем множество $\mathcal{C}(X)$, элементы которого также будут называться непрерывными отображениями “на” пространства X . Для $\lambda \in \mathcal{C}(X)$ положим $\text{Im}(\lambda) = \lambda(X)$.

Для $\lambda, \mu \in \mathcal{C}(X)$ будем считать, что μ следует за λ , и писать $\lambda < \mu$, если существует непрерывное отображение $h: \text{Im}(\mu) \rightarrow \text{Im}(\lambda)$ такое, что $\lambda = h \circ \mu$. Очевидно, $\mathcal{C}(X)$ есть частично упорядоченное (ЧУ) множество. В дальнейшем $\mathcal{P}(X)$ обозначает ЧУ подмножество всех совершенных отображений из $\mathcal{C}(X)$.

В 1968 г. Магилл (см. [1]), доказывая свою известную теорему (далее ТМ) о гомеоморфизме стоун-чеховских наростов $\beta X \setminus X$ и $\beta Y \setminus Y$ локально бикомпактных пространств X и Y , неявно доказал теорему (далее она будет называться *теоремой Магилла о гомеоморфизме бикомпактов*) о том, что два бикомпакта X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны ЧУ множества $\mathcal{C}(X)$ и $\mathcal{C}(Y)$. В статье [2] получено обобщение теоремы Магилла о гомеоморфизме бикомпактов на случай k -пространств для распространения ТМ и ее частичного обобщения в [3] на наросты не только стоун-чеховских бикомпактификаций не только локально бикомпактных пространств. В работах [4] и [5] содержатся распространения ТМ на случай непрерывных отображений, для чего получаются некоторые обобщения теоремы

о гомеоморфизме k -пространств на непрерывные отображения в категории TOP_Z . Ниже в этой статье теорема Магилла о гомеоморфизме бикомпактов распространяется на бикомпактные (т.е. совершенные) отображения как в категории TOP_Z (треугольных коммутативных диаграмм), так и в категории MAP (четырёхугольных коммутативных диаграмм). Во втором случае (четырёхугольных диаграмм) предшествующих результатов не было. В первом случае (треугольных диаграмм) полученный результат и его доказательство существенно отличаются от предшествующих.

2. Гомеоморфизм совершенных отображений. Отображение $\lambda \in \mathcal{P}(X)$ называется *дуальной точкой*, если существует единственная точка $t_\lambda \in \lambda(X)$ с неотноточечным прообразом и $|\lambda^{-1}(t_\lambda)| = 2$; ЧУ подмножество всех дуальных точек в $\mathcal{P}(X)$ обозначается через $\mathcal{D}(X)$.

Семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}(X)$ называется *трехвершинным*, если для любых двух разных $\alpha, \beta \in \mathcal{D}(X)$ можно взять $\gamma \in \mathcal{D}(X) \setminus \mathcal{F}$ так, что $\gamma > \inf\{\alpha, \beta\}$. Трехвершинное семейство $\mathcal{F}$ называется *точечным*, если оно максимально (т.е. любое трехвершинное семейство, содержащее $\mathcal{F}$, совпадает с $\mathcal{F}$).

В пространстве X мощности $|X| > 2$ (см. [2]) выполнены следующие утверждения:

- 1) множество $J_X(\mathcal{F}) = \bigcap \mathcal{F}$ одноточечно для любого точечного семейства $\mathcal{F}$;
- 2) семейство $K_X(x) = \{\delta \in \mathcal{D}(X) : x \in \delta^{-1}t_\delta\}$ точно для всех $x \in X$;
- 3) $J_X(K_X(x)) = x$ для любой точки $x \in X$ и $K_X(J_X(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$ для любого точечного семейства $\mathcal{F}$.

Напомним, что взаимно однозначное (возможно, не непрерывное) отображение пространств $g: X \rightarrow X'$ называется *k-гомеоморфизмом* [3], если для любых бикомпактов $C \subset X$ и $D \subset Y$ ограничения $g|_C$ и $g^{-1}|_D$ являются топологическими вложениями. Очевидно, любой *k-гомеоморфизм k-пространств является гомеоморфизмом*.

Следующее утверждение доказано в теореме 13 из [2].

ТЕОРЕМА BNP. Для пространств X_1, X_2 существует *k-гомеоморфизм* $h_i: X_1 \rightarrow X_2$, если существует изоморфизм ЧУ множеств

$$i: \mathcal{P}(X_1) \rightarrow \mathcal{P}(X_2)$$

(если $\max\{|X_1|, |X_2|\} > 2$, то можно считать $h_i(x) = J_{X'}(i(K_X(x)))$, $x \in X_1$). Для гомеоморфных пространств X_1, X_2 ЧУ множества $\mathcal{P}(X_1), \mathcal{P}(X_2)$ изоморфны. Гомеоморфность *k-пространств* X_1 и X_2 равносильна изоморфности ЧУ множеств $\mathcal{P}(X_1)$ и $\mathcal{P}(X_2)$.

2.1. Частично упорядоченные множества, связанные с совершенным отображением, образы точечных семейств. Пусть Y есть подпространство пространства Z .

Напомним, что для отображения $\lambda \in \mathcal{C}(Z)$ коограничение $\text{cor}(\lambda|_Y)$ его ограничения на Y есть отображение Y на λY такое, что $\text{cor}(\lambda|_Y)(z) = \lambda(z)$ для всех $z \in Y$, а его коограничение $\text{cor} \lambda$ есть $\text{cor}(\lambda|_Z)$.

Для замкнутого множества Y в Z определим отображение $\text{cor}(|_{ZY}): \mathcal{P}(Z) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$, полагая

$$\text{cor}(|_{ZY})(\lambda) = \text{cor}(\lambda|_Y), \quad \lambda \in \mathcal{P}(Z).$$

Следующее утверждение очевидно (напомним, что отображение между ЧУ множествами $t: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ монотонно, если $t(\lambda) < t(\mu)$ для $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$, $\lambda < \mu$).

ЛЕММА 1. *Отображение $\text{cor}(|_{ZY})$ монотонно.*

Пусть $\mu \in \mathcal{P}(Y)$. Возьмем множество $T = \text{Im}(\mu) \cup (Z \setminus Y)$ и такое отображение $\text{ext}_{YZ}(\mu): Z \rightarrow T$, что

$$\text{ext}_{YZ}(\mu)(z) = \begin{cases} \mu(z), & z \in Y, \\ z, & z \in (Z \setminus Y). \end{cases}$$

Возьмем на T факторную топологию, определяемую отображением $\text{ext}_{YZ}(\mu)$. Очевидно, подпространства $\text{Im}(\mu)$ и $Z \setminus Y$ пространства T совпадают с пространством $\text{Im}(\mu)$ и подпространством $Z \setminus Y$ пространства Z соответственно. Все слои отображения $\text{ext}_{YZ}(\mu)$ компактны. Если множество F замкнуто в Z , то множество

$$(\text{ext}_{YZ}(\mu))^{-1}(\text{ext}_{YZ}(\mu)(F)) = F \cup \mu^{-1}(\mu(F \cap Y))$$

замкнуто в Z и поэтому множество $\text{ext}_{YZ}(\mu)(F)$ замкнуто в T . Следовательно, отображение $\text{ext}_{YZ}(\mu)$ совершенно, пространство T хаусдорфово и $\text{ext}_{YZ}(\mu) \in \mathcal{P}(Z)$. Следовательно, имеем отображение

$$\text{ext}_{YZ}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(Z).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Выполнены равенства*

$$\text{cor}(|_{ZY}) \circ \text{ext}_{YZ} = \text{id}_{\mathcal{P}(Y)}, \quad \text{cor}(|_{ZY})\mathcal{P}(Z) = \mathcal{P}(Y), \quad \text{ext}_{YZ} \mathcal{D}(Y) \subset \mathcal{D}(Z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Следующее утверждение доказано в теореме 3.4 из [4].

ТЕОРЕМА NP. *Пусть даны пространства Z_i , их замкнутые подмножества Y_i мощности $|Y_i| > 2$, $i = 1, 2$, изоморфизмы ЧУ множеств*

$$i_{12Z}: \mathcal{P}(Z_1) \rightarrow \mathcal{P}(Z_2) \quad \text{и} \quad i_{12Y}: \mathcal{P}(Y_1) \rightarrow \mathcal{P}(Y_2)$$

такие, что

$$i_{12Y} \circ \text{cor}(|_{Z_1 Y_1}) = \text{cor}(|_{Z_2 Y_2}) \circ i_{12Z}.$$

Тогда (см. теорему BNP) для k -гомеоморфизмов $h_{12T}: T_1 \rightarrow T_2$ таких, что

$$h_{12T} = J_{T_2} \circ i_{12T} \circ K_{T_1}, \quad \text{где } T = Z, Y,$$

выполнено

$$h_{12Y}(x) = h_{12Z}(x), \quad x \in Y_1 \quad (\text{и } h_{12Y}(Y_1) = Y_2).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Так как $\text{cor}(|_{Z_k Y_k})(\mathcal{P}(Z_k)) = \mathcal{P}(Y_k)$, $k = 1, 2$, то мы имеем (в предположениях теоремы NP) равенство

$$i_{12Z}(\mathcal{P}(Y_1)) = \mathcal{P}(Y_2).$$

Для $Z_1 = Z_2 = Z$ и $i_{12Z} = \text{id}_{\mathcal{P}(Z)}$ теорема NP может быть переформулирована следующим образом.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть для пространства Z и его замкнутых подмножеств Y_i мощности $|Y_i| > 2$, $i = 1, 2$, дан изоморфизм ЧУ множеств $i_{12Y}: \mathcal{P}(Y_1) \rightarrow \mathcal{P}(Y_2)$ такой, что

$$i_{12Y} \circ \text{cor}(|_{Z_1 Y_1}) = \text{cor}(|_{Z_2 Y_2}).$$

Тогда для k -гомеоморфизма $h_{12Y}: Y_1 \rightarrow Y_2$ такого, что $h_{12Y} = J_{Y_2} \circ i_{12Y} \circ K_{Y_1}$, выполнено

$$h_{12Y} = \text{id}_{Y_1} \quad (u \quad Y_1 = Y_2).$$

Пусть отображение $F: X \rightarrow Z$ совершенно. Тогда для любого $\lambda \in \mathcal{P}(Z)$ определено отображение $F^*(\lambda) = \text{cor}(\lambda \circ F)$ из $\mathcal{P}(X)$ и, следовательно, определено отображение $F^*: \mathcal{P}(Z) \rightarrow \mathcal{P}(X)$. (Отметим, что $F^*(\lambda) = \lambda \circ F$, если F есть отображение “на”.) Положим

$$\mathcal{P}(X, F) = F^*(\mathcal{P}(Z)) \quad \text{и} \quad i_F = \text{cor } F^*.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Отображение F^* монотонно. Если F есть отображение “на”, то $i_F: \mathcal{P}(Z) \rightarrow \mathcal{P}(X, F)$ есть изоморфизм ЧУ множеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\lambda, \mu \in \mathcal{P}(Z)$.

Если $\lambda < \mu$, то существует непрерывное отображение $a: \mu(Z) \rightarrow \lambda(Z)$ такое, что $a \circ \mu = \lambda$. Тогда

$$F^*(\lambda) = \text{cor}(\lambda \circ F) = \text{cor}(a \circ \mu \circ F) = b \circ (\text{cor}(\mu \circ F)),$$

где b есть коограничение ограничения отображения a на $(\mu \circ F)X$. Следовательно, $F^*(\lambda) < F^*(\mu)$ и отображение F^* монотонно.

Пусть теперь F есть отображение “на”. Тогда

$$F^*(\lambda) = \lambda \circ F, \quad \lambda \in \mathcal{P}(Z).$$

Предположим, что $i_F(\lambda) = i_F(\mu)$. Возьмем $z \in Z$. Тогда существует точка $x \in X$, для которой $Fx = z$, и поэтому

$$\lambda(z) = \lambda \circ F(x) = i_F(\lambda)(x) = i_F(\mu)(x) = \mu \circ F(x) = \mu(z).$$

Следовательно, $\lambda = \mu$ и отображение i_F взаимно однозначно. Пусть $\xi, \eta \in \mathcal{P}(X, F)$ и $\xi < \eta$, т.е. существует непрерывное отображение $b: \eta(X) \rightarrow \xi(X)$, для которого $b \circ \eta = \xi$. Возьмем $\lambda, \mu \in \mathcal{P}(Z)$ так, что $i_F(\lambda) = \xi$, $i_F(\mu) = \eta$. Тогда

$$b \circ \mu \circ F = b \circ \eta = \xi = \lambda \circ F.$$

Так как F есть отображение “на”, то $b \circ \mu = \lambda$. Поэтому $\lambda < \mu$.

Пусть непрерывное отображение $F: X \rightarrow Z$ совершенно, $Y = F(X)$ и $f = \text{cor } F$.

Множество Y замкнуто в Z , и отображение f совершенно. Положим $\mathcal{P}(X, f) = f^*\mathcal{P}(Y)$. По предложению 2 $i_f = \text{cor } f^*$ есть изоморфизм.

Если $\lambda \in \mathcal{P}(Z)$, то

$$\begin{aligned} F^*(\lambda) &= \text{cor}(\lambda \circ F) = \text{cor}(\lambda|_Y \circ \text{cor } F) = \text{cor}(\lambda|_Y \circ f) = (\text{cor } \lambda|_Y) \circ f \\ &= (\text{cor}(|_{ZY})(\lambda)) \circ f = f^*(\text{cor}(|_{ZY})(\lambda)) = i_f(\text{cor}(|_{ZY})(\lambda)). \end{aligned}$$

Таким образом (см. предложение 1),

$$F^* = i_f \circ \text{cor}(|_{ZY}) \quad \text{и} \quad \mathcal{P}(X, F) = \mathcal{P}(X, f).$$

ЛЕММА 2. Если $\lambda \in \mathcal{D}(Y)$, $\xi \in \mathcal{D}(X)$ и $f(\xi^{-1}t_\xi) = \lambda^{-1}t_\lambda$, то

$$i_f(\lambda) = \inf\{f, \xi\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda^{-1}t_\lambda = \{y, y'\}$, $\xi^{-1}t_\xi = \{x, x'\}$ и $fx = y$, $fx' = y'$. Отображения f и ξ следуют за $i_f(\lambda) = \lambda \circ f$, так как слои отображений f и ξ содержатся в слоях отображения $i_f(\lambda)$. Заметим, что

$$(i_f(\lambda))^{-1}t_\lambda = f^{-1}y \cup f^{-1}y' \supset \{x, x'\}$$

и $(i_f(\lambda))^{-1}t = f^{-1}y''$ для $t \in \lambda(Y) \setminus \{t_\lambda\}$ и $\lambda y'' = t$.

Пусть f и ξ следуют за $\eta \in \mathcal{P}(X)$, и пусть G , G' и G'' – слои отображения η , содержащие $\{x, x'\}$, $f^{-1}y$ и $f^{-1}y'$ соответственно. Тогда $G = G' = G''$, так как $x \in f^{-1}y$ и $x' \in f^{-1}y'$. Следовательно, слой G отображения η содержит слой $(i_f(\lambda))^{-1}t_\lambda$ отображения $i_f(\lambda)$. Очевидно, другие слои отображения $i_f(\lambda)$ также содержатся в слоях отображения η . Поэтому $\eta < i_f\lambda$.

ЛЕММА 3. Если $x \in X$, $y \in Y$, $y = fx$ и $|Y| > 2$, то для любого элемента λ из $K_Y(y)$ существует элемент ξ из $K_X(x)$ такой, что

$$f(\xi^{-1}t_\xi) = \lambda^{-1}t_\lambda.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\lambda \in K_Y(y)$. Пусть $\lambda^{-1}t_\lambda = \{y, y'\}$. Тогда существуют точка x' и $\xi \in \mathcal{D}(X)$ такие, что $fx' = y'$ и $\xi^{-1}t_\xi = \{x, x'\}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $x \in X$ и $y = fx$, то

$$i_f(K_Y(y)) = \{\inf\{f, \xi\} : \xi \in K_X(x)\} \setminus \{f\}.$$

2.2. О гомеоморфизме совершенных отображений в категориях MAP и TOP_Z . Объектами категории MAP являются все непрерывные отображения, и для непрерывных отображений $f_i: X_i \rightarrow Y_i$, $i = 1, 2$, морфизм f_1 в f_2 есть пара (λ, μ) непрерывных отображений $\lambda: X_1 \rightarrow X_2$ и $\mu: Y_1 \rightarrow Y_2$ таких, что $\mu \circ f_1 = f_2 \circ \lambda$. Пара (λ, μ) $(k-)$ гомеоморфизмов $\lambda: X_1 \rightarrow X_2$ и $\mu: Y_1 \rightarrow Y_2$ называется $(k-)$ гомеоморфизмом f_1 на f_2 в MAP , если $\mu \circ f_1 = f_2 \circ \lambda$.

Объектами категории TOP_Z являются все непрерывные отображения в пространство Z , и для непрерывных отображений $f_i: X_i \rightarrow Z$, $i = 1, 2$, морфизм f_1 в f_2 есть непрерывное отображение $\lambda: X_1 \rightarrow X_2$ такое, что $f_1 = f_2 \circ \lambda$. Соответственно, $(k-)$ гомеоморфизм $\lambda: X_1 \rightarrow X_2$ есть $(k-)$ гомеоморфизм f_1 на f_2 в TOP_Z , если $f_1 = f_2 \circ \lambda$.

Непрерывные отображения f_1 и f_2 называются $(k-)$ гомеоморфными в MAP (соответственно в TOP_Z), если существует $(k-)$ гомеоморфизм f_1 на f_2 в MAP (соответственно в TOP_Z).

ТЕОРЕМА 1. Пусть отображения $F_i: X_i \rightarrow Z_i$ совершенны, и пусть $Y_i = F_i(X_i)$, $f_i = \text{cor}(F_i)$, $i = 1, 2$, и $\min\{|Y_1|, |Y_2|\} > 2$. Тогда

(α) F_1 и F_2 k -гомеоморфны в MAP , если

существуют изоморфизмы ЧУ множеств $i_{12X}: \mathcal{P}(X_1) \rightarrow \mathcal{P}(X_2)$,

$i_{12Z}: \mathcal{P}(Z_1) \rightarrow \mathcal{P}(Z_2)$ и $i_{12Y}: \mathcal{P}(Y_1) \rightarrow \mathcal{P}(Y_2)$ такие, что

$$1) i_{12Y} \circ \text{cor}(|_{Z_1 Y_1}) = \text{cor}(|_{Z_2 Y_2}) \circ i_{12Z},$$

$$2) i_{12X} \circ f_1^* = f_2^* \circ i_{12Y};$$

($\star$)

- (β) гомеоморфизм отображений f_1 и f_2 в МАР влечет условие $(\star)$;
 (γ) если Y_1 и Y_2 – k -пространства, то f_1 и f_2 гомеоморфны в МАР тогда и только тогда, когда выполняется условие $(\star)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (α) Пусть мы имеем условие $(\star)$. По теоремам [BNP](#) и [NP](#) существуют k -гомеоморфизмы

$$h_{12X}: X_1 \rightarrow X_2, \quad h_{12Z}: Z_1 \rightarrow Z_2, \quad h_{12Y}: Y_1 \rightarrow Y_2$$

такие, что

$$\begin{aligned} h_{12X}(x) &= J_{X_2}(i_{12X}(K_{X_1}(x))), & x \in X_1, \\ h_{12Z}(z) &= J_{Z_2}(i_{12Z}(K_{Z_1}(z))), & z \in Z_1, \\ h_{12Y}(y) &= J_{Y_2}(i_{12Y}(K_{Y_1}(y))), & y \in Y_1, \\ h_{12Y}(y) &= h_{12Z}(y), & y \in Y_1, \end{aligned} \tag{1}$$

(т.е. $h_{12Y} = \text{cor}(h_{12Z}|_{Y_1})$), $h_{12Y}(Y_1) = Y_2$.

Возьмем

$$x_1 \in X_1, \quad y_1 = f_1(x_1), \quad x_2 = h_{12X}(x_1), \quad y_2 = f_2(x_2), \quad y'_2 = h_{12Y}(y_1).$$

Отметим, что по замечанию [1](#) $i_{12Z}(\mathcal{P}(Y_1)) = \mathcal{P}(Y_2)$.

Из 2) следует, что

$$i_{12X}(\mathcal{P}(X_1, f_1)) = i_{12X}(f_1^*(\mathcal{P}(Y_1))) = f_2^*(i_{12Y}(\mathcal{P}(Y_1))) = f_2^*(\mathcal{P}(Y_2)) = \mathcal{P}(X_2, f_2).$$

Так как i_{12X} – изоморфизм, то $j_{12X} = \text{cor}(i_{12X}|_{\mathcal{P}(X_1, f_1)})$ также есть изоморфизм ЧУ множеств и по условию 2)

$$j_{12X} \circ i_{f_1} = i_{f_2} \circ i_{12Y}. \tag{2}$$

По следствию [2](#)

$$\begin{aligned} i_{f_1}(K_{Y_1}(y_1)) &= \{\inf\{f_1, \xi\} : \xi \in K_{X_1}(x_1)\} \setminus \{f_1\}, \\ i_{f_2}(K_{Y_2}(y_2)) &= \{\inf\{f_2, \xi\} : \xi \in K_{X_2}(x_2)\} \setminus \{f_2\}. \end{aligned}$$

Из (2) и изоморфности i_{f_1} , i_{12Y} и i_{f_2} следует, что мы имеем равенства

$$j_{12X}(f_1) = j_{12X}(i_{f_1}(\text{id}_{Y_1})) = i_{f_2}(i_{12Y}(\text{id}_{Y_1})) = i_{f_2}(\text{id}_{Y_2}) = f_2.$$

По (1)

$$i_{12X}(K_{X_1}(x_1)) = K_{X_2}(x_2), \quad i_{12Y}(K_{Y_1}(y_1)) = K_{Y_2}(y'_2).$$

По (2)

$$\begin{aligned} i_{f_2}(K_{Y_2}(y'_2)) &= i_{f_2}(i_{12Y}(K_{Y_1}(y_1))) = j_{12X}(i_{f_1}(K_{Y_1}(y_1))) \\ &= j_{12X}(\{\inf\{f_1, \xi\} : \xi \in K_{X_1}(x_1)\} \setminus \{f_1\}) \\ &= i_{12X}(\{\inf\{f_1, \xi\} : \xi \in K_{X_1}(x_1)\} \setminus \{f_1\}) \\ &= \{\inf\{f_2, \zeta\} : \zeta \in K_{X_2}(x_2)\} \setminus \{f_2\} = i_{f_2}(K_{Y_2}(y_2)). \end{aligned}$$

Так как i_{f_2} есть изоморфизм ЧУ множеств, то $K_{Y_2}(y'_2) = K_{Y_2}(y_2)$. Поэтому $y'_2 = y_2$. Следовательно, $h_{12Y} \circ f_1 = f_2 \circ h_{12X}$, и поэтому $h_{12Z} \circ F_1 = F_2 \circ h_{12X}$. Таким образом, (h_{12X}, h_{12Z}) есть k -гомеоморфизм F_1 и F_2 в МАР.

Пункт (β) очевиден. Пункт (γ) следует из (α) и (β).

Для $Z_1 = Z_2 = Z$ и $i_{12Z} = \text{id}_{\mathcal{P}(Z)}$ из теоремы 1 вытекает

ТЕОРЕМА 2. Пусть отображения $F_i: X_i \rightarrow Z$ совершенны, и пусть $Y_i = F_i(X_i)$, $f_i = \text{cor}(F_i)$, $i = 1, 2$, и $\min\{|Y_1|, |Y_2|\} > 2$. Тогда

(α') F_1 и F_2 k -гомеоморфны в TOP_Z , если

существуют изоморфизмы ЧУ множеств $i_{12X}: \mathcal{P}(X_1) \rightarrow \mathcal{P}(X_2)$ и $i_{12Y}: \mathcal{P}(Y_1) \rightarrow \mathcal{P}(Y_2)$ такие, что

$$\begin{aligned} (1') \quad & i_{12Y} \circ \text{cor}(|_{ZY_1}) = \text{cor}(|_{ZY_2}), \\ (2') \quad & i_{12X} \circ f_1^* = f_2^* \circ i_{12Y}; \end{aligned} \quad (\star')$$

(β') гомеоморфизм отображений f_1 и f_2 в TOP_Z влечет условие ($\star'$);

(γ') если Y_1, Y_2 – k -пространства (это так для k -пространства Z), то гомеоморфизм f_1 и f_2 в TOP_Z равносильно выполнению условия ($\star'$).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. D. Magill, Jr., “The lattice of compactifications of a locally compact space”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **18**:2 (1968), 231–244.
- [2] I. V. Bludova, G. Nordo, B. A. Pasynkov, “On the homeomorphism of spaces and Magill-type theorems”, *Questions Answers Gen. Topology*, **19**:1 (2001), 95–105.
- [3] M. C. Rayburn, “On Hausdorff compactifications”, *Pacific J. Math.*, **44**:2 (1973), 707–714.
- [4] G. Nordo, B. A. Pasynkov, “Magill-type theorems for mappings”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **2004**:26 (2004), 1379–1391.
- [5] Э. Н. Беянова, *Наросты расширений локально бикомпактных пространств и отображений. Теоремы о гомеоморфизме пространств и отображений*, Дис. канд. физ.-матем. наук, МПГУ, М., 2007.

Э. Н. Беянова

Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана
E-mail: elv-bel@mail.ru

Поступило

16.01.2012

И. В. Блудова

Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана