Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Никонов, Г. И. Шарыгин, Структура хопф-циклических (ко)гомологий алгебр гладких функций, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 4, 566–582

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9354>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 17:56:44

Структура хопф-циклических (ко)гомологий алгебр гладких функций

И. М. Никонов, Г. И. Шарыгин

В этой статье мы обсуждаем структуру хопф-циклических гомологий и когомологий алгебры гладких функций на многообразии, на которой действует или кодействует алгебра Хопфа функций на конечной или компактной группе, или же двойственная к ней алгебра Хопфа. В обоих случаях мы доказываем аналог теоремы Конна–Хохшильда–Костанта–Розенберга, описывающей структуру хопф-циклических когомологий в терминах эквивариантных когомологий и других более геометрических групп когомологий.

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm9354

Введение

За последние 10 лет появилось много работ, посвященных исследованиям хопф-циклических гомологий и когомологий, – т.е. циклических (ко)гомологий алгебр и коалгебр, на которых действует алгебра Хопфа (точное определение этого объекта мы дадим ниже). Главным толчком и основной мотивировкой для изучения этих объектов послужил замечательный результат Конна и Московичи (см. [1]), не только определивших этот тип когомологий в частном случае, но и построивших характеристическое отображение из хопф-циклических когомологий алгебры Хопфа $\mathcal{H}$ с обратимым антиподом в обычные циклические когомологии алгебры A , на которой действует $\mathcal{H}$. Важным свойством этого отображения, являющимся основной причиной интереса к данному виду когомологий, было то, что его образ содержит характеристические классы важных для приложений псевдо-дифференциальных операторов (в цитируемой статье Конна и Московичи таким оператором был оператор трансверсальной сигнатуры слоения).

Позднее идеи этой статьи были развиты и обобщены различными авторами, прежде всего, Крайником (см. [2]) и Хаяцем, Халхали, Рангипуром и Соммерхойзером (см. [3]). В результате возникла теория хопф-циклических гомологий и когомологий – теория гомологий алгебр и коалгебр с действием некоторой алгебры Хопфа и с коэффициентами в особом рода модулях коэффициентов, так называемых стабильных анти-модулях Йеттера–Дринфельда (сокращенно SAYD); SAYD-модуль –

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00007-а) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-581.2014.1).

это модуль над алгеброй Хопфа $\mathcal{H}$, являющийся одновременно и комодулем над ней же, причем действие и кодействие $\mathcal{H}$ согласованы специальным образом (см. определение в разделе 1). Для любой коалгебры C (соответственно алгебры A) над фиксированным полем, на которой действует алгебра Хопфа $\mathcal{H}$, и для любого SAYD-модуля $\mathcal{M}$ были определены группы когомологий $HC_{\mathcal{H}}^*(C, \mathcal{M})$ (соответственно $HC_{\mathcal{H}}^*(A, \mathcal{M})$) и двойственные группы когомологий. (Недавно эта конструкция была далее обобщена Кайгуном [4] до теории, в которой место алгебры Хопфа занято произвольной биалгеброй B , а коэффициентный модуль – произвольный модуль-комодуль над B , т.е. пространство, на котором B одновременно и действует, и кодействует.)

В настоящей статье мы обсуждаем несколько примеров вычислений гомологий такого рода, которые возникают в различных топологических или геометрических конструкциях, где имеется действие или кодействие алгебры Хопфа. А именно, мы рассматриваем примеры, связанные с действием на многообразиях дискретных и компактных групп, при этом роль алгебры Хопфа в зависимости от ситуации играет алгебра функций на группе или групповая алгебра. В этих условиях мы описываем связь между хопф-циклическими когомологиями или гомологиями с эквивариантными когомологиями относительно действия группы; некоторую особенность происходящему придает наличие коэффициентов, которые отсутствуют в обычных версиях эквивариантных когомологий. В частности, в случае действия компактной группы мы получаем аналог пучка эквивариантных когомологий Блока и Гетцлера [5].

1. Определения и принятые обозначения

Все алгебры, коалгебры и модули над ними в нашей статье являются векторными полями над фиксированным полем $\mathbb{k}$ нулевой характеристики (прежде всего, $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Символом $\mathcal{H}$ мы будем обозначать некоторую алгебру Хопфа над $\mathbb{k}$, $\mathcal{M}$ – стабильный анти-модуль Йеттера–Дринфельда над $\mathcal{H}$, Δ будет обозначать коумножение в $\mathcal{H}$ и кодействие $\mathcal{H}$ на $\mathcal{M}$. Мы используем стандартные обозначения для коумножения и кодействия (см. подробные объяснения в книге [6]), т.е. $\Delta(h) = h^{(1)} \otimes h^{(2)}$ для всех $h \in \mathcal{H}$ и $\Delta_{\mathcal{M}}(m) = m^{(-1)} \otimes m^{(0)}$ для всех $m \in \mathcal{M}$; мы считаем, что $\mathcal{M}$ – левый $\mathcal{H}$ -комодуль. Если при этом $\mathcal{M}$ – правый $\mathcal{H}$ -модуль, то условие, что $\mathcal{M}$ – анти-модуль Йеттера–Дринфельда выражается уравнением

$$(mh)^{(-1)} \otimes (mh)^{(0)} = S(h^{(3)})m^{(-1)}h^{(1)} \otimes m^{(0)}h^{(2)}, \quad (1)$$

а стабильность $\mathcal{M}$ эквивалентна равенству $m^{(0)}m^{(-1)} = m$ для всех $m \in \mathcal{M}$.

Дадим теперь точное определение хопф-циклических гомологий и когомологий алгебры или коалгебры над $\mathcal{H}$ с коэффициентами в $\mathcal{M}$ так, как оно было дано в [3].

Начнем со случая коалгебры: пусть C – коалгебра над $\mathbb{k}$, на которой задано левое действие алгебры Хопфа $\mathcal{H}$, $\mathcal{H} \otimes C \rightarrow C$, согласованное с коумножением в C , т.е.

$$(hc)^{(1)} \otimes (hc)^{(2)} = h^{(1)}c^{(1)} \otimes h^{(2)}c^{(2)}$$

для всех $h \in \mathcal{H}$, $c \in C$. Мы определим хопф-циклические когомологии C с коэффициентами в $\mathcal{M}$, которые мы обозначаем $HC_{\mathcal{H}}^*(C, \mathcal{M})$, следующим образом. Рассмотрим

паракоциклический модуль $C^*(C, \mathcal{M})$:

$$C^n(C, \mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes C^{\otimes n+1}$$

со следующими структурными операциями:

$$\begin{aligned} \delta_i(m \otimes c_0 \otimes \cdots \otimes c_n) &= \begin{cases} m \otimes c_0 \otimes \cdots \otimes c_i^{(1)} \otimes c_i^{(2)} \otimes \cdots \otimes c_n, & 0 \leq i \leq n, \\ m^{(0)} \otimes c_0^{(1)} \otimes c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes m^{(-1)} c_0^{(2)}, & i = n+1, \end{cases} \\ \sigma_i(m \otimes c_0 \otimes \cdots \otimes c_n) &= m \otimes c_0 \otimes \cdots \otimes \epsilon(c_i) \otimes \cdots \otimes c_n, \\ \tau_n(m \otimes c_0 \otimes \cdots \otimes c_n) &= m^{(0)} \otimes c_1 \otimes \cdots \otimes c_n \otimes m^{(-1)} c_0. \end{aligned}$$

напомним, что слово “пара(ко)циклический” означает, что для этих операций выполняются обычные соотношения на операции в циклической категории, кроме, может быть, равенства $\tau_n^{n+1} = 1$.

Так как C – $\mathcal{H}$ -модуль, мы можем распространить действие алгебры Хопфа $\mathcal{H}$ на тензорную степень C , используя коумножение в $\mathcal{H}$ (диагональное действие алгебры Хопфа на тензорном произведении), и рассмотреть фактор-комплекс

$$C_{\mathcal{H}}^*(C, \mathcal{M}), \quad C_{\mathcal{H}}^n(C, \mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{H}} (C^{\otimes n+1}).$$

Из условия (1) и стабильности модуля $\mathcal{M}$ следует, что введенные ранее паракоциклические операции индуцируют на $C_{\mathcal{H}}^*(C, \mathcal{M})$ структуру коциклического модуля, т.е. выполнено в том числе и условие $\tau_n^{n+1} = 1$. Более того, модуль $C_{\mathcal{H}}^*(C, \mathcal{M})$ коциклический, если и только если модуль $\mathcal{M}$ – стабильный анти-модуль Йеттера–Дринфельда.

По определению хопф-циклические (периодические) когомологии коалгебры C с коэффициентами $\mathcal{M}$, которые обозначаются через $HC_{\mathcal{H}}^*(C, \mathcal{M})$ (соответственно $HP_{\mathcal{H}}^*(C, \mathcal{M})$), – это циклические (соответственно периодические) когомологии коциклического модуля $C_{\mathcal{H}}^*(C, \mathcal{M})$. Это значит (см., например, книгу [7]), что по модулю $C_{\mathcal{H}}^*(C, \mathcal{M})$ нужно построить смешанный комплекс с дифференциалами b и B , с которым, в свою очередь, стандартным способом можно связать циклический (соответственно периодический) бикомплекс, чьи когомологии и называются циклическими (соответственно периодическими) когомологиями C .

Рассмотрим теперь алгебру A , на которой действует (слева) алгебра Хопфа $\mathcal{H}$ так, что выполнено равенство

$$h(ab) = h^{(1)}(a)h^{(2)}(b) \quad \text{для любых } a, b \in A, \quad h \in \mathcal{H}.$$

Пусть $C^*(A, \mathcal{M})$ – паракоциклический модуль, определенный равенствами

$$C^n(A, \mathcal{M}) = \text{Hom}(\mathcal{M} \otimes A^{\otimes n+1}, k),$$

где $\text{Hom}(A, B)$ – пространство $\mathbb{k}$ -линейных гомоморфизмов из A в B . Циклические операции на этом комплексе заданы следующими уравнениями (где для краткости знаки тензорного умножения заменены запятыми):

$$\begin{aligned} \delta_i f(m, a_0, \dots, a_{n+1}) &= \begin{cases} f(m, a_0, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_{n+1}), & 0 \leq i \leq n, \\ f(m^{(0)}, S^{-1}(m^{(-1)})(a_{n+1}) a_0, \dots, a_n), & i = n+1, \end{cases} \\ \sigma_i f(m, a_0, \dots, a_{n-1}) &= f(m, a_0, \dots, 1, \dots, a_{n-1}), \quad 0 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

здесь 1 стоит на i -м тензорном месте, и

$$\tau_n f(m, a_0, \dots, a_n) = f(m^{(0)}, S^{-1}(m^{(-1)})(a_n), a_0, \dots, a_{n-1}).$$

Как и ранее, в этом комплексе выполнены все соотношения на циклические операции, за исключением, может быть, равенства $\tau_n^{n+1} = 1$.

Рассмотрим теперь пространство $\mathcal{H}$ -линейных гомоморфизмов

$$\text{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{M} \otimes A^{\otimes n+1}, \mathbb{k});$$

мы полагаем, что алгебра Хопфа $\mathcal{H}$ действует на $\mathbb{k}$ при помощи коединицы, а на тензорном произведении $\mathcal{M} \otimes A^{\otimes n+1}$ – по формуле

$$h \cdot (m \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_n) = mS(h^{(1)}) \otimes h^{(2)}a_0 \otimes \dots \otimes h^{(n+2)}a_n.$$

Введенные ранее циклические операции индуцируют на $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{M} \otimes A^{\otimes n+1}, \mathbb{k})$ структуру коциклического модуля. Мы будем обозначать этот коциклический модуль $C_{\mathcal{H}}^*(A, \mathcal{M})$, а его циклические (соответственно хохшильдовы, периодические) когомологии называются хопф-циклическими (соответственно хохшильдовыми, периодическими) когомологиями A с коэффициентами $\mathcal{M}$. Они обозначаются $HC_{\mathcal{H}}^*(A, \mathcal{M})$ (соответственно $H_{\mathcal{H}}^*(A, \mathcal{M})$, $HP_{\mathcal{H}}^*(A, \mathcal{M})$).

Эти конструкции легко дуализуются: положим

$$C_n^{\mathcal{H}}(A, \mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{H}} A^{\otimes n+1}.$$

Это циклический комплекс, структурные операции в котором задаются следующими формулами (мы используем одни и те же обозначения для $\mathbb{k}$ -линейного и $\mathcal{H}$ -линейного тензорных произведений):

$$\begin{aligned} \delta_i(m \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_n) &= \begin{cases} m \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n, & 0 \leq i \leq n-1, \\ m^{(0)} \otimes S^{-1}(m^{(-1)})(a_n) a_0 \otimes \dots \otimes a_n, & i = n, \end{cases} \\ \sigma_i(m \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_n) &= m \otimes a_0 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \dots \otimes a_n, \quad 0 \leq i \leq n+1, \end{aligned}$$

где 1 стоит на i -м месте, и

$$\tau_n(m \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_n) = m^{(0)} \otimes S^{-1}(m^{(-1)})(a_n) \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-1}.$$

Хохшильдовы (соответственно циклические, периодические) гомологии этого комплекса называются хохшильдовыми (соответственно циклическими, периодическими) хопф-циклическими гомологиями A с коэффициентами $\mathcal{M}$.

Кроме указанных конструкций, существуют также понятия хопф-циклических гомологий и когомологий алгебр и коалгебр с *действием* алгебры Хопфа $\mathcal{H}$. Эти конструкции получаются очевидным образом из конструкций, которые мы только что описали, при помощи замены тензорного произведения над $\mathcal{H}$ на *котензорное* произведение над той же алгеброй Хопфа. Мы будем называть их, как и ранее, хопф-циклическими, периодическими хопф-циклическими и т.п. гомологиями и когомологиями соответствующего исходного объекта (алгебры или коалгебры). Эти когомологии будут встречаться в дальнейшем. Чтобы сделать изложение более понятным, мы будем указывать, о какой версии теории идет речь.

2. Примеры и вычисления

В этом разделе мы рассматриваем три примера вычисления хопф-циклических гомологий алгебры A с действием алгебры Хопфа, определение которых мы дали ранее. Во всех исследуемых нами случаях алгебра A является алгеброй гладких функций на гладком компактном многообразии без края, а действие или кодействие алгебры Хопфа на ней индуцировано действием некоторой группы на этом многообразии, сначала конечной дискретной группы, а затем – компактной группы Ли. Мы даем описание получающихся хопф-циклических гомологий (хохшильдовых, периодических) в терминах эквивариантных гомологий (в случае действия гладкой компактной группы нам придется несколько модифицировать данные определения, чтобы не испытывать затруднений с пополненными тензорными произведениями).

2.1. Действие конечной группы. С каждой группой G можно связать две естественные алгебры: групповую алгебру $\mathbb{k}[G]$ и алгебру функций на группе $C(G, \mathbb{k})$. В случае конечной группы эти две алгебры являются двойственными друг другу алгебрами Хопфа, изоморфными как векторные пространства: в каждом из них можно выбрать базис, занумерованный элементами группы G .

Обозначим соответствующие базисы в алгебрах $\mathbb{k}[G]$ и $C(G)$ символами U_g и δ_g соответственно (тут $g \in G$ – произвольный элемент). В терминах этих базисов легко записать умножение и коумножение (которое мы обозначаем Δ) в каждой из алгебр $\mathbb{k}[G]$ и $C(G)$, а именно:

$$U_{g'} \cdot U_{g''} = U_{g'g''}, \quad \Delta(U_g) = U_g \otimes U_g$$

в $\mathbb{k}[G]$, и

$$\delta_{g'} \cdot \delta_{g''} = \delta_{g'g''}^{g''}, \quad \Delta(\delta_g) = \sum_{h'h''=g} \delta_{h'} \otimes \delta_{h''}$$

в $C(G)$, где

$$\delta_{g'}^{g''} = \begin{cases} 1, & g' = g'', \\ 0, & g' \neq g''. \end{cases}$$

Коединицы в этих алгебрах определяются равенствами

$$\epsilon(U_g) = \delta_g^1, \quad \epsilon(\delta_g) = \delta_g^1,$$

а антиподальные отображения – равенствами

$$S(U_g) = U_{g^{-1}}, \quad S(\delta_g) = \delta_{g^{-1}}.$$

Таким образом, алгебра Хопфа $\mathbb{k}[G]$ кокоммутативная, но не коммутативная (если группа G не является абелевой), а алгебра $C(G)$, наоборот, коммутативная, но не кокоммутативная. Более того, эти алгебры двойственны друг другу, т.е. $\mathbb{k}[G] = C(G)^*$ как алгебры Хопфа (спаривание задается формулой $\langle U_{g'}, \delta_{g''} \rangle = \delta_{g'}^{g''}$), поэтому нам достаточно рассматривать только одну из них: вычисления для второй алгебры могут быть получены дуализацией.

Опишем теперь вкратце категорию (стабильных) анти-модулей Йеттера–Дринфеля для этих двух алгебр Хопфа. Прежде всего, так как эти алгебры двойственны друг другу, нам будет достаточно описать такие модули лишь для одной из них. Мы ограничимся алгеброй $C(G)$.

Каждый (левый) $C(G)$ -модуль $\mathcal{M}$ можно представить в виде прямой суммы подпространств:

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{M}_g, \quad \text{где } \mathcal{M}_g = \delta_g \cdot \mathcal{M}.$$

Заметим, что в силу двойственности кодействие алгебры Хопфа $C(G)$ – это то же самое, что и действие $\mathbb{k}[G]$: соответствие задается формулой

$$m \cdot U_g = m^g,$$

при том, что кодействие $C(G)$ задано как

$$\Delta(m) = \sum_{g \in G} m^g \otimes \delta_g.$$

В силу этого замечания, задать правое кодействие $C(G)$ на $\mathcal{M}$ – это то же самое, что задать правое действие группы G на этом пространстве. При этом условия Йеттера–Дринфеля принимают вид

$$(\mathcal{M}_g)h \subseteq \mathcal{M}_{h^{-1}gh}.$$

Условие стабильности тоже можно следующим образом переписать, используя действие группы: $R_g|_{\mathcal{M}_g} = \text{Id}$, где R_g обозначает действие элемента $g \in G$. Примером такого модуля служит “пучок-небоскреб в единице группы”: положим $\mathcal{M}_g = 0$, $g \neq 1$, и $\mathcal{M}_1 = V$, где V – представление группы G . Отметим, что это частный случай общей конструкции, сопоставляющей SAYD-модуль любому копредставлению коммутативной алгебры Хопфа.

Теперь мы опишем структуру хопф-циклических гомологий в случае, когда алгебра Хопфа – одна из рассмотренных в этом пункте. Сначала мы сделаем это для “пучка-небоскреба” (т.е. для модуля, ассоциированного с некоторым представлением V группы G , см. выше), а затем в общем случае.

2.1.1. Конечные группы: коэффициенты в “пучке-небоскребе”. Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{V}$ – пучок-небоскреб, ассоциированный с некоторым представлением V группы G . В этом подпункте мы опишем хопф-циклические когомологии некоторой $C(G)$ -комодульной алгебры, т.е. алгебры A , для которой задан гомоморфизм алгебр $A \rightarrow C(G) \otimes A$, удовлетворяющий условию коассоциативности, с коэффициентами в $\mathcal{M}$.

А именно, пусть алгебра A – алгебра функций на некотором гладком многообразии $\tilde{X}$, на котором действует (диффеоморфизмами) группа G . Тогда справедливо следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть конечная группа G свободно действует на гладком компактном многообразии $\tilde{X}$. Тогда пространство нечетных (соответственно четных) периодических хопф-циклических гомологий алгебры A гладких функций на $\tilde{X}$ с коэффициентами в $\mathcal{V}$ изоморфно пространству нечетных (соответственно четных) эквивариантных когомологий, $X = \tilde{X}/G$ с коэффициентами в плоском векторном расслоении $\tilde{V} = \tilde{X} \times V/G$ (точнее, прямой сумме таких пространств).

В общем случае, когда действие G не является свободным, следует заменить многообразие X на борелевское гомотопическое фактор-пространство $X_\tau = EG \times \tilde{X}/G$, а расслоение $\tilde{V}$ на $\tilde{V}_\tau = EG \times \tilde{X} \times V/G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этих утверждений основано на следующем простом наблюдении: на хопф-циклический комплекс, который можно связать с рассматриваемой ситуацией, можно обобщить конструкцию классического морфизма Хохшильда–Костанта–Розенберга. В самом деле, рассмотрим соответствующий циклический комплекс $C_*^{\mathcal{H}}(A, \mathcal{V})$, где $\mathcal{H} = C(G)$ и $A = C^\infty(\tilde{X})$. Он определен следующим образом:

$$C_n^{\mathcal{H}}(A, \mathcal{V}) = \mathcal{V} \square_{\mathcal{H}} A^{\otimes n+1}.$$

Здесь $\square_{\mathcal{H}}$ обозначает котензорное произведение над $\mathcal{H}$, причем все тензорные произведения алгебры $C^\infty(\tilde{X})$ мы рассматриваем в топологической категории, в частности, мы полагаем, что для любых многообразий X, Y справедливо равенство

$$C^\infty(X) \otimes C^\infty(Y) \cong C^\infty(X \times Y).$$

Кроме того, в силу двойственности алгебр $\mathbb{k}[G]$ и $C(G)$ котензорное произведение над $C(G)$ изоморфно обычному тензорному произведению модулей над $\mathbb{k}[G]$ (действие группы на $A^{\otimes n+1}$ диагональное). Дифференциалы b и B этого комплекса задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} b(v \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} v \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} a_i \otimes \cdots \otimes a_n \\ &\quad + (-1)^n \sum_{g \in G} \delta_g v \otimes a_n^g a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}, \end{aligned}$$

где a^g обозначает действие элемента g группы G на функции $a \in A$. Так как $\delta_g v = \delta_g^1 v$, последнее слагаемое в этой формуле равно $(-1)^n v \otimes a_n a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}$. Аналогичным образом, можно показать, что дифференциал B на $C_n^{\mathcal{H}}(A, \mathcal{V})$ совпадает с отображением

$$B(v \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i v \otimes 1 \otimes a_{n-i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-i}.$$

Классический гомоморфизм Хохшильда–Костанта–Розенберга $C_n(A) \rightarrow \Omega^n(\tilde{X})$ задается равенством

$$f_0 \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \mapsto \frac{1}{n!} f_0 \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_n.$$

Это отображение коммутирует с действием группы G , так что его можно продолжить до отображения $C_n^{\mathcal{H}}(A, \mathcal{V}) \rightarrow V \otimes_{\mathbb{C}[G]} \Omega^n(\tilde{X})$:

$$v \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto \frac{1}{n!} v \otimes a_0 \wedge da_1 \wedge \cdots \wedge da_n. \quad (2)$$

В случае, когда действие группы G на $\tilde{X}$ свободно, пространство $V \otimes_{\mathbb{C}[G]} \Omega^n(\tilde{X})$ будет изоморфно комплексу дифференциальных форм на X со значениями в расслоении $\tilde{V}$, $\Omega^*(X, \tilde{V})$, а дифференциал B отождествляется с обычным дифференциалом

де Рама на этом комплексе. Так как гомоморфизм Хохшильда–Костанта–Розенберга индуцирует изоморфизм на уровне гомологий Хохшильда, доказательство первого утверждения завершено: достаточно рассмотреть комплекс дифференциальных форм на X с коэффициентами в $\tilde{V}$ как смешанный комплекс с нулевым хохшильдывым дифференциалом b и B , равным дифференциалу де Рама с коэффициентами в $\tilde{V}$. Тогда согласно известному утверждению (см., например, [7]) раз морфизм Хохшильда–Костанта–Розенберга коммутирует с дифференциалами и устанавливает изоморфизм на уровне гомологий Хохшильда, он будет индуцировать и изоморфизм циклических периодических гомологий.

Чтобы доказать второе утверждение, надо приложить чуть больше усилий: так как группа G конечная, гомоморфизм (2) является квази-изоморфизмом комплексов $C_*^{\mathcal{H}}(A, \mathcal{V})$ и G -инвариантной части тензорного произведения $V \otimes \Omega^*(\tilde{X})$ (напомним, что G действует на тензорном произведении диагональным образом), изоморфной тензорному произведению $V \otimes_{\mathbb{C}[G]} \Omega^*(\tilde{X})$. С другой стороны, когомологии пространства X_τ с коэффициентами в плоском расслоении $\tilde{V}_\tau$ равны когомологиям бикомплекса

$$C^p(G, V \otimes \Omega^q(\tilde{X})) = \text{Hom}(\mathbb{C}[G]^{\otimes p}, (V \otimes \Omega^q(\tilde{X}))),$$

с дифференциалами, заданными обычным дифференциалом де Рама в $\Omega^*(\tilde{X})$ и дифференциалом бар-конструкции. Рассмотрим спектральную последовательность, связанную с этим бикомплексом: так как группа G конечная и основное поле имеет нулевую характеристику, эта спектральная последовательность обрывается на члене E^2 , равном когомологиям комплекса $V \otimes_{\mathbb{C}[G]} \Omega^*(\tilde{X})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Только что доказанное утверждение легко обобщается на случай бесконечной дискретной группы G , свободно действующей на (некомпактном) пространстве $\tilde{X}$ с компактным фактор-пространством. В этом случае, чтобы не было проблем со сходимостью, надо рассматривать алгебру $C_0(G)$ – алгебру функций на группе G с конечным носителем (или вовсе перейти к двойственной алгебре $\mathbb{k}[G]$).

2.1.2. Конечные дискретные группы: случай произвольного модуля коэффициентов. В этом подпункте мы рассмотрим чуть более общую ситуацию: мы все так же предполагаем, что группа G конечная, но при этом мы не требуем, чтобы модуль коэффициентов $\mathcal{M}$ был “сконцентрирован” в одной точке группы G (представлял собой “пучок-небоскреб”). Вместо этого мы считаем, что $\mathcal{M}$ представляет собой “векторное расслоение” над G ; в дискретном случае это обычно означает, что все подпространства $\mathcal{M}_g$ имеют одинаковую размерность. Если это предположение не выполнено и размерность $\mathcal{M}_g$ различается, наши конструкции следует слегка модифицировать, так, чтобы получающиеся расслоения могли иметь разные ранги над разными компонентами связности многообразия. При этом рассуждения будут почти дословно повторять рассуждения, применимые к основному случаю, – требуются лишь незначительные изменения в определениях (некоторые, самые значительные из них, мы разъясняем в ходе изложения).

Итак, пусть $\mathcal{M}$ – SAYD над алгеброй $\mathbb{C}[G]$. Рассмотрим декартово произведение G и $\tilde{X}$. На этом пространстве можно определить действие группы G , положив, что она действует на G сопряжениями и обычным способом на $\tilde{X}$. Рассмотрим пространство ${}_G X \subseteq G \times \tilde{X}$ (см. [8]):

$${}_G X = \{(g, x) \in G \times \tilde{X} \mid gx = x\}.$$

Мы будем предполагать, что ${}_G X$ – гладкое подмногообразие в $G \times \tilde{X}$ (при этом, правда, оно может иметь связные компоненты разных размерностей). Это условие выполняется, например, в случае свободного действия группы: при этом пространство ${}_G X$ представляет собой просто подмножество $\{e\} \times X \subseteq G \times X$ (e – единица группы). Другой типичный пример – действие группы $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ на прямой $\mathbb{R}^1$: в этом случае ${}_G \mathbb{R}^1 = \{1\} \times \mathbb{R}^1 \cup \{-1\} \times \{0\}$. Очевидно также, что условие выполнено, например, если все неподвижные точки элементов $g \neq e$ группы G изолированы, или, более общим образом, если для каждого элемента $g \in G$ множество неподвижных точек представляет собой подмногообразие в $\tilde{X}$.

Действие G на декартовом произведении может быть ограничено на ${}_G X$. Рассмотрим обратный образ расслоения $\mathcal{M}$ относительно проекции $G \times \tilde{X} \rightarrow G$ и ограничим его на подпространство ${}_G X$. Мы получаем плоское (на самом деле, даже тривиальное) расслоение ${}_G \mathcal{M} \rightarrow {}_G X$, эквивариантное относительно действия группы G (если модуль $\mathcal{M}$ не является расслоением в указанном выше смысле, мы получаем в результате этих действий не одно эквивариантное расслоение, а набор расслоений, вообще говоря, разного ранга над разными компонентами связности ${}_G X$). Теперь мы можем сформулировать основное утверждение этого пункта.

ТЕОРЕМА 2. *Хопф-циклические гомологии $\mathbb{C}(G)$ -комодульной алгебры $C^\infty(\tilde{X})$ с коэффициентами в $\mathcal{M}$ равны когомологиям борелевского фактор-пространства ${}_G X_\tau$ с коэффициентами в плоском расслоении ${}_G \mathcal{M}_\tau$ (если модуль $\mathcal{M}$ не является расслоением, мы получаем аналогичное утверждение, при этом ранг расслоения ${}_G \mathcal{M}_\tau$ над разными компонентами связности пространства ${}_G X_\tau$ может отличаться).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого факта основано на следующей конструкции (см. лемму 3), обобщающей доказательство гладкой версии теоремы Хохшильда–Костанта–Розенберга, см. [9; гл. 8]. Для начала напомним конструкции, использовавшиеся в этой книге. Фиксируем произвольную риманову структуру на гладком компактном многообразии X ; без ограничения общности (так как мы предполагаем, что многообразие компактно) можно считать, что X полно относительно получающейся метрики. Тогда для любых двух точек $x_0, x_1 \in X$, находящихся достаточно близко друг от друга, существует единственная кратчайшая геодезическая γ , их соединяющая. Можно считать, что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma(1) = x_1$. Пусть ξ_{x_0, x_1} обозначает касательный вектор к кривой γ в точке x_0 . Определим векторное поле ξ на достаточно малой трубчатой окрестности U диагонали $\Delta(X)$ в декартовом квадрате многообразия X , положив $\xi(x_0, x_1) = (\xi_{x_0, x_1}, 0)$. В этой формуле мы отождествляем касательное пространство к $X \times X$ в точке (x_0, x_1) с прямой суммой пространств $T_{x_0} X$ и $T_{x_1} X$. Заметим, что векторное поле ξ на $U \subseteq X \times X$ не обращается в нуль вне диагонали $\Delta(X) \subset U \subseteq X \times X$. В цитируемой книге показано, что поле ξ можно продолжить до векторного поля на всем декартовом произведении $X \times X$ с сохранением того же свойства. Мы будем обозначать такое продолжение тем же самым символом ξ .

Рассмотрим комплекс

$$C^{HKR}(X) = (\Omega_1^*(X \times X), \iota_\xi).$$

Здесь символом $\Omega_1^*(X \times X)$ обозначен обратный образ комплекса де Рама X при проекции на первый сомножитель $X \times X \rightarrow X$, а $\iota_\xi: \Omega^p(X \times X) \rightarrow \Omega^{p-1}(X \times X)$

обозначает операцию свертки дифференциальных форм с векторным полем ξ . Из формул Картана следует, что $\iota_\xi^2 = 0$.

Мы утверждаем, что комплекс $C^{HKR}(X)$ является проективной резольвентой алгебры $C^\infty(X)$ как бимодуля. В самом деле, проективность очевидна, поскольку пространство сечений векторного расслоения над компактным многообразием, в частности, обратного образа $\Lambda^* T^* X$ на $X \times X$, всегда является проективным модулем над алгеброй гладких функций на многообразии, т.е. над алгеброй $C^\infty(X \times X) \cong C^\infty(X) \hat{\otimes} C^\infty(X)$ в нашем случае, где $\hat{\otimes}$ означает пополненное тензорное произведение. Также ясно, что дифференциал ι_ξ коммутирует с умножением на элементы алгебры $C^\infty(X \times X)$. Наконец, мы можем вычислить гомологии комплекса $C^{HKR}(X)$. На самом деле, в книге [9] авторы строят стягивающую гомотопию для комплекса, который мы сейчас рассматриваем. Мы можем использовать эту проективную резольвенту везде, где речь пойдет о гомологиях Хохшильда алгебры $C^\infty(X)$.

Применим теперь стандартные конструкции гомологий Хохшильда с коэффициентами в бимодуле к бимодулю над $C^\infty(\tilde{X})$, где $\tilde{X}$ – многообразие с действием на нем группы G (напомним, что мы предполагаем его компактность). Бимодуль, который мы будем рассматривать, представляет собой сечения векторного расслоения $p_1^*(\mathcal{M})$ над $G \times \tilde{X}$ (здесь p_1 обозначает проекцию на первый множитель декартова произведения). Зададим в качестве правого умножения на элемент $f \in C^\infty(\tilde{X})$ обычное произведение, в то время как левое умножение будет определяться формулой

$$(f \cdot (m \otimes h))(g, x) = m \otimes f(g^{-1}x)h(x),$$

где $m \otimes h \in \mathcal{M} \otimes C^\infty(X)$ – неразложимый элемент (очевидно, все сечения расслоения $p_1^*(\mathcal{M})$ можно представить как линейные комбинации элементов такого вида). Обозначим получившийся модуль как $\tilde{\mathcal{M}}$.

ЛЕММА 3 (Теорема Хохшильда–Костанта–Розенберга). *Гомологии Хохшильда алгебры $C^\infty(\tilde{X})$ с коэффициентами в бимодуле $\tilde{\mathcal{M}}$ совпадают с пространством форм де Рама на пространстве ${}_G X$ с коэффициентами в расслоении ${}_G \mathcal{M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что для любой алгебры A и любого бимодуля M над A гомологии Хохшильда алгебры A с коэффициентами в M равны $\text{Tot}_*^{A^e}(A, M)$, где $A^e = A \otimes A^{\text{op}}$ обозначает обертывающую алгебру для алгебры A . Как известно, производный функтор Tot^{A^e} можно определить как гомологии комплекса, получающегося в результате тензорного произведения M и произвольной резольвенты проективных A^e -модулей (или A -бимодулей) для алгебры A . Для наших целей в случае $A = C^\infty(\tilde{X})$ мы можем воспользоваться резольвентой $C^{HKR}(\tilde{X})$, описанной выше.

Рассмотрим тензорное произведение

$$C_*(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{M}}) = \tilde{\mathcal{M}} \otimes_{A^e} C^{HKR}(\tilde{X}).$$

Опишем комплекс $C_*(\tilde{X}, M)$ и его дифференциал более явно. Прежде всего, заметим, что для любых бимодулей M и N над алгеброй A имеется изоморфизм (векторных пространств) $M \otimes_{A^e} N = (M \otimes_A N)^A$, где для A -бимодуля индекс A означает факторизацию модуля по соотношениям $x \cdot a = a \cdot x$. В нашем случае $M = \tilde{\mathcal{M}}$, $N = C^{HKR}(\tilde{X})$ и из определения комплекса $C^{HKR}(\tilde{X})$ следует, что как линейное пространство тензорное произведение $M \otimes_A N$ равно $\Omega_1^*(G \times \tilde{X} \times \tilde{X}, \mathcal{M})$, т.е. равно пространству сечений обратного образа $\tilde{p}_1^*(\Omega^*(G \times \tilde{X}, \mathcal{M}))$, где $p_1: G \times \tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow G \times \tilde{X}$

есть проекция на первый множитель $\tilde{X}$ в декартовом произведении, а $\Omega^*(G \times \tilde{X}, \mathcal{M})$ – пространство дифференциальных форм на $G \times \tilde{X}$ с коэффициентами в расслоении $\mathcal{M}$ (мы не различаем здесь $\mathcal{M}$ и его обратный образ на $G \times \tilde{X}$).

Теперь заметим, что факторизация пространства $\Omega^*(G \times \tilde{X}, \mathcal{M})$ по всем коммутаторам равносильна применению к дифференциальным формам следующей операции: пусть дифференциальная форма локально записывается в виде

$$a(g, x)b(y) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p},$$

где $a(g, x)$ – функция со значениями в $\mathcal{M}$, а $b(y)$ – некоторая функция на $\tilde{X}$; так как любая форма может быть представлена как предел последовательности линейных комбинаций форм этого вида, достаточно ограничиться рассмотрением только таких форм. Но форму $a(g, x)b(y) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ по модулю коммутаторов можно отождествить с $a(g, x)b(gx) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ (поскольку для функции b мы имеем $g^{-1}(b)(x) = b(gx)$). Таким образом, заключаем, что как линейное пространство $C_*(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{M}})$ равно обратному образу $\Omega^*(G \times \tilde{X} \times \tilde{X}, \mathcal{M})$ на $G \times \tilde{X}$ относительно отображения $i_G: (g, x) \mapsto (g, x, gx)$. Заметим, что в данном случае это отображение является вложением.

Опишем теперь, какой дифференциал в комплексе $C_*(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{M}})$ мы рассматриваем. Векторное поле ξ (точнее, его обратный образ на пространстве $G \times \tilde{X} \times \tilde{X}$, который является несвязным накрытием над $\tilde{X} \times \tilde{X}$), описанное выше, надо ограничить на образ отображения i_G . Тогда оно совпадет с полем $di_g(\xi_G)$ (di_g – это гомоморфизм касательных расслоений, индуцированный i_G , т.е. дифференциал отображения i_G), где векторное поле ξ_G на $G \times \tilde{X}$ задается согласно правилу $\xi_G(g, x) = \xi_{x, gx}$ для любых $g \in G, x \in \tilde{X}$. Заметим, что $\xi_G(g, x) \neq 0$, если $gx \neq x$.

Наконец, нам нужно показать, что гомологии комплекса $(i_G^*(\Omega^*(G \times \tilde{X}, \mathcal{M})), \xi_G)$ равны комплексу дифференциальных форм на пространстве ${}_G X$ со значениями в ${}_G \mathcal{M}$. С этой целью заметим сначала, что все элементы нашего комплекса, носители которых лежат вне подмногообразия ${}_G X$ в $G \times \tilde{X}$, не вносят никакого вклада в когомологии, поскольку ξ_G отлично от нуля в дополнении к ${}_G X$, так что весь комплекс, ограниченный на дополнение, является стягиваемым. Таким образом, рассматриваемые нами когомологии определяются исключительно ростками элементов в ${}_G X$. Поэтому рассмотрим малую трубчатую окрестность подмногообразия ${}_G X$ в $G \times \tilde{X}$. Поскольку G дискретно (и даже конечно), можно зафиксировать элементы группы g и рассмотреть следующие нормальные координаты в трубчатой окрестности: $(\{x_i\}, \{\bar{x}_j\})$, где $\{x_i\}$ – координаты на ${}_G X$, а $\{\bar{x}_j\}$ – координаты на слое нормального расслоения к ${}_G X$. Теперь, поскольку $gx = x$ для любого $(g, x) \in {}_G X$, мы заключаем, что векторное поле ξ_G (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) задается формулой

$$\xi_G(\{x_i\}, \{\bar{x}_j\}) = \rho_g^x(\{\bar{x}_j\}) - \{\bar{x}_j\},$$

где ρ_g^x – это представление, индуцированное g на нормальном подпространстве к ${}_G X$ в точке x . Это векторное поле невырождено на нормальном расслоении, следовательно, поле ξ_G также невырождено. Тогда мы можем взять его в качестве одной из нормальных координат в трубчатой окрестности. После этого прямые вычисления в локальных координатах показывают, что заключение леммы 3 верно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрение композиции квазиизоморфизма между комплексами $C_*(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{M}})$ и $\Omega^*({}_G X, {}_G \mathcal{M})$ с изоморфизмом между двумя резольвентами бимодуля

$C^\infty(\tilde{X})$: $C_*(C^\infty(\tilde{X}))$ и $C^{HKR}(\tilde{X})$ (см. [9; гл. 8]) приводит к следующей формуле для отображения Хохшильда–Костанта–Розенберга $C_n^{\mathcal{H}}(C^\infty(\tilde{X}), \mathcal{M}) \rightarrow \Omega^*({}_G X, {}_G \mathcal{M})$:

$$\psi(g) \otimes f_0(x_0) \otimes f_1(x_1) \otimes \cdots \otimes f_n(x_n) \mapsto \frac{1}{n!} \psi(g) f_0(x) df_1(x) \wedge \cdots \wedge df_n(x),$$

где $\psi \in \mathcal{M}$, $f_i \in C^\infty(\tilde{X})$, $x_i \in \tilde{X}$, $i = 0, 1, \dots, n$, и $(g, x) \in {}_G X$.

Теперь теорема 2 легко выводится из леммы 3. Прежде всего, заметим, что взятие инвариантов относительно действия конечной группы над полем характеристики нуль является точным функтором, так что мы получаем “эквивариантную теорему Конна–Хохшильда–Костанта–Розенберга”: циклические гомологии Хопфа алгебры $C^\infty(\tilde{X})$ с коэффициентами в $\mathcal{M}$ равны G -инвариантной части комплекса $\Omega^*({}_G X, {}_G \mathcal{M})$. При этом дифференциал B в комплексе циклических гомологий Хопфа соответствует дифференциалу де Рама. Таким образом, мы можем здесь применить рассуждения, выше использованные для случая $\mathcal{M} = V$, заменив X на ${}_G X$, а $\tilde{V}$ – на ${}_G \mathcal{M}$.

Заметим, что конечные группы являются компактными, так что конструкции, рассматриваемые в следующем пункте, дают другое описание циклических гомологий Хопфа с коэффициентами, возникающих при действии конечной группы.

2.2. Действие компактной группы: аналог результата Блока–Гетцлера.

В данном пункте мы кратко обсудим случай, когда рассматриваемая алгебра Хопфа является алгеброй гладких функций на компактной группе Ли. Мы сформулируем аналог теоремы Блока–Гетцлера (см. [5]) при наличии нетривиального модуля коэффициентов, в роли которого будет выступать модуль сечений эквивариантного расслоения на G .

Следует заметить, что при работе с алгебрами гладких функций на многообразиях не вполне удобно говорить об алгебраическом тензорном произведении алгебр и т.д., поскольку подобные алгебраические конструкции не являются функториальными относительно гладких отображений, декартовых произведений и т.д. Традиционный способ преодоления этой сложности заключается в рассмотрении подходящего пополнения тензорного произведения, что равносильно следующему подходу: вместо тензорных произведений алгебр, мы будем работать с алгебрами функций на декартовых произведениях пространств. Все прочие конструкции следует модифицировать аналогичным образом. Ниже мы будем придерживаться именно этой точки зрения, если только обратное не указано явно.

Мы начнем с напоминания того, как в работе [5] описывается пучок эквивариантных дифференциальных форм. Пусть группа G действует на себе сопряжениями. Тогда на G определена эквивариантная топология, т.е. все открытые множества должны сохраняться при сопряжениях элементами группы G . Для произвольного элемента g из группы G обозначим X^g множество точек в X , стабильных относительно действия элемента g :

$$X^g = \{x \in X \mid g(x) = x\}.$$

Пусть $G^g = \{h \in G \mid gh = hg\}$ – централизатор элемента g , а $\mathfrak{g}^g$ – алгебра Ли группы G^g или, равносильно,

$$\mathfrak{g}^g = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \text{Ad}_g \xi = \xi\}.$$

Заметим, что $h(X^g) = X^g$ для всех $h \in G^g$. Таким образом, X^g является G^g -эквивариантным многообразием. Следуя [5], мы определим эквивариантные дифференциальные формы на X как пучок на G , стебель которого в точке g определяется формулой

$$\Omega_g^\bullet(X, G) = \Omega_{G^g}^\bullet(X^g),$$

где $\Omega_{G^g}^\bullet(X^g)$ означает обычные эквивариантные формы на X^g в смысле Картана, точнее, их пополнение:

$$\Omega_{G^g}^\bullet(X^g) = C_0^\infty(\mathfrak{g}^g, \Omega^\bullet(X^g))^{G^g},$$

т.е. G^g -инвариантную часть ростков в 0 гладких отображений из $\mathfrak{g}^g$ в $\Omega^\bullet(X^g)$; дифференциал задается обычной формулой Картана.

Далее, определим (см. [5; § 1]) *эквивариантный пучок на G* эквивариантных форм на X : сначала зададим действие группы G на несвязном объединении слоев $\bigcup_{g \in G} \Omega_{G^g}^\bullet(X^g)$, положив для каждого $k \in G$

$$\omega \mapsto k \cdot \omega \in \Omega_{k \cdot G^g}^\bullet(X^{k \cdot g}).$$

Здесь $k \cdot g$ и $k \cdot G^g$ обозначают сопряжение элемента g и множества G^g элементом k . Это действие коммутирует с эквивариантным дифференциалом.

Далее, определим топологию в $\bigcup_{g \in G} \Omega_{G^g}^\bullet(X^g)$: мы скажем, что точка $h = g \exp \xi$ ($\xi \in \mathfrak{g}^g$, а значит, $h \in G^g$) *близка* к $g \in G$, если $X^h \subseteq X^g$ и $G^h \subset G^g$. По лемме 1.3 из работы [5] множество всех точек в G^g , которые *близки* к g , образуют открытую окрестность элемента g в G^g . Наконец, сечение $\omega \in \Gamma(U; \Omega^\bullet(X, G))$ (U – инвариантное открытое множество) определяется как семейство форм $\omega_g \in \Omega_{G^g}^\bullet(X^g)$, $g \in U$, таких, что если h *близко* к g , то

$$\omega_g|_{X^h \times \mathfrak{g}^h} = \omega_h$$

(ограничение здесь – это обычное ограничение ростков).

Наконец, опишем дифференциал: на пространстве $\Omega_{G^g}^\bullet(X^g)$ заданы отображения d – дифференциал де Рама:

$$(d\omega)(X) = d(\omega(X)),$$

и ι :

$$(\iota\omega)(X) = \iota_X(\omega(X))$$

для произвольного $X \in \mathfrak{g}^g$, где ι_X – свертка дифференциальной формы на X^g с векторным полем, индуцированным X . Из тождества Картана следует, что $(d + \iota)^2 = 0$. Когомологии комплекса $\Omega_{G^g}^\bullet(X^g)$ относительно дифференциала $d_G = d + \iota$ (дифференциала Картана) называются *эквивариантными когомологиями* пространства X^g .

В цитируемой работе [5] был построен естественный изоморфизм (аналог изоморфизма Конна) между пучком эквивариантных групп когомологий, ассоциированным с описанным выше пучком эквивариантных дифференциальных форм, и пучком эквивариантных циклических когомологий пучка функций на X . Сечения пучка когомологий над каждым Ad_G -инвариантным открытым подмножеством U в X

в обозначениях нашей статьи, – циклические гомологии Хопфа $\mathcal{O}(G)$ -комодульной алгебры $C^\infty(U)$ с коэффициентами в SAYD-модуле $\mathcal{O}(G)$. Ради краткости мы не будем здесь повторять конструкцию Блока–Гетцлера для этого пучка циклических комплексов (несколькими строчками ниже мы дадим схему описания несколько более общей конструкции). Заметим только, что, как мы говорили выше, тензорные произведения алгебр $C^\infty(X)$ и $\mathcal{O}(U)$, которые появляются в нашем определении (см. раздел 1), следует рассматривать как алгебры функций на декартовом произведении пространства U и n -кратной декартовой степени пространства X . Тогда все операторы циклической структуры можно выразить в терминах отображений этого пространства: эту точку зрения использовали Блок и Гетцлер.

Пусть $\mathcal{M}$ – модуль коэффициентов для алгебры Хопфа функций на группе G . Мы предполагаем, что он на самом деле есть модуль гладких сечений некоторого гладкого эквивариантного векторного расслоения E над G . Тогда, аналогично определению, данному выше, мы можем построить на G пучок эквивариантных E -значных дифференциальных форм на X .

Прежде всего, для каждого $g \in G$ рассмотрим экспоненциальное отображение

$$\exp_g: \mathfrak{g}^g \rightarrow G, \quad X \mapsto g \exp(X),$$

где $X \in \mathfrak{g}^g$, а $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ – обычное экспоненциальное отображение на группе G . Пусть $\tilde{E}^g = \exp_g^* E \rightarrow \mathfrak{g}^g$ обозначает обратный образ расслоения E . Группа G^g действует на своей алгебре Ли присоединенным действием Ad , и ясно, что расслоение $\tilde{E}^g$ будет эквивариантным, если мы рассмотрим действие, индуцированное действием группы G на E : заметим, что сопряжение любым элементом $h \in G^g$ оставляет g на месте и индуцирует сопряженное действие на алгебре Ли $\mathfrak{g}^g$.

Итак, мы определяем слой пучка $\Omega^\bullet(X, G; E)$ в точке g как

$$\Omega_g^\bullet(X, G; E) = \Omega_{G^g}^\bullet(X^g; E) = C_0^\infty(\mathfrak{g}^g, \Omega^\bullet(X^g) \otimes \tilde{E}^g)^{G^g}$$

т.е. как G^g -инвариантные дифференциальные формы на X^g с коэффициентами в ростках сечений расслоения $\tilde{E}^g$ в 0 (мы определяем действие группы G^g на этом пространстве как комбинацию действий на X^g и на $\tilde{E}^g$). Мы можем продолжить дифференциал Картана на эти модули, если положим $d_G(e) = 0$ для $e \in \tilde{E}^g$. Определим затем пространство сечений пучка $\Omega^\bullet(X, G; E)$ над эквивариантным открытым подмножеством $U \subseteq G$. Оно задается так, чтобы для всех h , близких к g ,

$$\omega_g|_{X^h \times \mathfrak{g}^h} = \omega_h,$$

где *близкий* означает, как и ранее, что $G^h \subseteq G^g$ и $X^h \subseteq X^g$, а в левой части мы рассматриваем ограничение ростка сечения в $\tilde{E}_g$ на аффинное подпространство $X + \mathfrak{g}^h$, где X – это вектор в $\mathfrak{g}^g$ такой, что $\exp_g(X) = h$.

Рассмотрим также пучок $C^\bullet(G, X; \mathcal{M})$ циклических комплексов Хопфа на G , полагая

$$\Gamma(U; C^\bullet(G, X; \mathcal{M})) = C_{\mathcal{O}(G)}^\bullet(C^\infty(X), \mathcal{E}(U)) = \bigoplus_{n \geq 0} (\mathcal{E}(U) \otimes C^\infty(X)^{\otimes n+1})^G,$$

где $\mathcal{E}(U)$ обозначает SAYD $\mathcal{O}(G)$ -модуль сечений расслоения $E|_U$, а верхний индекс G справа обозначает пространство G -инвариантов. Если, как и в статье Блока и

Гетцлера, принять топологическую точку зрения на тензорные произведения, то на $\Gamma(U; C^\bullet(G, X; \mathcal{M}))$ надо смотреть как на пространство (гладких) сечений расслоения $p^*(E|_U)$, где $p: U \times X^{\times n} \rightarrow U$ – проекция. Эти два подхода эквивалентны (если использовать подходящее топологическое тензорное произведение). Ниже мы будем часто использовать обе точки зрения.

Нам нужно обобщить определение отображения Хохшильда–Костанта–Розенберга на нашу ситуацию, что производится прямым и естественным образом по аналогии с определением Блока и Гетцлера: рассмотрим семейство отображений χ_g из $\mathcal{E}(G) \otimes C^\infty(X)^{\otimes k+1}$ в $C_0^\infty(\mathfrak{g}^g, \Omega^k(X^g) \otimes \tilde{E}_g)$, определенное формулой

$$\begin{aligned} \chi_g(e \otimes f_0 \otimes \cdots \otimes f_k)(X) \\ = e(g \exp X) \int_{\Delta^k} f_0 d(e^{t_1 X} \cdot f_1) \wedge \cdots \wedge d(e^{t_k X} \cdot f_k) |_{X^g} dt_1 \dots dt_k, \end{aligned}$$

где $X \in \mathfrak{g}^g$, а Δ^k – стандартный k -мерный симплекс,

$$\Delta^k = \{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_k \leq 1\}.$$

Отображения χ_g эквивариантны и задают морфизм пучков над G

$$\chi: C^\bullet(G, X; \mathcal{M}) \rightarrow \Omega^\bullet(X, G; E).$$

Повторяя рассуждения из [5; предложение 3.1], можно показать, что

$$\chi_g(X + Y) = \chi_h(Y) \quad \text{для любого } Y \in \mathfrak{g}^h,$$

если $\exp_g(X) = h$.

Далее, мы имеем следующее обобщение теоремы [5; теорема 3.2].

ТЕОРЕМА 4. *Рассмотрим отображение*

$$\chi_g: C^\bullet(G, X; \mathcal{M}) \rightarrow \Omega_g^\bullet(X, G; E).$$

Имеют место следующие утверждения:

1) *дифференциал Хохшильда на $C^\bullet(G, X; \mathcal{M})$ переходит в дифференциал ι на $\Omega_g^\bullet(X, G; E)$:*

$$\chi_g(bc) = \iota \chi_g(c);$$

2) *оператору B соответствует дифференциал d*

$$\chi_g(Bc) = d\chi_g(c).$$

Нам нужно показать, что χ является квазиизоморфизмом комплексов. Мы можем следовать доказательству в [5] (леммы 3.4–3.9) и, таким образом, свести доказываемое утверждение к следующей лемме (заметим, что пучок сечений является вялым, а значит, когомологии пучка не оказывают влияние на наши рассуждения в данном случае).

ЛЕММА 5. *Эквивариантное отображение Хохшильда–Костанта–Розенберга*

$$\chi: (\mathcal{E}(g \exp \mathcal{O}) \otimes C^\infty(U^{\bullet+1}), b) \rightarrow (C_0^\infty(\mathcal{O}, \Omega^\bullet(U^g) \otimes \tilde{E}_g), \iota)$$

является квазиизоморфизмом комплексов для любой выпуклой инвариантной окрестности U нуля в представлении группы G для любого $g \in G$ и любого малого шара $\mathcal{O}$ с центром в нуле в алгебре Ли $\mathfrak{g}^g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U – выпуклая инвариантная окрестность нуля в линейном представлении (V, ρ) группы G , а $\mathcal{O}$ – окрестность нуля в $\mathfrak{g}^g$. Линейное пространство $C^\infty(U) \otimes \mathcal{E}(g \exp \mathcal{O})$ является модулем над $C^\infty(U^2)$ относительно действия

$$(h \cdot (f \otimes m))(x, ge^X) = h(x, e^X x) f(x) m(ge^X),$$

для всех $h \in C^\infty(U^2)$ и $f \otimes m \in C^\infty(U) \otimes \mathcal{E}(g \exp \mathcal{O})$.

Можно проверить, что когомологии в левой части утверждения леммы равны

$$\mathrm{Tor}_{\bullet}^{C^\infty(U^2)}(C^\infty(U) \otimes \mathcal{E}(g \exp \mathcal{O}), C_{(g)}^\infty(U)),$$

где $C_{(g)}^\infty(U)$ есть модуль, как линейное пространство изоморфный $C^\infty(U)$, с действием алгебры $f \in C^\infty(U^2)$, заданным формулой

$$(f \cdot m)(x, g) = f(x, gx) m(x).$$

Мы можем посчитать группы кручения при помощи резольвенты типа Кошуля (см. [5], обсуждение после леммы 3.9)

$$\begin{aligned} C^\infty(U^2) \otimes \mathcal{E}(g \exp \mathcal{O}) \otimes \Lambda^2 V^* &\xrightarrow{\iota(R+L)} C^\infty(U^2) \otimes \mathcal{E}(g \exp \mathcal{O}) \otimes V^* \\ &\xrightarrow{\iota(R+L)} C^\infty(U^2) \otimes \mathcal{E}(g \exp \mathcal{O}) \xrightarrow{\Gamma^*} C^\infty(U) \otimes \mathcal{E}(g \exp \mathcal{O}). \end{aligned}$$

Здесь алгебра $f \in C^\infty(U^2)$ действует на $C^\infty(U^2) \otimes \mathcal{E}(g \exp \mathcal{O}) \otimes \Lambda^\bullet V^*$ по формуле

$$(f \cdot \omega)(x, y, ge^X) = f(x, y) \omega(x, y, ge^X),$$

а Γ^* есть обратный образ относительно отображения

$$\Gamma: U \times g \exp \mathcal{O} \ni (x, ge^X) \mapsto (x, e^X x, ge^X) \in U^2 \times g \exp \mathcal{O}.$$

Граничный оператор в комплексе равен $\iota(R+L)$, где

$$R, L \in C^\infty(U^2) \otimes \mathcal{E}(g \exp \mathcal{O}) \otimes V$$

заданы в точке $(x, y, ge^X) \in U^2 \times g \exp \mathcal{O}$ формулами

$$R(x, y, ge^X) = x - y, \quad L(x, y, ge^X) = d\rho(X)x.$$

Мы завершаем доказательство замечанием, что, считая шар $\mathcal{O}$ достаточно малым, мы видим, что ограничения векторных расслоений $\mathcal{E}(g \exp \mathcal{O})$ и $\tilde{\mathcal{E}}^g(\mathcal{O})$ изоморфны и тривиальны:

$$\mathcal{E}(g \exp \mathcal{O}) \cong E_g \otimes \mathcal{O}(g \exp \mathcal{O}) \cong \tilde{\mathcal{E}}^g(\mathcal{O}).$$

Следовательно, мы можем дословно воспользоваться конструкцией из работы [5] (тензорно умножая все комплексы и отображения на E_g) для того, чтобы показать, что описанный нами кошулевский комплекс вычисляет группы кручения, что соответствующие гомологии равны эквивариантному комплексу де Рама и что изоморфизм задается отображением χ .

Наконец, заметим, что, как и раньше, из доказанной теоремы следует, что все циклические теории когомологий, связанные с пучками $C^\bullet(G, X; \mathcal{M})$ и $\Omega^\bullet(X, G; E)$, изоморфны. В частности, (периодические) циклические гомологии Хопфа алгебры $C^\infty(X)$ с коэффициентами в $\mathcal{M}$ изоморфны эквивариантным гомологиям многообразия X с коэффициентами в расслоении E .

Второй автор выражает благодарность Петру Хаяцу, Томашу Машчику и другим участникам программы “Noncommutative Geometry and Quantum groups” (ИМПАН, Варшава) за многочисленные обсуждения и поддержку.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Connes, H. Moscovici, “Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem”, *Comm. Math. Phys.*, **198**:1 (1998), 199–246.
- [2] M. Crainic, “Cyclic cohomology of Hopf algebras”, *J. Pure Appl. Algebra*, **166**:1-2 (2002), 29–66.
- [3] P. M. Hajac, M. Khalkali, B. Rangipour, M. Sommerhäuser, “Hopf cyclic homology and cohomology with coefficients.”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **338**:9 (2004), 667–672.
- [4] A. Kaygun, “Bialgebra cyclic homology with coefficients”, *K-Theory*, **34**:2 (2005), 151–194.
- [5] J. Block, E. Getzler, “Equivariant cyclic homology and equivariant differential forms”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **27**:4 (1994), 493–527.
- [6] M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*, W. A. Benjamin, New York, 1969.
- [7] J.-L. Loday, *Cyclic Homology*, Grundlehren Math. Wiss., **301**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [8] P. Baum, P. Schneider, “Equivariant-bivariant Chern character for profinite groups”, *K-Theory*, **25**:4 (2002), 313–353.
- [9] J. M. Gracia-Bondía, J. C. Várilly, H. Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.

И. М. Никонов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: nikonovim@gmail.com

Поступило

03.03.2012

Исправленный вариант

22.11.2014

Г. И. Шарыгин

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Институт теоретической и экспериментальной
физики им. А. И. Алиханова, г. Москва
E-mail: sharygin@itep.ru