Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Качуровский, И. В. Подвигин, Большие уклонения и скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 4, 569–577

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9352>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:30:59

Большие отклонения и скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа

А. Г. Качуровский, И. В. Подвигин

Для ограниченных усредняемых функций доказана эквивалентность степенной и экспоненциальной скоростей сходимости в индивидуальной эргодической теореме Биркгофа с такой же асимптотикой вероятностей больших отклонений в этой теореме.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm9352

1. Введение. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ – пространство с вероятностной мерой, T – его эндоморфизм, т.е. такое отображение $T: \Omega \rightarrow \Omega$, что для всех $A \in \mathfrak{F}$ множество $T^{-1}A$ принадлежит $\mathfrak{F}$ и $\lambda(A) = \lambda(T^{-1}A)$. И пусть $\{T^t, t \in \mathbb{R}^+\}$ – полупоток на $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$, т.е. такая однопараметрическая полугруппа эндоморфизмов T^t этого пространства, что для любой измеримой функции $f(\omega)$ на Ω функция $f(T^t\omega)$ измерима на прямом произведении $\Omega \times \mathbb{R}^+$.

Для $f \in L_1(\Omega)$, $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{R}^+$ обозначим

$$A_n f(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k \omega) \quad \text{и} \quad \bar{A}_t f(\omega) = \frac{1}{t} \int_0^t f(T^\tau \omega) d\tau.$$

Тогда индивидуальная эргодическая теорема Биркгофа утверждает существование λ -п.в. пределов

$$f^* = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n f \quad \text{и} \quad \bar{f}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{A}_t f,$$

и равенств $\int f^* d\lambda = \int f d\lambda = \int \bar{f}^* d\lambda$. Скорость сходимости в этой теореме будем определять убыванием для каждого $\varepsilon > 0$ величин

$$\begin{aligned} P_n^\varepsilon &= \lambda \left\{ \sup_{k \geq n} |A_k f - f^*| \geq \varepsilon \right\} \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \\ \bar{P}_t^\varepsilon &= \lambda \left\{ \sup_{s \geq t} |\bar{A}_s f - \bar{f}^*| \geq \varepsilon \right\} \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Заметим, что выполнение для всех $\varepsilon > 0$ условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^\varepsilon = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{P}_t^\varepsilon = 0$$

эквивалентно сходимости $A_n f$ или $\bar{A}_t f$ п.в. при $n \rightarrow \infty$ или $t \rightarrow \infty$ соответственно.

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-5998.2012.1).

Наряду с этими величинами будем рассматривать вероятности больших отклонений, т.е. величины

$$p_n^\varepsilon = \lambda\{|A_n f - f^*| \geq \varepsilon\} \quad \text{и} \quad \bar{p}_t^\varepsilon = \lambda\{|\bar{A}_t f - \bar{f}^*| \geq \varepsilon\}.$$

Выполнение для всех $\varepsilon > 0$ условия $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n^\varepsilon = 0$ или $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{p}_t^\varepsilon = 0$ есть по определению свойство сходимости $A_n f$ или $\bar{A}_t f$ по мере при $n \rightarrow \infty$ или $t \rightarrow \infty$ соответственно.

Оказывается, в случае существенной ограниченности усредняемой функции f скорости убывания величин P_n^ε и p_n^ε ($\bar{P}_t^\varepsilon$ и $\bar{p}_t^\varepsilon$) имеют одинаковые асимптотики при $n \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) для широкого класса скоростей этого убывания (теорема 1 ниже), включающего важные для приложений степенные и экспоненциальные скорости. Это позволяет получать оценки скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа, т.е. оценки для каждого $\varepsilon > 0$ скоростей убывания $P_n^{2\varepsilon}$ и $\bar{P}_t^{2\varepsilon}$ при $n \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$ соответственно по известным скоростям убывания вероятностей больших отклонений p_n^ε и $\bar{p}_t^\varepsilon$ (теоремы 2 и 3).

Применение полученных результатов к моделируемым башней Янг с полиномиальным хвостом динамическим системам немедленно дает степенные оценки скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа для таких систем как стадион Бунимовича и некоторых классов полурассеивающих бильярдов и бильярдов с ловушками – в случае гёльдеровости усредняемой функции f . Степенные оценки больших отклонений для таких систем доказаны в [1], [2].

Опять же в случае гёльдеровости усредняемой функции, теорема 3 немедленно дает экспоненциальные оценки скорости сходимости в индивидуальной эргодической теореме: для систем Аносова (большие отклонения рассмотрены, например, в [3]); для моделируемых башней Янг с экспоненциальным хвостом неравномерно-гиперболических динамических систем, среди которых такой классический рассеивающий бильярд как газ Лоренца на двумерном торе (оценки больших отклонений см. в [1], [2]); а также для потоков Тейхмюллера (оценки больших отклонений доказаны в [4]).

Отметим, что в случае квадратично интегрируемой функции f степенные оценки скорости сходимости в теореме Биркгофа по известной степенной скорости сходимости в теореме фон Неймана (получаемой, в свою очередь, по степенному убыванию корреляционных коэффициентов, или по степенной же особенности спектральной меры в окрестности нуля) были недавно доказаны в работах [5], [6].

2. Совпадающие асимптотики скорости сходимости и больших отклонений. Для существенно ограниченных функций f степенная скорость убывания при $n \rightarrow \infty$ вероятностей больших отклонений p_n^ε эквивалентна степенной же, с тем же показателем степени, скорости убывания величин P_n^ε [7; теорема 12]. Следующая теорема устанавливает аналогичный результат и для более общих скоростей убывания, как для эндоморфизмов, так и для полупотоков.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in L_\infty(\Omega)$ и функция $\varphi(x): \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ монотонно убывает (при $x > x_0$) к нулю так, что

$$\int_n^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx = O(\varphi(n)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Тогда следующие два утверждения равносильны:

- 1) $p_n^\varepsilon = O(\varphi(n))$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$;
- 2) $P_n^\varepsilon = O(\varphi(n))$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

В случае непрерывного времени равносильны аналогичные утверждения:

- 3) $\bar{p}_t^\varepsilon = O(\varphi(t))$ при $t \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$;
- 4) $\bar{P}_t^\varepsilon = O(\varphi(t))$ при $t \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

Доказательство теоремы опирается на техническую лемму. Чтобы ее сформулировать, введем обозначения, которые будут использоваться на протяжении всей статьи. Пусть $f \in L_\infty(\Omega)$, $\Delta = \|f - f^*\|_\infty$ в случае дискретной динамической системы и $\Delta = \|f - \bar{f}^*\|_\infty$ в случае непрерывной. Всюду далее будем предполагать, что функция f не является инвариантной относительно рассматриваемой динамической системы, иначе оценивать просто нечего. Для каждого $\varepsilon > 0$ полагаем

$$r = r(\varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{\Delta}.$$

ЛЕММА 1. Пусть $f \in L_\infty(\Omega)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} P_n^{2\varepsilon} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda \left\{ \sup_{nr^k \leq m < nr^{k+1}} |A_m f - f^*| \geq 2\varepsilon \right\} \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_{n_k}^\varepsilon \quad \text{для всех } n \geq 1, \\ \bar{P}_t^{2\varepsilon} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda \left\{ \sup_{tr^k \leq s < tr^{k+1}} |\bar{A}_s f - \bar{f}^*| \geq 2\varepsilon \right\} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \bar{p}_{t_k}^\varepsilon \quad \text{для всех } t > 0, \end{aligned}$$

где n_k – минимальное целое число, не меньшее nr^k , а $t_k = tr^k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Для дискретного времени доказательство было получено в [7] (при доказательстве теоремы 12). Приведем здесь аналогичное доказательство для непрерывного случая. Заменяя f на $f - \bar{f}^*$, можно считать, что $\bar{f}^* \equiv 0$ п.в.

Так как $|\bar{A}_t f| \leq \Delta$ для всех $t > 0$, то для всех $\varepsilon > \Delta/2$ утверждение леммы 1 очевидно верно. Докажем его для $\varepsilon \leq \Delta/2$.

Пусть $|\bar{A}_s f| < \varepsilon$ для некоторого s ; тогда

$$\begin{aligned} |\bar{A}_{s+t} f| &= \frac{1}{s+t} \left| \int_0^s f \circ T^\tau d\tau + \int_s^{s+t} f \circ T^\tau d\tau \right| \\ &\leq \frac{s|\bar{A}_s f| + t\|f\|_\infty}{s+t} < \frac{s\varepsilon + t\|f\|_\infty}{s+t} < 2\varepsilon \end{aligned}$$

для всех $t \in [0, s\varepsilon/\Delta]$. Откуда следует, что

$$\left\{ \sup_{tr^k \leq s < tr^{k+1}} |\bar{A}_s f| \geq 2\varepsilon \right\} \subseteq \{|\bar{A}_{t_k} f| \geq \varepsilon\}, \quad t_k = tr^k,$$

и

$$\bar{P}_t^{2\varepsilon} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda \left\{ \sup_{tr^k \leq s < tr^{k+1}} |\bar{A}_s f| \geq 2\varepsilon \right\} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \bar{p}_{t_k}^\varepsilon.$$

Лемма 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Величина P_n^ε (и все аналогичные ей) зависит от меры λ двояким образом – она есть λ -мера множества $\Omega_\lambda = \{\sup_{k \geq n} |A_k f - f^*| \geq \varepsilon\}$, зависимость которого от λ “спрятана” в функции f^* . Инвариантность меры используется только в этой второй зависимости. Поэтому утверждение леммы 1 останется справедливым, если вместо величины P_n^ε (и аналогичных ей) рассматривать величину $P_n^\varepsilon(\mu) = \mu\{\Omega_\lambda\}$ (и аналогичные ей) для произвольной вероятностной меры μ , необязательно инвариантной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Из 2) сразу следует 1), так как всегда $p_n^\varepsilon \leq P_n^\varepsilon$. Выведем 2) из 1). Пусть для каждого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение $p_n^\varepsilon = O(\varphi(n))$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. $p_n^\varepsilon \leq C(\varepsilon)\varphi(n)$ для некоторой константы $C(\varepsilon) > 0$ при всех $n > n_0(\varepsilon)$. По лемме 1 для $n > n_0(\varepsilon)$ получаем оценку

$$P_n^{2\varepsilon} \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_{n_k}^\varepsilon \leq C(\varepsilon) \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(n_k).$$

Так как φ монотонно убывает при $x > x_0$, а $r > 1$, то для всех $n > [x_0]$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(n_k) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(nr^k) = \varphi(n) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(nr^k) \\ &\leq \varphi(n) + \int_0^\infty \varphi(nr^x) dx = \varphi(n) + \frac{1}{\ln r} \int_n^\infty \frac{\varphi(y)}{y} dy \\ &\leq \varphi(n) + \frac{M}{\ln r} \varphi(n) = \left(1 + \frac{M}{\ln r}\right) \varphi(n). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались заменой переменной интегрирования $nr^x = y$ и асимптотическим свойством (1) функции φ , записанным в виде неравенства

$$\int_n^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx \leq M\varphi(n),$$

верным для некоторой константы $M > 0$ при всех $n > n_1$, где в качестве n_1 можно взять $[x_0]$. Действительно, если $n_1 > [x_0]$, то для всех $n > [x_0]$, используя монотонность $\varphi(x)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_n^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx &= \int_n^{n_1+1} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{n_1+1}^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx \\ &\leq \varphi(n) \ln\left(\frac{n_1+1}{n}\right) + M\varphi(n_1+1) \leq \varphi(n) \left(\ln\left(\frac{n_1+1}{[x_0]+1}\right) + M\right). \end{aligned}$$

Соединяя полученные оценки, для всех $n > \max\{[x_0], n_0(\varepsilon)\}$ получаем неравенство

$$P_n^{2\varepsilon} \leq C(\varepsilon) \left(1 + \frac{M}{\ln r}\right) \varphi(n).$$

Так как и для непрерывного времени верна лемма 1, то, заменяя в приведенном доказательстве величины P_n^ε и p_n^ε на их непрерывные аналоги $\bar{P}_t^\varepsilon$ и $\bar{p}_t^\varepsilon$, получаем доказательство и в этом случае.

В приложениях чаще встречается ситуация, когда вероятности больших уклонов p_n^ε убывают к нулю не с одной и той же скоростью $\varphi(n)$ для всех положительных ε , а эта скорость может зависеть от ε . Поэтому вместо одной функции $\varphi(x)$ приходится рассматривать однопараметрическое семейство функций $\{\varphi_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon>0}$. Уточним теорему 1 в этом случае в интересующую нас сторону (оценки для P_n^ε по p_n^ε).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in L_\infty(\Omega)$, и для некоторого (фиксированного) $\varepsilon > 0$ функция $\varphi_\varepsilon(x): \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ монотонно убывает (при $x > x_0(\varepsilon)$) к нулю так, что выполняется соотношение (1). Тогда, если найдутся константы $C(\varepsilon) > 0$ и $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{Z}^+$ такие, что для всех $n > n_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$p_n^\varepsilon \leq C(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(n),$$

то для некоторой константы $M(\varepsilon) > 0$ и для всех $n > \max\{x_0(\varepsilon); n_0(\varepsilon)\}$ будет верно неравенство

$$P_n^{2\varepsilon} \leq C(\varepsilon) \left(1 + \frac{M(\varepsilon)}{\ln r(\varepsilon)}\right) \varphi_\varepsilon(n). \quad (2)$$

В случае непрерывного времени справедливо аналогичное утверждение, с заменой времени n на t и величин $p_n^\varepsilon, P_n^{2\varepsilon}$ на $\bar{p}_t^\varepsilon, \bar{P}_t^{2\varepsilon}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Асимптотическое соотношение (1) для функции $\varphi_\varepsilon(x)$ можно переписать в виде неравенства

$$\int_n^\infty \frac{\varphi_\varepsilon(x)}{x} dx \leq M(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(n),$$

верного для некоторой константы $M(\varepsilon) > 0$ при всех $n > [x_0(\varepsilon)]$. В точности повторяя часть доказательства теоремы 1 из 2) в 1), получаем оценку (2).

В непрерывном случае оценка (2) становится верной при $t > \max\{x_0(\varepsilon); t_0(\varepsilon)\}$, где $t_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$ определяется аналогично $n_0(\varepsilon)$.

В следующей лемме выясняется, насколько широк класс функций, для которых выполняется асимптотическое соотношение (1).

ЛЕММА 2. Пусть $\psi_1(x): \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ – невозрастающая (при $x > x_0$) функция. Тогда для каждого $\alpha > 0$ функция $\varphi_1(x) = \psi_1(x)/x^\alpha$ удовлетворяет условию (1).

Если функция $\psi_2(x): \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ удовлетворяет условию (1), то для любого $\delta > 0$ функция $\varphi_2(x) = \psi_2(x^\delta)$ также удовлетворяет (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Пусть $\psi_1(x)$ – неотрицательная невозрастающая (при $x > x_0$) функция, тогда для $n > [x_0]$ получим

$$\int_n^\infty \frac{\varphi_1(x)}{x} dx = \int_n^\infty \frac{\psi_1(x)}{x^{1+\alpha}} dx \leq \psi_1(n) \int_n^\infty \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \frac{\psi_1(n)}{\alpha n^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \varphi_1(n),$$

что доказывает первое утверждение леммы.

Если теперь $\psi_2(x)$ удовлетворяет (1), то для всякого $\delta > 0$ для некоторой константы $M > 0$ при всех достаточно больших n получаем

$$\int_n^\infty \frac{\varphi_2(x)}{x} dx = \int_n^\infty \frac{\psi_2(x^\delta)}{x} dx = \frac{1}{\delta} \int_{n^\delta}^\infty \frac{\psi_2(y)}{y} dy \leq \frac{1}{\delta} M \psi_2(n^\delta) = \frac{M}{\delta} \varphi_2(n),$$

что и завершает доказательство леммы.

3. Оценки скорости сходимости через оценки больших уклонений. Как легко следует из леммы 2, кроме степенных функций ($x^{-\alpha}$, $\alpha > 0$) асимптотическому соотношению (1) удовлетворяют степенные с логарифмическим множителем ($x^{-\alpha} \ln^{\beta} x$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $x > 1$), экспоненциальные ($e^{-\gamma x}$, $\gamma > 0$) и экспоненциальные со степенным множителем ($x^{\alpha} e^{-\gamma x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$) функции. Кроме того, с помощью степенной замены переменной из экспоненциальной функции можно получить растянутые экспоненциальные (“stretched exponential decay”) функции $e^{-\gamma x^{\delta}}$, $\gamma, \delta > 0$ (тоже, тем самым, удовлетворяющие условию (1)).

Уточним теорему 2 для всех описанных выше функций. Введем в рассмотрение неполную гамма функцию $\Gamma(a, x)$ и ее частный случай – интегральную экспоненту $E_1(x)$:

$$\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt, \quad x > 0, \quad a \in \mathbb{R},$$

$$E_1(x) = \Gamma(0, x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad x > 0.$$

Рассмотрим также функции

$$A(a, x) = \frac{e^x}{x^a} \Gamma(a, x), \quad x > 0, \quad a \in \mathbb{R},$$

$$D(a, x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & x \leq 0, \\ \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x(x-1)}{a^3} + \dots + \frac{x(x-1) \cdots (x-[x])}{a^{[x]+2}}, & x > 0, \end{cases} \quad a > 0.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in L_{\infty}(\Omega)$. Тогда для каждого (фиксированного) $\varepsilon > 0$ справедливы следующие утверждения.

1. Если $p_n^{\varepsilon} \leq C(\varepsilon) n^{-\alpha(\varepsilon)}$ при некоторых константах $C(\varepsilon) > 0$, $\alpha(\varepsilon) > 0$ для всех $n > n_0(\varepsilon)$, $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{Z}^+$, то для всех $n > n_0(\varepsilon)$

$$P_n^{2\varepsilon} \leq C(\varepsilon) \left(1 + \frac{1}{r(\varepsilon)^{\alpha(\varepsilon)} - 1} \right) n^{-\alpha(\varepsilon)} < C(\varepsilon) \left(1 + \frac{1}{\alpha(\varepsilon) \ln r(\varepsilon)} \right) n^{-\alpha(\varepsilon)}.$$

2. Если $p_n^{\varepsilon} \leq C(\varepsilon) n^{-\alpha(\varepsilon)} \ln^{\beta(\varepsilon)} n$ при некоторых константах $\alpha(\varepsilon) > 0$, $\beta(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ для всех $n > n_0(\varepsilon)$, $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, то для всех $n > \max\{[e^{\beta(\varepsilon)/\alpha(\varepsilon)}]; n_0(\varepsilon); 2\}$

$$P_n^{2\varepsilon} \leq C(\varepsilon) \left(1 + \frac{D(\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon))}{\ln r(\varepsilon)} \right) n^{-\alpha(\varepsilon)} \ln^{\beta(\varepsilon)} n.$$

3. Если $p_n^{\varepsilon} \leq C(\varepsilon) e^{-\gamma(\varepsilon) n^{\delta(\varepsilon)}}$ при некоторых константах $\gamma(\varepsilon) > 0$, $\delta(\varepsilon) > 0$ для всех $n > n_0(\varepsilon)$, $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{Z}^+$, то для всех $n > n_0(\varepsilon)$

$$P_n^{2\varepsilon} \leq C(\varepsilon) \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \left(1 + \frac{e^{\gamma(\varepsilon)} E_1(\gamma(\varepsilon))}{\ln r(\varepsilon)} \right) e^{-\gamma(\varepsilon) n^{\delta(\varepsilon)}}$$

$$< C(\varepsilon) \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \left(1 + \frac{\ln(1 + 1/\gamma(\varepsilon))}{\ln r(\varepsilon)} \right) e^{-\gamma(\varepsilon) n^{\delta(\varepsilon)}}.$$

4. Если $p_n^{\varepsilon} \leq C(\varepsilon) n^{\alpha(\varepsilon)} e^{-\gamma(\varepsilon) n}$ при некоторых константах $\alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, $\gamma(\varepsilon) > 0$ для всех $n > n_0(\varepsilon)$, $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{Z}^+$, то для всех $n > \max\{[\alpha(\varepsilon)/\gamma(\varepsilon)]; n_0(\varepsilon)\}$

$$P_n^{2\varepsilon} \leq C(\varepsilon) \left(1 + \frac{A(\alpha(\varepsilon), \gamma(\varepsilon))}{\ln r(\varepsilon)} \right) n^{\alpha(\varepsilon)} e^{-\gamma(\varepsilon) n}.$$

В случае непрерывного времени справедливы аналогичные утверждения, с заменой времени n на t и величин $p_n^\varepsilon, P_n^{2\varepsilon}$ на $\bar{p}_t^\varepsilon, \bar{P}_t^{2\varepsilon}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Достаточно применить неравенство (2) с подходящей константой $M(\varepsilon)$. Для упрощения обозначений будем опускать параметр ε . Будем рассматривать функцию

$$F(n) = \frac{1}{\varphi(n)} \int_n^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad n \geq 1,$$

и находить ее верхнюю грань. Докажем пункты 1, 3 и 4 теоремы вместе. Для этого рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = x^{-\alpha} e^{-\gamma x}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \gamma > 0 \quad \text{и, если } \gamma = 0, \text{ то } \alpha > 0.$$

Тогда легко определить, что при неотрицательных α и γ функция φ убывает на всей положительной полупрямой (т.е. $x_0 = 0$). При $\alpha < 0$ убывание начинается с $x_0 = -\alpha/\gamma$.

Далее, легко проверить, что при $\gamma \neq 0$

$$F(n) = \int_0^\infty e^{-\gamma nx} (x+1)^{-\alpha-1} dx$$

– убывающая функция, следовательно, для всех $n \geq 1$ верно неравенство

$$F(n) \leq F(1) = \frac{e^\gamma}{\gamma^{-\alpha}} \Gamma(-\alpha, \gamma) = A(-\alpha, \gamma),$$

откуда сразу получаем оценку пункта 3. Если при этом $\alpha = 0$, то получаем оценку пункта 2 с $\delta = 1$. Для $\delta \neq 1$ оценка следует из уже доказанного для $\delta = 1$ и степенной замены, рассмотренной в лемме 2. Второе неравенство в этой оценке следует из неравенства (см., например, [8; соотношение 5.1.20]):

$$\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) < e^x E_1(x) < \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right), \quad x > 0.$$

Если положить $\gamma = 0$, то $\varphi(x) = x^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, и $F(n) = 1/\alpha$. Откуда следует второе неравенство пункта 1 теоремы. Первое неравенство в этом пункте получается с помощью леммы 1 прямым подсчетом:

$$\begin{aligned} P_n^{2\varepsilon} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} p_{n_k}^\varepsilon \leq \sum_{k=0}^{\infty} C n_k^{-\alpha} \leq C \sum_{k=0}^{\infty} (nr^k)^{-\alpha} \\ &= C n^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (r^{-\alpha})^k = C n^{-\alpha} \frac{1}{1 - r^{-\alpha}} = C \left(1 + \frac{1}{r^\alpha - 1} \right) n^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Переходим к доказательству второго пункта теоремы. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = x^{-\alpha} \ln^\beta x, \quad \alpha > 0, \quad \beta < 0.$$

Ясно, что для всех $x \in [0, 1]$ эта функция не определена, поэтому чтобы применить результаты теоремы 2, доопределим ее на этом отрезке нулем. Тогда для всех

$x > 1$ ($x_0 = 1$) эта функция является положительной и монотонно убывает к нулю. Соответствующая ей функция $F(n)$ монотонно возрастает, поэтому для всех $n > 1$

$$F(n) = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{\alpha+1}(1 + \ln x / \ln n)^{-\beta}} < F(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha},$$

откуда получаем $M = 1/\alpha = D(\alpha, \beta)$.

Пусть теперь $\varphi(x) = x^{-\alpha} \ln^\beta x$, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ при $x > 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $x \in [0, 1]$. Легко проверить, что эта функция убывает при $x > e^{\beta/\alpha}$ ($x_0 = e^{\beta/\alpha}$). Обозначим через m целую часть числа β , т.е. $m = [\beta]$. При фиксированных n и α положим

$$I(\beta) = \int_n^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_n^\infty \frac{\ln^\beta x}{x^{\alpha+1}} dx.$$

Интегрируя по частям, получим формулу понижения степени β :

$$I(\beta) = \frac{\ln^\beta n}{\alpha n^\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} I(\beta - 1).$$

Применяя ее несколько раз, пока степень не станет отрицательной, в случае $\beta \neq m$ получим:

$$\begin{aligned} I(\beta) = & \frac{\ln^\beta n}{\alpha n^\alpha} + \frac{\beta \ln^{\beta-1} n}{\alpha^2 n^\alpha} + \frac{\beta(\beta-1) \ln^{\beta-2} n}{\alpha^3 n^\alpha} + \dots \\ & + \frac{\beta(\beta-1) \dots (\beta-m+1) \ln^{\beta-m} n}{\alpha^{m+1} n^\alpha} + \frac{\beta(\beta-1) \dots (\beta-m)}{\alpha^{m+1}} I(\beta-m-1). \end{aligned}$$

В случае целого β , т.е. $\beta = m$, в этом равенстве в его правой части будет отсутствовать последнее слагаемое. Так как $\beta - m - 1 < 0$, то по уже доказанному выше случаю получаем

$$I(\beta - m - 1) = \varphi(n)F(n) \leq \frac{1}{\alpha} \varphi(n) = \frac{\ln^{\beta-m-1} n}{\alpha n^\alpha}.$$

Используя эту оценку и очевидные неравенства

$$\ln^{\beta-j} x < \ln^\beta x \quad \text{для всех } x > e, \quad j > 0,$$

получаем оценку

$$I(\beta) \leq \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{\beta(\beta-1)}{\alpha^3} + \dots + \frac{\beta(\beta-1) \dots (\beta-m)}{\alpha^{m+2}} \right) \frac{\ln^\beta n}{n^\alpha},$$

откуда находим константу $M = D(\alpha, \beta)$ и требуемую в пункте 2 теоремы оценку, справедливую для всех $n > \max\{[e^{\beta/\alpha}]; n_0; 2\}$.

Так как для непрерывного времени справедлива теорема 2 и неравенство (2), то доказательство для этого случая полностью идентично изложенному, нужно лишь заменить время n на t .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если эргодические средние порождены не оператором Купмана $Uf(\omega) = f(T\omega)$, $f \in L_1(\Omega)$ (полугруппой операторов $U_t f(\omega) = f(T^t \omega)$, $t \geq 0$, в непрерывном случае), а оператором Данфорда–Шварца в $L_1(\Omega)$ (полугруппой таких

операторов в непрерывном случае), т.е. сжимающим и в $L_1(\Omega)$, и в $L_\infty(\Omega)$ линейным оператором (более общий случай, поскольку оператор Купмана в нашем случае является изометрией в $L_1(\Omega)$ и сжатием в $L_\infty(\Omega)$), то, очевидно, будут верны аналогии утверждений всех трех доказанных в этом пункте теорем и для этого более общего случая.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. Melbourne, M. Nicol, “Large deviations for nonuniformly hyperbolic systems”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **360**:12 (2008), 6661–6676.
- [2] I. Melbourne, “Large and moderate deviations for slowly mixing dynamical systems”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **137**:5 (2009), 1735–1741.
- [3] S. Waddington, “Large deviation asymptotics for Anosov flows”, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **13**:4 (1996), 445–484.
- [4] V. Araújo, A. I. Bufetov, “A large deviations bound for the Teichmüller flow on the moduli space of abelian differentials”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **31**:4 (2011), 1043–1071.
- [5] А. Г. Качуровский, В. В. Седалищев, “Константы оценок скорости сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа”, *Матем. сб.*, **202**:8 (2011), 21–40.
- [6] А. Г. Качуровский, В. В. Седалищев, “О константах оценок скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа”, *Матем. заметки*, **91**:4 (2012), 624–628.
- [7] А. Г. Качуровский, “Скорости сходимости в эргодических теоремах”, *УМН*, **51**:4 (1996), 73–124.
- [8] *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, ред. М. Абрамовиц, И. Стиган, Наука, М., 1979.

А. Г. Качуровский

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
E-mail: agk@math.nsc.ru

Поступило

27.02.2012

И. В. Подвигин

Новосибирский государственный университет
E-mail: ivan_podvigin@ngs.ru