Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Ковтонюк, В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов,
Е. А. Севостьянов, Граничное поведение классов
Орлича–Соболева, *Матем. заметки*, 2014, том 95, вы-
пуск 4, 564–576

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9355>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:18:32

Граничное поведение классов Орлича–Соболева

Д. А. Ковтонюк, В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов

Доказано, что гомеоморфизмы класса Орлича–Соболева $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ могут быть продолжены на границы некоторых областей непрерывным образом, если функция φ , определяющая указанный класс, удовлетворяет условию типа Кальдерона, а внешняя дилатация K_f отображения f удовлетворяет условию расходимости интеграла специального вида. В частности, результат справедлив для гомеоморфизмов классов Соболева $W_{\text{loc}}^{1,1}$ с $K_f \in L_{\text{loc}}^q$ при $q > n - 1$.

Библиография: 20 названий.

DOI: 10.4213/mzm9355

1. Введение. В дальнейшем D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, m – мера Лебега $\mathbb{R}^n$, $m(A)$ означает лебегову меру множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Следуя Орличу, для заданной выпуклой возрастающей функции $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$, обозначим символом L^φ пространство всех функций $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что

$$\int_D \varphi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dm(x) < \infty$$

при некотором $\lambda > 0$, см., например, [1]. Пространство L^φ называется *пространством Орлича*.

Классом Орлича–Соболева $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}(D)$ называется класс всех локально интегрируемых функций f , заданных в D , с первыми обобщенными производными по Соболеву, градиент ∇f которых принадлежит классу Орлича локально в области D . Если же, более того, ∇f принадлежит классу Орлича в области D , мы пишем $f \in W^{1,\varphi}(D)$. Заметим, что по определению $W_{\text{loc}}^{1,\varphi} \subset W_{\text{loc}}^{1,1}$. Как обычно, мы пишем $f \in W_{\text{loc}}^{1,p}$, если $\varphi(t) = t^p$, $p \geq 1$. Известно, что непрерывная функция f принадлежит классу $W_{\text{loc}}^{1,p}$ тогда и только тогда, когда $f \in ACL^p$, т.е. если f локально абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных координатным осям, а первые частные производные f локально интегрируемы в степени p в области D , см., например, [2; раздел 1.1.3].

Далее, если f – локально интегрируемая вектор-функция n вещественных переменных $x_1, \dots, x_n$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, $f_i \in W_{\text{loc}}^{1,1}$, $i = 1, \dots, m$, и

$$\int_D \varphi(|\nabla f(x)|) dm(x) < \infty, \quad \text{где} \quad |\nabla f(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2},$$

то мы снова пишем $f \in W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$. Мы также используем обозначение $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ в случае более общих функций φ , чем в классах Орлича, всегда предполагающих выпуклость функции φ и ее нормировку $\varphi(0) = 0$.

Напомним, что гомеоморфизм $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называется *отображением с конечным искажением*, если $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}$ и

$$\|f'(x)\|^n \leq K(x) \cdot J_f(x) \quad (1.1)$$

для некоторой почти всюду конечной функции $K(x)$. В дальнейшем $K_f(x)$ обозначает наименьшую функцию $K(x) \geq 1$ в (1.1), т.е. мы полагаем $K_f(x) = \|f'(x)\|^n / J_f(x)$ при $J_f(x) \neq 0$, $K_f(x) = 1$ при $f'(x) = 0$ и $K_f(x) = \infty$ в остальных точках. Впервые понятие отображения с конечным искажением введено в случае плоскости для $f \in W_{\text{loc}}^{1,2}$ в работе [3], см. также [4].

Заметим, что для каждого гомеоморфизма f между областями D и D' в $\mathbb{R}^n$, имеющего п.в. частные производные в D , существует множество E лебеговой меры нуль такое, что f обладает (N) -свойством Лузина в $D \setminus E$ и

$$\int_A J_f(x) \, dm(x) = |f(A)| \quad (1.2)$$

для каждого измеримого по Лебегу множества $A \subset D \setminus E$, см., например, [5; пп. 3.1.4, 3.1.8 и 3.2.5]. В частности, сказанное относится к гомеоморфизмам класса $W_{\text{loc}}^{1,1}$.

Следуя [6; раздел 9.2, гл. 9], далее k -мерной *поверхностью* S в $\mathbb{R}^n$ будем называть произвольное непрерывное отображение $S: \omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, где ω – открытое множество в $\mathbb{R}^k := \mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$ и $k = 1, \dots, n-1$. *Функцией кратности* поверхности S называется число прообразов

$$N(S, y) = \text{card } S^{-1}(y) = \text{card}\{x \in \omega : S(x) = y\}, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Другими словами, символ $N(S, y)$ обозначает кратность накрытия точки y поверхностью S . Известно, что функция кратности является полунепрерывной снизу и, значит, измерима относительно произвольной хаусдорфовой меры H^k , см., [6; раздел 9.2].

Для борелевской функции $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ ее *интеграл над поверхностью* S определяется равенством

$$\int_S \rho \, d\mathcal{A} := \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) N(S, y) \, dH^k y.$$

Пусть Γ – семейство k -мерных поверхностей S . Борелева функция $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ , пишут $\rho \in \text{adm } \Gamma$, если

$$\int_S \rho^k \, d\mathcal{A} \geq 1$$

для каждой поверхности $S \in \Gamma$. Пусть $p \in (0, \infty)$ – заданное фиксированное число. Тогда p -модулем семейства Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) \, dm(x).$$

Мы также полагаем

$$M(\Gamma) := M_n(\Gamma)$$

и называем величину $M(\Gamma)$ *модулем семейства* Γ .

В дальнейшем $\Gamma(E, F, D)$ обозначает семейство кривых, соединяющих множества E и F в множестве D , т.е. кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежит семейству $\Gamma(E, F, D)$ тогда и только тогда, когда

$$\gamma(a) \in E, \quad \gamma(b) \in F \quad \text{и} \quad \gamma(t) \in D \quad \text{для всех} \quad t \in (a, b).$$

Напомним, что область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для каждой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subset U$ точки x_0 такая, что множество $V \cap D$ является связным. Говорят, что граница области D является *слабо плоской в точке* $x_0 \in \partial D$, если для каждой окрестности U точки x_0 и любого $P > 0$ найдется окрестность $V \subset U$ точки x_0 такая, что

$$M(\Gamma(E, F, D)) \geq P$$

для всех континуумов E и F , лежащих в области D и пересекающих ∂U и ∂V . Также говорят, что граница области D *слабо плоская*, если она является слабо плоской в каждой точке ∂D . Наконец, говорят, что точка $x_0 \in \partial D$ является *сильно достижимой*, если для каждой окрестности U точки x_0 найдется компакт E , лежащий в области D , окрестность $V \subset U$ точки x_0 и некоторое число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Gamma(E, F, D)) \geq \delta$$

для всех континуумов F , лежащих в области D и пересекающих ∂U и ∂V . Говорят, что граница области является *сильно достижимой*, если каждая ее точка является сильно достижимой.

Условимся говорить, что функция $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ удовлетворяет условию A_k , $k = 2, 3, \dots$, пишем $\varphi \in A_k$, если φ возрастает и при некотором $t_* \in \mathbb{R}^+$

$$\int_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)} \right]^{1/(k-1)} dt < \infty. \quad (1.3)$$

Основным результатом настоящей заметки является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть D и D' – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, D локально связна на границе, а D' имеет (сильно достижимую) слабо плоскую границу. Пусть $f: D \rightarrow D'$ – гомеоморфизм с конечным искажением класса $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$. Предположим, что $\varphi \in A_{n-1}$. Если

$$\int_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\|K_f\|_{n-1}(x_0, r)} = \infty \quad \text{для всех} \quad x_0 \in \partial D \quad (1.4)$$

при некотором $\delta(x_0) \in (0, d(x_0))$, $d(x_0) = \sup_{x \in D} |x - x_0|$, где

$$\|K_f\|_{n-1}(x_0, r) = \left(\int_{D \cap S(x_0, r)} K_f^{n-1}(x) dA \right)^{1/(n-1)},$$

то отображение f имеет (непрерывное) гомеоморфное продолжение $\bar{f}: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$.

Результаты, использованные в работе, но принадлежащие другим авторам, называются в дальнейшем “предложениями”, а принадлежащие авторам настоящей работы – “леммами” и “теоремами”, в зависимости от их роли в тексте.

2. Вспомогательные сведения. Теорема Кальдерона о дифференцируемости и следствия из нее. Следующий необходимый для исследования результат принадлежит Кальдерону, см. [7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция класса $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}(\Omega)$, где $\varphi \in A_k$. Тогда f имеет полный дифференциал почти всюду в Ω .

Следующее утверждение в частном случае, когда $f \in W_{\text{loc}}^{1,p}$, доказано в монографии [8; теорема 5.5, раздел 5.5, гл. 2]. Как показывают приведенные ниже рассуждения, оно может быть распространено также и на более общие классы Орлича–Соболева.

ЛЕММА 1. Пусть U – открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, – отображение класса Орлича–Соболева $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}(U)$, где $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – возрастающая функция. Тогда для почти всех гиперплоскостей $\mathcal{P}$, параллельных фиксированной координатной гиперплоскости $\mathcal{P}_0$, сужение отображения f на множество $\mathcal{P} \cap U$ является отображением класса $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}(\mathcal{P} \cap U)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, согласно [8; теорема 5.5, раздел 5.5, гл. II] $f|_{\mathcal{P}} \in W_{\text{loc}}^{1,1}$ на почти всех гиперплоскостях $\mathcal{P}$, параллельных фиксированной координатной гиперплоскости $\mathcal{P}_0$.

Таким образом, остается показать, что для почти всех гиперплоскостей $\mathcal{P}$, параллельных фиксированной координатной гиперплоскости $\mathcal{P}_0$, и произвольного компакта $K \subset \mathcal{P} \cap U$ выполнено условие

$$\int_K \varphi(|\nabla g(z)|) dm_{n-1}(z) < \infty, \quad \text{где } g := f|_{\mathcal{P} \cap U}.$$

Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что гиперплоскость $\mathcal{P}_0$ образована $n-1$ векторами $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1, 0)$ (доказательство для остальных гиперплоскостей проводится аналогично).

Пусть C – произвольный сегмент такой, что

$$\overline{C} \subset U, \quad C = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1 < x_1 < b_1, \dots, a_n < x_n < b_n\}.$$

Тогда по теореме Фубини (см., например, [9; теорема 8.1, гл. 3]) получаем, что

$$\begin{aligned} \infty &> \int_C \varphi(|\nabla f(x)|) dm(x) \geq \int_C \varphi \left(\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}}(x) \right)^2} \right) dm(x) \\ &= \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{\mathcal{P}_t \cap C} \varphi(|\nabla g_t(z)|) dm_{n-1}(z) \right) dt, \end{aligned}$$

где $g_t(z) := f(z, t)$, $z = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $\mathcal{P}_t$ обозначает гиперплоскость, перпендикулярную n -й оси с $x_n = t$ и $m_{n-1} - (n-1)$ -мерная мера Лебега. Отсюда следует, что для почти всех $t \in [a_n, b_n]$

$$\int_{\mathcal{P}_t \cap C} \varphi(|\nabla g_t(z)|) dm_{n-1}(z) < \infty. \quad (2.1)$$

Покроем U при помощи всех сегментов

$$C_m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad C_m = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1^{(m)} < x_1 < b_1^{(m)}, \dots, a_n^{(m)} < x_n < b_n^{(m)}\},$$

с рациональными $a_k^{(m)}$ и $b_k^{(m)}$ такими, что $\overline{C_m} \subset U$. Пусть G_m состоит из тех чисел $t \in (a_n^{(m)}, b_n^{(m)})$, для которых $\varphi(|\nabla g_t(z)|) \notin L^1(\mathcal{P}_t \cap C_m)$. Для произвольного $t \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m$ выберем гиперплоскость $\mathcal{P}_t$ и произвольный компакт $K \subset \mathcal{P}_t \cap U$. Заметим, что по доказанному выше $m_1(\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m) = 0$ и что для компакта K найдутся номера $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{N}$ такие, что $K \subset \bigcup_{l=1}^k C_{s_l}$. По построению и из (2.1) получаем, что

$$\int_{\mathcal{P}_t \cap K} \varphi(|\nabla g_t(z)|) dm_{n-1}(z) \leq \sum_{l=1}^k \int_{\mathcal{P}_t \cap C_{s_l}} \varphi(|\nabla g_t(z)|) dm_{n-1}(z) < \infty.$$

Таким образом, получаем $\int_K \varphi(|\nabla g_t(z)|) dm_{n-1}(z) < \infty$ для почти всех гиперплоскостей $\mathcal{P}_t$, параллельных гиперплоскости $\mathcal{P}_0$ и произвольного компакта $K \subset \mathcal{P}_t \cap U$, что и требовалось доказать.

Из предложения 1 и леммы 1 получаем следующее заключение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, и $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция класса $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}(\Omega)$, где $\varphi \in A_{n-1}$. Тогда на почти каждой гиперплоскости, параллельной некоторой фиксированной координатной гиперплоскости, отображение $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ имеет почти всюду полный дифференциал.

Напомним, что отображение $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если образ любого открытого множества в Ω является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем нам также понадобится следующая теорема Вейселя, см. [10; лемма 3], которая также может быть получена как следствие из более поздних результатов Фаделля, см. [11; теоремы 1 и 2]. Имеет место следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, и $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывное открытое отображение. Если f имеет почти всюду полный дифференциал в Ω относительно любого набора из $n - 1$ переменных, то f также имеет полный дифференциал почти всюду в Ω относительно всех n переменных.

Из следствия 1 и предложения 2 вытекает следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, и пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывное открытое отображение класса $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}(\Omega)$, где $\varphi \in A_{n-1}$. Тогда отображение f имеет полный дифференциал почти всюду в Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что f имеет полный дифференциал почти всюду в Ω относительно любого набора из $n - 1$ переменных. Пусть E_i – множество тех $x \in D$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, для которых найдется $t \in \mathbb{R}$ такое, что отображение

$$f_t(z) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad z = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

не дифференцируемо на некотором множестве $\tilde{E}_i \subset \mathbb{R}^{n-1}$ с $m_{n-1}(\tilde{E}_i) > 0$. Пусть, кроме того, $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$. Покажем, что $m(E) = 0$.

Покроем Ω при помощи всех сегментов

$$C_m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad C_m = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1^{(m)} < x_1 < b_1^{(m)}, \dots, a_n^{(m)} < x_n < b_n^{(m)}\},$$

с рациональными $a_k^{(m)}$ и $b_k^{(m)}$ такими, что $\overline{C}_m \subset \Omega$. Заметим, что

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^n E_{i,m}, \quad (2.2)$$

где $E_{i,m} := E_i \cap C_m$. Учитывая счетную аддитивность меры Лебега m , достаточно показать, что $m(E_{i,m}) = 0$ при всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $m \in \mathbb{N}$. Зафиксируем такие i и m . Тогда по теореме Фубини (см., например, [9; теорема 8.1, гл. 3]) получаем, что

$$m(E_{i,m}) = \int_{a_i^{(m)}}^{b_i^{(m)}} m_{n-1}(A_{i,m,t}) dt, \quad (2.3)$$

где $A_{i,m,t}$ – множество таких $z = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, что

$$x = (x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \in C_m \quad \text{при} \quad t = x_i, \quad t \in (a_i^{(m)}, b_i^{(m)}).$$

Из следствия 1 и соотношения (2.3) вытекает, что $m(E_{i,m}) = 0$. Поэтому также $m(E) = 0$ ввиду (2.2). Таким образом, теорема 2 следует из предложения 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В частности, заключение теоремы 2 имеет место, если $f \in W_{\text{loc}}^{1,p}$ при некотором $p > n - 1$, поскольку в этом случае $\varphi \in A_{n-1}$. Последнее утверждение является известным результатом Вайсяля, см. [10; лемма 3]. Теорема 2 является распространением в пространство теоремы Меньшова–Геринга–Лехто, доказанной ими ранее на плоскости, см., например, [12] и [13].

3. Свойства Лузина и Сарда на поверхностях. Всюду далее $d(A)$ обозначает евклидов диаметр множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Следующий результат также принадлежит Кальдерону, см. [7; с. 208].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция класса $W^{1,\varphi}(D)$, где $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – возрастающая функция такая, что

$$\int_0^\infty \left[\frac{t}{\varphi(t)} \right]^{1/(k-1)} dt < \infty.$$

Тогда для каждого куба $C \subset D$, ребра которого ориентированы вдоль координатных осей, выполняется условие

$$d(f(C)) \leq \alpha_k A^{(k-1)/k} \left[\int_C \varphi(|\nabla f|) dm(x) \right]^{1/k}, \quad (3.1)$$

где α_k – постоянная, зависящая только от k .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В предложении 3 функция $(t/\varphi(t))^{1/(k-1)}$ всегда имеет интегрируемую особенность в окрестности нуля. Однако для произвольной функции из класса A_k соотношение типа (3.1) также имеет место. Действительно, пусть $\varphi \in A_k$,

$$A_* := \left[\frac{1}{\varphi(t_*)} \right]^{1/(k-1)} + \int_{t_*}^\infty \left[\frac{t}{\varphi(t)} \right]^{1/(k-1)} dt < \infty,$$

и пусть $\varphi_*(t) \equiv \varphi(t_*)$ при $t \in (0, t_*)$, $\varphi_*(0) = 0$ и $\varphi_*(t) = \varphi(t)$ при $t \geq t_*$. Применяя предложение 3 к однопараметрическому семейству функций

$$\varphi_\lambda(t) = \varphi(t) + \lambda \cdot [\varphi_*(t) - \varphi(t)], \quad \lambda \in [0, 1],$$

получаем при $\lambda \rightarrow 1$ соотношение (3.1) с заменами $A \mapsto A_*$ и $\varphi \mapsto \varphi_*$.

Докажем теперь следующую лемму.

ЛЕММА 2. Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$, и пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, – непрерывное отображение класса $W^{1,\varphi}(\Omega)$, где $\varphi \in A_k$. Тогда для каждого куба $C \subset \Omega$ с ребрами, параллельными координатным осям, имеет место оценка

$$d(f(C)) \leq m \alpha_k A_*^{(k-1)/k} \left[\int_C \varphi_* \left(|\nabla f| \right) dm(x) \right]^{1/k}, \quad (3.2)$$

где α_k – постоянная из (3.1), зависящая только от k , а величины A_* и φ_* определены в замечании 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем справедливость (3.2) индукцией по $m = 1, 2, \dots$. При $m = 1$ соотношение (3.2) имеет место ввиду предложения 3 и замечания 2. Предположим, что неравенство (3.2) справедливо при некотором $m = l$, и докажем его при $m = l + 1$. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{V} = (v_1, v_2, \dots, v_l, v_{l+1})$ в $\mathbb{R}^{l+1}$, а также векторы $\vec{V}_1 = (v_1, v_2, \dots, v_l, 0)$ и $\vec{V}_2 = (0, 0, \dots, 0, v_{l+1})$. По неравенству треугольника $|\vec{V}| = |\vec{V}_1 + \vec{V}_2| \leq |\vec{V}_1| + |\vec{V}_2|$. Таким образом, обозначая через $\text{Pr}_1 \vec{V} = \vec{V}_1$ и $\text{Pr}_2 \vec{V} = \vec{V}_2$ проекции векторов из $\mathbb{R}^{l+1}$ на координатную гиперплоскость $y_{l+1} = 0$ и на $(l + 1)$ -ю координатную ось в $\mathbb{R}^{l+1}$ соответственно, получаем, что

$$d(f(C)) \leq d(\text{Pr}_1 f(C)) + d(\text{Pr}_2 f(C)),$$

и, применяя (3.2) при $m = l$ и $m = 1$, приходим к неравенству (3.2) при $m = l + 1$ ввиду монотонности функции φ . Доказательство леммы 2 завершено.

Основным результатом настоящего пункта является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$, и пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, – непрерывное отображение класса $W^{1,\varphi}(\Omega)$, где $\varphi \in A_k$. Тогда для любого измеримого множества $E \subset \Omega$ имеет место оценка

$$H^k(f(E)) \leq \gamma_{k,m} A_*^{k-1} \int_E \varphi_* (|\nabla f|) dm(x), \quad (3.3)$$

где $\gamma_{k,m} = (m \alpha_k)^k$, а величины α_k , A_* и φ_* определены выше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду счетной аддитивности интеграла и меры, не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что множество E ограничено и что $\bar{E} \subset \Omega$, т.е. что $\bar{E}$ – компакт в Ω . Для каждого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $\omega \subset \Omega$ такое, что $E \subset \omega$ и $m(\omega \setminus E) < \varepsilon$, см. [9; теорема 3, (6.6)]. Учитывая замечание, сделанное выше, можем считать, что $\bar{\omega}$ – компакт и, следовательно, отображение f равномерно непрерывно в ω . Далее, ω может быть покрыто счетным набором замкнутых ориентированных кубов C_i , внутренности которых попарно не

пересекаются, и таких, что $d(f(C_i)) < \delta$ для каждого предписанного заранее $\delta > 0$ и $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} \partial C_i) = 0$. Таким образом, по лемме 2 имеем, что

$$H_{\delta}^k(f(E)) \leq H_{\delta}^k(f(\omega)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} [d(f(C_i))]^k \leq \gamma_{k,m} A_*^{k-1} \int_{\omega} \varphi_*(|\nabla f|) dm(x),$$

где

$$H_{\delta}^k(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} (d(A_i))^k,$$

а $\inf$ берется по всем покрытиям A множествами A_i с $d(A_i) < \delta$. Наконец, ввиду абсолютной непрерывности неопределенного интеграла, произвольности ε и $\delta > 0$ получаем (3.3).

Таким образом, приходим к следующему заключению о свойстве Лузина отображений классов Орлича–Соболева.

СЛЕДСТВИЕ 2. При условиях теоремы 3 отображение f обладает (N) -свойством Лузина; более того, отображение f абсолютно непрерывно относительно k -мерной хаусдорфовой меры.

По теореме 3, см. также [14; теорема VII.3], получаем следующее заключение типа Сарда для классов Орлича–Соболева.

СЛЕДСТВИЕ 3. При условиях теоремы 3 $H^k(f(E)) = 0$, если $|\nabla f| = 0$ на измеримом множестве $E \subset \Omega$, и потому

$$\dim_H f(E) \leq k \quad \text{и} \quad \dim f(E) \leq k - 1.$$

В свою очередь, опираясь на следствия 2 и 3, а также лемму 1, имеем следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. Пусть U – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, и $\varphi \in A_{n-1}$. Тогда любое непрерывное отображение $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, класса $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ обладает (N) -свойством; более того, оно локально абсолютно непрерывно относительно $(n-1)$ -мерной хаусдорфовой меры на почти всех гиперплоскостях $\mathcal{P}$, параллельных фиксированной координатной гиперплоскости $\mathcal{P}_0$. Кроме того, на почти всех таких $\mathcal{P}$ выполнено равенство $H^{n-1}(f(E)) = 0$, если $|\nabla f| = 0$ на $E \subset \mathcal{P}$.

Заметим, что если условие (1.3) имеет место для некоторой возрастающей функции φ , то функция $\varphi_* = \varphi(ct)$ при $c > 0$ также удовлетворяет соотношению (1.3). Кроме того, хаусдорфовы меры являются квазиинвариантными при квазиизометриях. Заметим также, что классы Соболева инвариантны при квазиизометриях (см., например, [2; раздел 1.1.7]). По свойству Линделёфа в $\mathbb{R}^n$, см., например, [15; раздел I.5.XI], множество $U \setminus \{x_0\}$ может быть покрыто счетным числом открытых сегментов сферических колец в $U \setminus \{x_0\}$ с центром в точке x_0 , и каждый такой сегмент может быть отображен на прямоугольный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ посредством квазиизометрии. Следовательно, применяя теорему 4 к каждому такому параллелепипеду в отдельности, получаем следующее заключение.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\varphi \in A_{n-1}$. Тогда любое непрерывное отображение $f \in W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ обладает (N) -свойством относительно $(n-1)$ -мерной меры Хаусдорфа; более

того, оно локально абсолютно непрерывно на почти всех сферах S с центром в любой предписанной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, на почти всех таких сферах S выполнено условие $H^{n-1}(f(E)) = 0$ как только $|\nabla f| = 0$ на множестве $E \subset S$.

4. Нижние Q -гомеоморфизмы и классы Орлича–Соболева. Говорят, см. [6; раздел 9.2], что измеримая по Лебегу функция $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ является *обобщенно p -допустимой* для семейства Γ , состоящего из k -мерных поверхностей S в $\mathbb{R}^n$, пишут $\rho \in \text{ext}_p \text{ adm } \Gamma$, если

$$\int_S \rho^k dA \geq 1 \quad \text{для } p\text{-почти всех } S \in \Gamma.$$

Если $p = n$, то пишут просто $\rho \in \text{ext adm } \Gamma$.

Следующее понятие (см. [6; раздел 9.1]) мотивировано кольцевым определением квазиконформных отображений по Герингу, см. [16; раздел 13]. Пусть D и D' – области в $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, $n \geq 2$, $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, и пусть $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ – измеримая по Лебегу функция. Гомеоморфизм $f: D \rightarrow D'$ называется *нижним Q -гомеоморфизмом в точке x_0* , если

$$M(f(\Sigma_\varepsilon)) \geq \inf_{\rho \in \text{ext adm } \Sigma_\varepsilon} \int_{D \cap A_\varepsilon} \frac{\rho^n(x)}{Q(x)} dm(x)$$

для каждого кольца

$$A_\varepsilon = A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0\}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad \varepsilon_0 \in (0, d_0),$$

где $d_0 = \sup_{x \in D} |x - x_0|$, а Σ_ε обозначает семейство всех пересечений сфер

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}, \quad r \in (\varepsilon, \varepsilon_0),$$

с областью D . Указанное выше понятие может быть распространено в бесконечно удаленную точку, $x_0 = \infty \in \overline{D}$, стандартным образом при помощи инверсии $T(x) = x/|x|^2$, $T(\infty) = 0$, $T(0) = \infty$. Именно, гомеоморфизм $f: D \rightarrow D'$ называют *нижним Q -гомеоморфизмом в точке $\infty \in \overline{D}$* , если отображение $F = f \circ T$ является нижним Q_* -гомеоморфизмом в точке 0 при $Q_* = Q \circ T$.

Наконец, говорят, что гомеоморфизм $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ является *нижним Q -гомеоморфизмом в области D* , если f является нижним Q -гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$.

Следующее утверждение является ключевым для дальнейшего исследования классов Орлича–Соболева и базируется на их свойствах типа Лузина и Сарда, а также дифференцируемости почти всюду, доказанных в предыдущих пунктах.

ТЕОРЕМА 5. Пусть D и D' – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, и $\varphi \in A_{n-1}$. Тогда любой гомеоморфизм $f: D \rightarrow D'$ конечного искажения класса $W_{\text{loc}}^{1, \varphi}$ является нижним Q -гомеоморфизмом в области D с $Q = K_f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через B (борелево) множество всех точек $x \in D$, где отображение f имеет полный дифференциал и $J_f(x) = \det f'(x) \neq 0$. Заметим, что множество B представляет собой не более чем счетное объединение борелевских множеств B_l , $l = 1, 2, \dots$, таких, что отображения $f_l = f|_{B_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами, см., например, [5; лемма 3.2.2]. Без ограничения общности можно считать, что множества B_l попарно не пересекаются. Обозначим также

через B_* оставшееся множество всех точек $x \in D$, где f имеет полный дифференциал, но $f'(x) = 0$.

По теореме 2 множество $B_0 := D \setminus (B \cup B_*)$ имеет меру Лебега нуль. Следовательно, по [6; теорема 9.1] имеем, что $H^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$ для почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ с центром в произвольной точке $x_0 \in \overline{D}$, где “для почти всех” определяется в смысле модуля семейства поверхностей. Тогда $H^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$ в силу [6; лемма 9.1] и по следствию 4 получаем, что

$$H^{n-1}(f(B_0) \cap S_r^*) = 0 \quad \text{и} \quad H^{n-1}(f(B_*) \cap S_r^*) = 0$$

для почти всех $r \in \mathbb{R}$, где $S_r^* = f(S_r)$.

Заметим, что также $H^{n-1}(f(B_0) \cap S_r^*) = 0$ и $H^{n-1}(f(B_*) \cap S_r^*) = 0$ для почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ в смысле модуля семейства поверхностей. Действительно, пусть Γ_0 – подсемейство всех сфер $S_r := S(x_0, r)$, для которых

$$\text{либо } H^{n-1}(f(B_0) \cap S_r^*) > 0, \quad \text{либо } H^{n-1}(f(B_*) \cap S_r^*) > 0.$$

Обозначим через R множество всех $r \in \mathbb{R}$, для которых либо $H^{n-1}(f(B_0) \cap S_r^*) > 0$, либо $H^{n-1}(f(B_*) \cap S_r^*) > 0$. В силу сказанного выше $m_1(R) = 0$. Тогда по теореме Фубини $m(E) = 0$, где $E = \{x \in D : |x - x_0| = r \in R\}$. Функция $\rho_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$, определенная символом ∞ при $x \in E$ и равная нулю на оставшемся множестве, обобщенно допустима для семейства Γ_0 . Таким образом, по (9.18) в [6]

$$M(\Gamma_0) \leq \int_E \rho_1^n dm(x) = 0,$$

т.е. действительно $M(\Gamma_0) = 0$.

По теореме Кирсбрауна (см. [5; теорема 2.10.43]) каждое отображение f_l может быть продолжено до липшицевского отображения $\tilde{f}_l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, которое по теореме Радемахера–Степанова дифференцируемо почти всюду в $\mathbb{R}^n$, см. [5; теорема 3.1.6]. В силу единственности аппроксимативного дифференциала (см. [5; п. 3.1.2]) можно считать, что при всех $x \in B_l$ выполнено равенство $\tilde{f}_l'(x) = f'(x)$.

Пусть Γ обозначает семейство всех пересечений сфер S_r , $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 < d_0 = \sup_{x \in D} |x - x_0|$, с областью D . Для произвольной функции $\rho_* \in \text{adm } f(\Gamma)$ такой, что $\rho_* \equiv 0$ вне $f(D)$, полагаем $\rho \equiv 0$ вне D и на B_0 , и

$$\rho(x) := \rho_*(f(x)) \|f'(x)\| \quad \text{при } x \in D \setminus B_0 = B \cup B_*.$$

Рассуждая покусочно на каждом B_l , $l = 1, 2, \dots$, согласно [5; раздел 1.7.6], а также используя геометрический смысл величины $\|f'(x)\|$ и ее связь с якобианом отображения (см., например, соотношения (2.5) и (2.6) гл. I, § 2 в [17]), имеем, что

$$\begin{aligned} \int_{S_r} \rho^{n-1} d\mathcal{A} &= \int_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \|f'(x)\|^{n-1} d\mathcal{A} \\ &= \int_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \cdot \frac{\|f'(x)\|^{n-1}}{d\mathcal{A}_*/d\mathcal{A}} \cdot \frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}} d\mathcal{A} \\ &\geq \int_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \cdot \frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}} d\mathcal{A} = \int_{S_r^*} \rho_*^{n-1}(y) d\mathcal{A}_* \geq 1 \end{aligned}$$

для почти всех S_r и, следовательно, $\rho \in \text{ext adm } \Gamma$. Используя замену переменных на каждом B_l , $l = 1, 2, \dots$ (см., например, [5; теорема 3.2.5]), ввиду счетной аддитивности интеграла получаем также оценку

$$\int_D \frac{\rho^n(x)}{K_f(x)} dm(x) \leq \int_{f(D)} \rho_*^n(x) dm(x),$$

что и завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Любой гомеоморфизм с конечным искажением в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, класса $W_{\text{loc}}^{1,p}$ при $p > n - 1$ является нижним Q -гомеоморфизмом в области D с $Q = K_f$.*

СЛЕДСТВИЕ 6. *В частности, любой гомеоморфизм f в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, класса $W_{\text{loc}}^{1,1}$ такой, что $K_f \in L_{\text{loc}}^q$ при $q > n - 1$, является нижним Q -гомеоморфизмом в области D с $Q = K_f$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, условие $K_f \in L_{\text{loc}}^q$ влечет, что f – отображение с конечным искажением, поскольку в этом случае $K_f \neq \infty$ почти всюду. Далее, используя неравенство Гёльдера и (1.2), на каждом компакте $C \subset D$ получаем оценку норм первых частных производных

$$\|\partial_i f\|_p \leq \|K_f^{1/n}\|_s \cdot \|J_f^{1/n}\|_n \leq \|K_f\|_q^{1/n} \cdot |f(C)|^{1/n} < \infty,$$

где $1/p = 1/s + 1/n$ и $s = qn$, т.е. $1/p = (1/n)(1/q + 1)$, и если $q > n - 1$, то также $p > n - 1$. Таким образом, имеем, что $f \in W_{\text{loc}}^{1,p}$, где $p = nq/(1 + q) > n - 1$, и по следствию 5 получаем следствие 6.

5. Граничное поведение. Следующие утверждения могут быть найдены в монографии [6; лемма 9.4 и теорема 9.8].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть D и D' – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, D локально связна на границе, а D' имеет слабо плоскую (сильно достижимую) границу. Пусть $Q: D \rightarrow (0, \infty)$ – измеримая по Лебегу функция, $f: D \rightarrow D'$ – нижний Q -гомеоморфизм. Предположим, что имеет место соотношение (1.4), где вместо K_f участвует функция Q . Тогда отображение f имеет гомеоморфное (непрерывное) продолжение $\bar{f}: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 непосредственно вытекает из теоремы 5 и предложения 4.

В качестве следствия из теоремы 1 получаем обобщение хорошо известной теоремы Геринга–Мартио о гомеоморфном продолжении на границу квазиконформных отображений между областями квазиэкстремальной длины, см. [18].

СЛЕДСТВИЕ 7. *Пусть D и D' – ограниченные области со слабо плоскими границами в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $f: D \rightarrow D'$ – гомеоморфизм с конечным искажением класса $W_{\text{loc}}^{1,p}$, $p > n - 1$, в частности, гомеоморфизм класса $W_{\text{loc}}^{1,1}$ с $K_f \in L_{\text{loc}}^q$, $q > n - 1$. Если выполнено условие (1.4), то f имеет гомеоморфное продолжение $\bar{f}: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$.*

Непрерывное продолжение на границу обратных отображений имеет более простую формулировку. В силу теоремы 5 и [6; теорема 9.6] имеем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6. Пусть D и D' – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, D локально связна на границе, $\partial D'$ – слабо плоская, и пусть $f: D \rightarrow D'$ – гомеоморфизм класса $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$, где $\varphi \in A_{n-1}$. Если $K_f \in L^{n-1}(D)$, то отображение $g = f^{-1}$ имеет непрерывное продолжение $\bar{g}: \bar{D}' \rightarrow \bar{D}$.

Однако, как это следует из примера в [6; предложение 6.3], никакая сколь угодно высокая степень интегрируемости $K_f \in L_{\text{loc}}^q$, $q \in [1, \infty)$, не гарантирует продолжения по непрерывности на границу прямых отображений.

Наконец, в качестве следствия из теоремы 1, по [19; теорема 2.1] получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 7. Пусть D и D' – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, D локально связна на границе, а D' имеет (сильно достижимую) слабо плоскую границу, и пусть $f: D \rightarrow D'$ – гомеоморфизм с конечным искажением класса $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$, где $\varphi \in A_{n-1}$. Если

$$\int_D \Phi(K_f^{n-1}(x)) \, dm(x) < \infty \quad (5.1)$$

для некоторой выпуклой возрастающей функции $\Phi: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_\delta^\infty \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{1/(n-1)}} = \infty \quad (5.2)$$

при некотором $\delta > \Phi(0)$, то f имеет (непрерывное) гомеоморфное продолжение $\bar{f}: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$.

Заметим, что условие (5.2) является не только достаточным, но и необходимым для непрерывного продолжения на границу отображений f с интегральными ограничениями вида (5.1), см., например, [20].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутцкий, *Выпуклые функции и пространства Орлица*, Современные проблемы математики, Физматлит, М., 1958.
- [2] В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева*, Изд-во Ленинградского ун-та, Л., 1985.
- [3] T. Iwaniec, V. Šverák, “On mappings with integrable dilatation”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **118**:1 (1993), 181–188.
- [4] T. Iwaniec, G. Martin, *Geometric Function Theory and Non-linear Analysis*, Oxford Math. Monogr., Oxford Univ. Press, Oxford, 2001.
- [5] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987.
- [6] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, New York, 2009.
- [7] A. P. Calderón, “On the differentiability of absolutely continuous functions”, *Riv. Mat. Univ. Parma*, **2** (1951), 203–213.
- [8] В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения*, Наука, М., 1983.
- [9] С. Сакс, *Теория интеграла*, ИЛ, М., 1949.
- [10] J. Väisälä, “Two new characterizations for quasiconformality”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **362** (1965), 12 pp.
- [11] A. G. Fadell, “A note on a theorem of Gehring and Lehto”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **49** (1975), 195–198.

- [12] F. W. Gehring, O. Lehto, "On the total differentiability of functions of a complex variable", *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **272** (1959), 9 pp.
- [13] D. Menchoff, "Sur les différentielles totales des fonctions univalentes", *Math. Ann.*, **105** (1931), 75–85.
- [14] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton Math. Ser., **4**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1941.
- [15] К. Куратовский, *Топология*, Т. 1, Мир, М., 1966.
- [16] F. W. Gehring, "Rings and quasiconformal mappings in space", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **103** (1962), 353–393.
- [17] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука, Новосибирск, 1982.
- [18] F. W. Gehring, O. Martio, "Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings", *J. Anal. Math.*, **45** (1985), 181–206.
- [19] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, "Integral conditions in the mapping theory", *Укр. матем. вестник*, **7:1** (2010), 73–87.
- [20] D. Kovtonyuk, V. Ryazanov, "On boundary behavior of generalized quasi-isometries", *J. Anal. Math.*, **115:1** (2011), 103–119.

Д. А. Ковтонюк

Институт прикладной математики и механики
НАН Украины, г. Донецк
E-mail: denis_kovtonyuk@bk.ru

Поступило
27.12.2012

В. И. Рязанов

Институт прикладной математики и механики
НАН Украины, г. Донецк
E-mail: vlryazanov1@rambler.ru

Р. Р. Салимов

Институт прикладной математики и механики
НАН Украины, г. Донецк
E-mail: ruslan623@yandex.ru

Е. А. Севостьянов

Институт прикладной математики и механики
НАН Украины, г. Донецк
E-mail: esevostyanov2009@mail.ru