Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Брайчев, В. Б. Шерстюков, О росте целых функций с дискретно измеримыми нулями, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 5, 674–690

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9357>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:34:19

О росте целых функций с дискретно измеримыми нулями

Г. Г. Брайчев, В. Б. Шерстюков

В работе получено решение задачи о наименьшем типе при порядке $\rho \in (0; 1)$ целых функций с положительными нулями в специальном классе, выделяемом условиями на верхнюю и нижнюю усредненные ρ -плотности нулей.

Библиография: 20 названий.

Введение. В подавляющем числе работ, так или иначе использующих теорию целых функций одной переменной, встречаются функции с “правильным” поведением. В основном, это функции вполне регулярного роста, начало изучению которых было положено в середине прошлого века А. Пфлюгером и Левиным (см., например, [1]). Выяснилось, что регулярность роста целой функции равносильна существованию определенного рода плотности ее нулей. Изучение связи между асимптотическими характеристиками роста целой функции и особенностями распределения ее нулей на плоскости составляет важную ветвь комплексного анализа, интенсивное развитие которой продолжается и в наши дни. Необходимо, однако, отметить, что ряд естественных задач, возникающих в теории аппроксимации, аналитического продолжения, теории операторов и других вопросах, содержательны в случае отсутствия “асимптотически правильного” поведения появляющихся в ходе исследования целых функций. Решение именно таких задач сопряжено с экстремальными проблемами в различных классах целых функций, определяемых ограничениями как на рост, так и на расположение нулей.

Экстремальным задачам для характеристик роста целых функций (индикаторов и типов при обычном и уточненном порядках) посвящена обширная литература. В цикле работ Гольдберга (см., к примеру, [2], [3]) с помощью введенного им понятия интеграла по полуаддитивной мере были найдены диапазоны изменения верхнего и нижнего индикаторов целой функции при уточненном порядке с заданными границами изменения верхней и нижней угловых плотностей ее нулей. В статьях Кондратюка [4]–[6] результаты Гольдберга обобщались на случаи других типов плотностей. Несколько специальных экстремальных задач было решено во второй половине прошлого века Левиным [1; гл. V, § 5], Говоровым [7], Андрашко [8],

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00225а). Работа второго автора выполнена также при поддержке проекта аналитической ведомственной целевой программы (АВЦП) “Развитие научного потенциала высшей школы” (2.1.1/6827), проектов ГК Рособразование (П 268, 795, 943) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России”, 2009–2013 гг. (П 1109).

Хабибуллиным [9], Поповым [10]. Интерес к этой тематике не утихает и в последнее десятилетие [11]–[13].

Нас будут интересовать задачи о наименьшем возможном типе целой функции порядка меньше единицы с нулями, расположенными на одном луче. Для точных постановок введем необходимые определения.

Каждую целую функцию порядка $\rho \in (0; 1)$ с нулями $\Lambda = \{\lambda_n\}$ согласно хорошо известной теореме Адамара [1] можно представить в виде канонического произведения

$$L_\Lambda(z) = cz^m \prod_{|\lambda_n| > 0} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right).$$

Обозначим тип функции $L_\Lambda(z)$ при порядке ρ , называемый в дальнейшем коротко ее ρ -типом, через

$$\sigma_\rho(L_\Lambda) := \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-\rho} \ln \max_{|z|=R} |L_\Lambda(z)|.$$

Пусть далее $n_\Lambda(t) = \sum_{|\lambda_n| \leq t} 1$ – считающая функция последовательности Λ . Как обычно, нули $\lambda_n \in \Lambda$ считаются с учетом кратности. Введем верхнюю плотность при порядке ρ (кратко, ρ -плотность) $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) := \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\rho} n_\Lambda(t)$ этой последовательности, а также нижнюю ρ -плотность Λ , обозначаемую $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)$ и определяемую как соответствующий нижний предел.

В статье [14] Поповым была поставлена и решена задача нахождения для положительных последовательностей $\Lambda = \{\lambda_n\}$ и фиксированного $\beta > 0$ экстремальной величины

$$s(\beta, \rho) := \inf \{ \sigma_\rho(L_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta \}.$$

ТЕОРЕМА А (Попов, [14]). При любых $\rho \in (0; 1)$ и $\beta > 0$ справедливо равенство

$$s(\beta, \rho) = \beta C(\rho),$$

где $C(\rho) = \max_{a>0} a^{-\rho} \ln(1+a)$. Нижняя грань $s(\beta, \rho)$ достигается на некоторой возрастающей последовательности положительных чисел.

В статье авторов [15] получено решение более общей экстремальной задачи: для заданных чисел $\rho \in (0; 1)$ и $\alpha, \beta, 0 \leq \alpha \leq \beta < +\infty$, требуется найти величину

$$s(\alpha, \beta, \rho) := \inf \{ \sigma_\rho(L_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta \}.$$

ТЕОРЕМА В [15]. Для произвольного $\rho \in (0; 1)$ и любых чисел $\alpha \geq 0$ и $\beta > 0$, $\alpha \leq \beta$, справедливо равенство

$$s(\alpha, \beta, \rho) = \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\rho} + \max_{a>0} \int_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^a \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau. \quad (1)$$

Нижняя грань $s(\alpha, \beta, \rho)$ достигается на некоторой возрастающей последовательности $\hat{\Lambda} \subset \mathbb{R}_+$, у которой $\underline{\Delta}_\rho(\hat{\Lambda}) = \alpha$ и $\overline{\Delta}_\rho(\hat{\Lambda}) = \beta$.

Теоремы А и В имеют отношение к вопросу об оценках радиуса полноты систем экспонент с вещественными показателями. Разнообразные аспекты этой тематики изложены в [9], [10], [16], [17].

Настоящая работа служит продолжением и развитием исследований [14], [15]. Формулировка основных результатов данной статьи требует рассмотрения некоторых вспомогательных понятий.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – не имеющая конечных предельных точек и записанная в порядке неубывания модулей последовательность комплексных чисел. Не ограничивая общности дальнейших рассуждений, считаем, что $0 \notin \Lambda$. Пусть, далее,

$$N_\Lambda(r) = \int_0^r \frac{n_\Lambda(t)}{t} dt$$

– усредненная считающая функция последовательности Λ и

$$\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho} N_\Lambda(r)$$

– ее верхняя (с верхней чертой) и соответственно нижняя (подчеркнутая снизу) усредненные ρ -плотности. Там, где это не вызовет недоразумений, мы будем опускать зависимость введенных характеристик от ρ и Λ , подчеркивая ее в необходимых случаях.

Отметим, что условия $\overline{\Delta} = \underline{\Delta}$ ($=: \Delta$) и $\overline{\Delta}^* = \underline{\Delta}^*$ ($=: \Delta^*$) эквивалентны, а последовательности, обладающие этим свойством, называются *измеримыми*. Для таких последовательностей существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{n(t)}{t^\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho} = \Delta \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N(t)}{t^\rho} = \Delta^*.$$

Подобно этому, назовем *дискретно измеримыми* (при показателе ρ) последовательности, для которых существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (N(|\lambda_n|)/|\lambda_n|^\rho)$.

Тип целой функции при порядке $\rho \in (0; 1)$ с измеримой последовательностью положительных нулей вычисляется по достаточно простым формулам

$$\sigma = \frac{\pi \Delta}{\sin \pi \rho} = \frac{\pi \rho \Delta^*}{\sin \pi \rho}. \quad (2)$$

Сохраняются ли эти формулы для функций с дискретно измеримыми нулями? Как будет показано, дискретная измеримость последовательности не влечет ее измеримости в обычном смысле. Более того, класс дискретно измеримых последовательностей достаточно широк. Оказывается, что в этом классе формулы (2) уже теряют силу. В связи с этим возникает естественный вопрос, на который внимание авторов обратил Попов: насколько может отличаться от (2) величина типа целой функции, последовательность корней которой расположена на одном луче, не является измеримой, но дискретно измерима?

Введем вначале дискретные ρ -плотности

$$\tilde{\Delta} := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{N(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho}.$$

Нетрудно проверить, что всегда выполняется равенство

$$\underline{\Delta}^* = \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{r^\rho} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{N(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho} = \tilde{\Delta},$$

а если $|\lambda_n| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} |\lambda_{n+1}|$, то и $\overline{\Delta}^* = \tilde{\Delta}$. Существенным в дальнейшем оказывается то обстоятельство, что для дискретно измеримых последовательностей справедливы равенства [18]–[20]:

$$\underline{\Delta} = \rho a_1 \overline{\Delta}^* \quad \text{и} \quad \overline{\Delta} = \rho a_2 \overline{\Delta}^*, \quad (3)$$

где a_1 и a_2 – корни уравнения

$$a \ln \frac{e}{a} = \frac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*}, \quad 0 \leq a_1 \leq 1 \leq a_2 \leq e, \quad (4)$$

$$a_j = a_j(\underline{\Delta}^*, \overline{\Delta}^*), \quad j = 1, 2.$$

Для ответа на поставленный выше вопрос решим следующую экстремальную задачу, включающую ограничения как на верхнюю, так и на нижнюю усредненные ρ -плотности.

При фиксированных $\rho \in (0; 1)$, $\beta^* > 0$ и $\alpha^* \in [0; \beta^*]$ нужно найти величину

$$\tilde{s}(\alpha^*, \beta^*, \rho) := \inf \{ \sigma_\rho(L_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \tilde{\Delta}_\rho(\Lambda) = \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \geq \alpha^*, \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^* \}.$$

Сформулируем главный результат работы.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Для произвольного $\rho \in (0; 1)$ и любых чисел $\alpha^* \geq 0$, $\beta^* > 0$, $\alpha^* \leq \beta^*$, справедливо равенство

$$\tilde{s}(\alpha^*, \beta^*, \rho) = \rho \left(\frac{\pi \alpha^*}{\sin \pi \rho} + \max_{a > 0} \int_{a(a_1/a_2)^{1/\rho}}^a \frac{a_2 \beta^* a^{-\rho} - \alpha^* \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \right), \quad (5)$$

в котором $a_1 = a_1(\alpha^*, \beta^*)$ и $a_2 = a_2(\alpha^*, \beta^*)$ – корни уравнения

$$a \ln \frac{e}{a} = \frac{\alpha^*}{\beta^*},$$

$$a_1 \leq 1 \leq a_2.$$

Нижняя грань $\tilde{s}(\alpha^*, \beta^*, \rho)$ достигается на некоторой возрастающей последовательности положительных чисел $\tilde{\Lambda}$ с характеристиками

$$\tilde{\Delta}_\rho(\tilde{\Lambda}) = \underline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \alpha^* \quad \text{и} \quad \overline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \beta^*.$$

Доказательство теоремы состоит из двух частей: в первом разделе устанавливается соответствующая оценка снизу ρ -типа целой функции L_Λ , а второй раздел посвящен построению примера, на котором в этой оценке достигается равенство.

В п. 1 показывается также, что непосредственное сочетание точных соотношений (1) и (3) приводит к оценке

$$\tilde{s}(\alpha^*, \beta^*, \rho) \geq \rho \beta^* \left(\frac{\pi a_1}{\sin \pi \rho} + \max_{a > 0} \int_{a(a_1/a_2)^{1/\rho}}^a \frac{a_2 a^{-\rho} - a_1 \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \right), \quad (6)$$

которая, однако, уже не является точной. Одна из причин кроится в том, что экстремальная последовательность $\hat{\Lambda} \subset \mathbb{R}_+$ из теоремы В не принадлежит в общей ситуации классу последовательностей, по которому берется точная нижняя грань в определении $\tilde{s}(\alpha^*, \beta^*, \rho)$. Именно, при $\alpha^* = 0$ и $\alpha^* = \beta^*$ правые части (5) и (6) совпадают, но при $\alpha^* < \beta^*$ для последовательности $\hat{\Lambda}$ выполняется строгое неравенство $\hat{\Delta}_\rho(\hat{\Lambda}) > \underline{\Delta}_\rho^*(\hat{\Lambda})$.

Заканчивая вводную часть, укажем, что раздел 1 принадлежит Г.Г. Брайчеву, а раздел 2 – В.Б. Шерстюкову.

1. Доказательство оценки снизу. Покажем вначале, что дискретно измеримые последовательности образуют достаточно широкий класс.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Каковы бы ни были числа $\rho > 0$, $\beta > 0$ и $\alpha \in [0; \beta]$, существуют дискретно измеримые последовательности Λ с плотностями $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – произвольная сходящаяся к α последовательность положительных чисел. Рассмотрим любую функцию $\varphi(k)$, обладающую свойством

$$\varphi(k+1) - \varphi(k) = \ln \frac{\beta}{\alpha_k} \quad \text{при } k \in \mathbb{N},$$

и положим $n_k = \beta e^{\varphi(k)}(1 + o(1))$. Здесь $o(1)$ подобраны так, чтобы $n_k \in \mathbb{N}$ и возрастали (например, можно взять в качестве n_k целую часть величины $\beta e^{\varphi(k)}$ при всех достаточно больших k). Для значений $m \in (n_{k-1}; n_k]$ положим $|\lambda_m| = |\lambda_{n_k}| = e^{\varphi(k)/\rho}$, $k \in \mathbb{N}$, располагая точки λ_m в порядке неубывания их модулей. Последовательность $\{\lambda_m\}$ построена так, что

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\beta e^{\varphi(k)}(1 + o(1))}{e^{\varphi(k)}} = \beta, \\ \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) &= \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\beta e^{\varphi(k)}(1 + o(1))}{e^{\varphi(k+1)}} = \beta \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-\ln(\beta/\alpha_k)} = \alpha. \end{aligned}$$

Далее, по известной теореме Штольца предел $\lim_{k \rightarrow \infty} (N(|\lambda_{n_{k+1}}|)/|\lambda_{n_k}|^\rho)$ существует одновременно с пределом

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|) - N(|\lambda_{n_k}|)}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho - |\lambda_{n_k}|^\rho} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k \ln(|\lambda_{n_{k+1}}|/|\lambda_{n_k}|)}{|\lambda_{n_k}|^\rho ((|\lambda_{n_{k+1}}|/|\lambda_{n_k}|)^\rho - 1)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\beta e^{\varphi(k)}(1 + o(1)) \ln e^{(\varphi(k+1) - \varphi(k))/\rho}}{e^{\varphi(k)}(e^{\varphi(k+1) - \varphi(k)} - 1)} = \frac{\beta}{\rho} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k \ln(\beta/\alpha_k)}{\beta - \alpha_k} = \frac{\alpha \beta \ln(\beta/\alpha)}{\rho(\beta - \alpha)} \end{aligned}$$

и равен этому пределу (последняя величина совпадает с нулем при $\alpha = 0$).

Прежде, чем перейти к доказательству равенства (5), составляющему главную часть работы, проведем сравнительный анализ соотношений (5) и (6).

При $\alpha^* = 0$ правые части (5) и (6) равны $C(\rho)\rho e\beta^*$, так как в этом случае $a_1 = 0$, $a_2 = e$.

При $\alpha^* = \beta^*$ равенство указанных частей сохранится, теперь они совпадают с $(\pi\rho/\sin \pi\rho)\beta^*$, поскольку здесь $a_1 = a_2 = 1$.

Но при $\alpha^* \in (0; \beta^*)$ имеет место строгое неравенство

$$\begin{aligned} &\rho \left(\frac{\pi \alpha^*}{\sin \pi \rho} + \max_{a > 0} \int_{a(a_1/a_2)^{1/\rho}}^a \frac{a_2 \beta^* a^{-\rho} - \alpha^* \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \right) \\ &> \rho \beta^* \left(\frac{\pi a_1}{\sin \pi \rho} + \max_{a > 0} \int_{a(a_1/a_2)^{1/\rho}}^a \frac{a_2 a^{-\rho} - a_1 \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \right). \end{aligned}$$

Действительно, после деления обеих частей на $\rho\beta^*$ и введения обозначения $k^* = \alpha^*/\beta^* \in (0; 1)$ это неравенство приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\pi k^*}{\sin \pi \rho} + \max_{a>0} \int_{a(a_1/a_2)^{1/\rho}}^a \frac{a_2 a^{-\rho} - k^* \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \\ > \frac{\pi a_1}{\sin \pi \rho} + \max_{a>0} \int_{a(a_1/a_2)^{1/\rho}}^a \frac{a_2 a^{-\rho} - a_1 \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию вещественной переменной ξ

$$\begin{aligned} f_a(\xi) &:= \frac{\pi \xi}{\sin \pi \rho} + \int_{a(a_1/a_2)^{1/\rho}}^a \frac{a_2 a^{-\rho} - \xi \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \\ &= \xi \int_E \frac{\tau^{-\rho} d\tau}{\tau + 1} + a_2 a^{-\rho} \ln \frac{1 + a}{1 + a(a_1/a_2)^{1/\rho}}, \end{aligned}$$

где $E = [0; a(a_1/a_2)^{1/\rho}] \cup [a; +\infty)$. Поскольку эта линейная функция возрастает и $k^* = \alpha^*/\beta^* = a_1 \ln(e/a_1) > a_1$, выполняется неравенство

$$f_a(k^*) > f_a(a_1).$$

Выбирая в качестве a точку a^* , в которой достигает своего максимума правая часть (6), получаем

$$\tilde{s}(\alpha^*, \beta^*, \rho) \geq \rho \beta^* f_{a^*}(k^*) > \rho \beta^* f_{a^*}(a_1) \quad \text{при } \alpha^* \in (0; \beta^*),$$

что и заканчивает нашу проверку.

Теперь мы видим, что для любой неизмеримой последовательности Λ с положительной усредненной нижней ρ -плотностью оценка (6), вытекающая из известных результатов, не является наилучшей из возможных. Это обстоятельство закрывает казавшийся перспективным и основанный на соединении точных равенств (1) и (3) простой путь решения интересующей нас экстремальной задачи.

Перейдем, наконец, к доказательству центрального результата статьи. В этом разделе выводится оценка снизу ρ -типа произвольной целой функции порядка $\rho \in (0; 1)$ с положительными дискретно измеримыми нулями фиксированных усредненных ρ -плотностей. В следующем разделе для любых $\beta^* > 0$ и $\alpha^* \in (0; \beta^*)$ строится пример функции, подтверждающий точность полученной оценки.

Итак, будем устанавливать равенство

$$\tilde{s}(\alpha^*, \beta^*, \rho) = \rho \left(\frac{\pi \alpha^*}{\sin \pi \rho} + \max_{a>0} \int_{a(a_1/a_2)^{1/\rho}}^a \frac{a_2 \beta^* a^{-\rho} - \alpha^* \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \right),$$

развивая идеи работы [15].

Величина $\tilde{s}(0, \beta^*, \rho)$ была найдена нами ранее в [19]:

$$\tilde{s}(0, \beta^*, \rho) = C(\rho) \rho e \beta^*,$$

что является частным случаем формулы (5) при $\alpha^* = 0$ (функция $C(\rho)$ та же, что и в теореме A). Поэтому всюду далее считаем $\alpha^* > 0$. Кроме того, не ограничивая общности рассуждений, рассматриваем бесконечные произведения вида

$$L_\Lambda(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n} \right), \quad \lambda_n > 0.$$

Запишем при каждом $R > 0$

$$\ln \max_{|z|=R} |L_{\Lambda}(z)| = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{R}{\lambda_n} \right) = \int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{R}{x} \right) dn_{\Lambda}(x).$$

Интегрирование по частям приводит к формуле

$$\int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{R}{x} \right) dn_{\Lambda}(x) = n_{\Lambda}(x) \ln \left(1 + \frac{R}{x} \right) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{n_{\Lambda}(x)}{x} \frac{R dx}{R+x}.$$

Поскольку подстановка обращается в нуль, интегрируя еще раз по частям и полагая $x = Rt$ и $\varphi_R(t) := N_{\Lambda}(Rt)/(Rt)^{\rho}$, приходим к равенству

$$R^{-\rho} \ln \max_{|z|=R} |L_{\Lambda}(z)| = \int_0^{+\infty} \varphi_R(t) \frac{t^{\rho}}{(1+t)^2} dt. \quad (7)$$

Пусть теперь зафиксированы произвольно числа $a > 0$ и $\epsilon \in (0; \alpha^*)$. Найдем из определения усредненной нижней ρ -плотности последовательности Λ число $c > 0$ так, чтобы при каждом $R \geq ac$ для всех $t \geq c/R$ выполнялось неравенство $\varphi_R(t) \geq \alpha_{\epsilon}^* := \alpha^* - \epsilon$. В частности, $\varphi_R(1/a) \geq \alpha_{\epsilon}^*$. При всех $t \geq 1/a$ запишем оценку

$$N_{\Lambda}(Rt) = N_{\Lambda} \left(\frac{R}{a} \right) + \int_{Ra^{-1}}^{Rt} \frac{n_{\Lambda}(x)}{x} dx \geq N_{\Lambda} \left(\frac{R}{a} \right) + n_{\Lambda} \left(\frac{R}{a} \right) \ln at.$$

Обозначив $\xi(R) := (R/a)^{-\rho} n_{\Lambda}(R/a)$, видим, что при всех $R \geq ac$ и $t \geq c/R$ справедливо неравенство

$$\varphi_R(t) \geq \frac{N_{\Lambda}(R/a) + n_{\Lambda}(R/a) \ln at}{(Rt)^{\rho}} = \frac{\varphi_R(1/a) + \xi(R) \ln at}{(at)^{\rho}} \geq \frac{\alpha_{\epsilon}^* + \xi(R) \ln at}{(at)^{\rho}}.$$

Обозначим через $s = a_2/a_1$ отношение большего корня уравнения

$$a \ln \frac{e}{a} = \frac{\alpha^*}{\beta^*}$$

к меньшему и рассмотрим функцию

$$\psi_R(t) = \begin{cases} \alpha_{\epsilon}^*, & t \in \left(0; \frac{1}{a} \right] \cup \left[\frac{s^{1/\rho}}{a}; +\infty \right), \\ \frac{\alpha_{\epsilon}^* + \xi(R) \ln at}{(at)^{\rho}}, & t \in \left(\frac{1}{a}; \frac{s^{1/\rho}}{a} \right). \end{cases}$$

Выбор промежутков в определении функции $\psi_R(t)$ станет ясен из дальнейшего. Сейчас мы можем только утверждать, что при каждом $R \geq ac$ и любых $t \geq c/R$ справедливо неравенство

$$\varphi_R(t) \geq \psi_R(t). \quad (8)$$

Из (7) и (8) заключаем, что при фиксированном $R \geq ac$ имеет место оценка

$$R^{-\rho} \ln \max_{|z|=R} |L_{\Lambda}(z)| \geq \int_{cR^{-1}}^{+\infty} \psi_R(t) \frac{t^{\rho}}{(1+t)^2} dt. \quad (9)$$

Преобразуем интеграл, стоящий в правой части (9):

$$\begin{aligned}
 & \int_{cR^{-1}}^{+\infty} \psi_R(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \\
 &= \alpha_\epsilon^* \left(\int_{cR^{-1}}^{a^{-1}} \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt + \int_{a^{-1}s^{1/\rho}}^{+\infty} \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \right) \\
 & \quad + \int_{a^{-1}}^{a^{-1}s^{1/\rho}} \frac{\alpha_\epsilon^* + \xi(R) \ln at}{(at)^\rho} \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \\
 &= \alpha_\epsilon^* \int_{cR^{-1}}^{+\infty} \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt + \int_{a^{-1}}^{a^{-1}s^{1/\rho}} \left(\frac{\alpha_\epsilon^* + \xi(R) \ln at}{(at)^\rho} - \alpha_\epsilon^* \right) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \\
 &= \alpha_\epsilon^* \left(\frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} - \int_0^{cR^{-1}} \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \right) + \int_{a^{-1}}^{a^{-1}s^{1/\rho}} \frac{\alpha_\epsilon^* (a^{-\rho} - t^\rho) + a^{-\rho} \xi(R) \ln at}{(1+t)^2} dt.
 \end{aligned}$$

Выбирая последовательность $R_j \rightarrow +\infty$, для которой

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \xi(R_j) = \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \overline{\Delta},$$

и заменяя в последнем интеграле at на x , из (9) выводим оценку

$$\sigma_\rho(L_\Lambda) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{cR_j^{-1}}^{+\infty} \psi_{R_j}(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt = \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} \alpha_\epsilon^* + a^{1-\rho} \int_1^{s^{1/\rho}} \frac{\alpha_\epsilon^* (1-x^\rho) + \overline{\Delta} \ln x}{(x+a)^2} dx.$$

Поскольку число $\epsilon \in (0; \alpha^*)$ взято произвольно, а для дискретно измеримой последовательности Λ имеем $\overline{\Delta} = \rho a_2 \beta^*$, то

$$\sigma_\rho(L_\Lambda) \geq \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} \alpha^* + a^{1-\rho} \int_1^{s^{1/\rho}} \frac{\alpha^* (1-x^\rho) + \rho a_2 \beta^* \ln x}{(x+a)^2} dx.$$

Если справа в полученном неравенстве проинтегрировать по частям, то оно примет более простой вид. Действительно,

$$\begin{aligned}
 & \int_1^{s^{1/\rho}} \frac{\alpha^* (1-x^\rho) + \rho a_2 \beta^* \ln x}{(x+a)^2} dx \\
 &= - \frac{\alpha^* (1-x^\rho) + \rho a_2 \beta^* \ln x}{x+a} \Big|_1^{s^{1/\rho}} + \rho \int_1^{s^{1/\rho}} \frac{a_2 \beta^* - \alpha^* x^\rho}{x(x+a)} dx.
 \end{aligned}$$

Внеинтегральное слагаемое обращается в нуль, так как

$$\begin{aligned}
 \alpha^* (1-s) + a_2 \beta^* \ln s &= \alpha^* \left(1 - \frac{a_2}{a_1} \right) + a_2 \beta^* \ln \frac{a_2}{a_1} \\
 &= \alpha^* \left(1 - \frac{a_2}{a_1} \right) + a_2 \beta^* \ln \frac{a_2}{e} + a_2 \beta^* \ln \frac{e}{a_1} \\
 &= \alpha^* \left(1 - \frac{a_2}{a_1} \right) + \beta^* \left(-\frac{\alpha^*}{\beta^*} + \frac{a_2}{a_1} \frac{\alpha^*}{\beta^*} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

В результате установлено, что

$$\sigma_\rho(L_\Lambda) \geq \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} \alpha^* + a^{1-\rho} \rho \int_1^{s^{1/\rho}} \frac{a_2\beta^* - \alpha^* x^\rho}{x(x+a)} dx.$$

После замены переменной $x = a/\tau$ с учетом свободы в выборе $a > 0$ окончательно получаем

$$\sigma_\rho(L_\Lambda) \geq \rho \left(\frac{\pi\alpha^*}{\sin \pi\rho} + \max_{a>0} \int_{a(a_1/a_2)^{1/\rho}}^a \frac{a_2\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \right).$$

2. Доказательство точности оценки. Итак, для произвольного порядка $\rho \in (0; 1)$ и любых чисел $\alpha^* > 0$ и $\beta^* > 0$, $\alpha^* \leq \beta^*$, нужно предъявить последовательность $\tilde{\Lambda} \subset \mathbb{R}_+$ с характеристиками

$$\tilde{\Delta}_\rho(\tilde{\Lambda}) = \underline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \alpha^*, \quad \overline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \beta^*,$$

для которой

$$\sigma_\rho(L_{\tilde{\Lambda}}) = \int_0^{+\infty} \Psi_0(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt.$$

В выражении ρ -типа $L_{\tilde{\Lambda}}$ записана функция

$$\Psi_0(t) := \begin{cases} \alpha^*, & t \in \left(0; \frac{1}{a_o}\right] \cup \left[\frac{s^{1/\rho}}{a_o}; +\infty\right), \\ \frac{\alpha^* + \rho a_2 \beta^* \ln a_o t}{(a_o t)^\rho}, & t \in \left(\frac{1}{a_o}; \frac{s^{1/\rho}}{a_o}\right), \end{cases} \quad (10)$$

$a_o = a_o(\alpha^*, \beta^*, \rho)$ – точка максимума на луче $a > 0$ функции

$$\varphi(a) = \int_{a(a_1/a_2)^{1/\rho}}^a \frac{a_2\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau.$$

Построение такого примера потребует значительных усилий. Опишем выбор последовательности $\tilde{\Lambda} = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$. Предварительно зададим вспомогательную последовательность $(m_n)_{n=1}^\infty$ по правилу $m_{n+1} = m_n^4$, $n \in \mathbb{N}$.

Точки λ_j последовательности $\tilde{\Lambda}$ на отрезках $[m_n; m_n^2 - 1]$ выбираем так, чтобы λ_j^ρ образовывали арифметическую прогрессию с разностью $(\rho\alpha^*)^{-1}$. Заметим, что уже первый отрезок $[m_1; m_1^2 - 1]$ не будет лишен точек λ_j , если потребовать выполнения неравенства $(m_1^2 - 1)^\rho - m_1^\rho > (\rho\alpha^*)^{-1}$. На полуинтервалах $(m_n^2 - 1; m_n^2]$ точки λ_j определим так, чтобы λ_j^ρ являлась арифметической прогрессией с разностью $((a_2\beta^* - \alpha^*)m_n^2)^{-1}$. На интервалы $(m_n^2; s^{1/\rho}m_n^2)$ точки λ_j не помещаем. На промежутках $[s^{1/\rho}m_n^2; s^{1/\rho}(m_n^2 + 1))$ точки λ_j выстраиваем так, что λ_j^ρ составляют арифметическую прогрессию, разность которой равна $((\alpha^* - a_1\beta^*)m_n^2)^{-1}$. Наконец, заполняем оставшиеся отрезки $[s^{1/\rho}(m_n^2 + 1); m_{n+1}]$ точками λ_j так, чтобы λ_j^ρ образовывали арифметическую прогрессию с разностью $(\rho\alpha^*)^{-1}$. Здесь, как и выше, $s = a_2/a_1$. Для удобства вводим последовательность $\Omega = (\lambda_n^\rho)_{n=1}^\infty$. Таким образом, при каждом $n \in \mathbb{N}$ можем записать

$$\Omega \cap [m_n^\rho; (m_n^2 - 1)^\rho] = \{m_n^\rho + \nu(\rho\alpha^*)^{-1} : \nu \in \mathbb{N}, \nu \leq ((m_n^2 - 1)^\rho - m_n^\rho)\rho\alpha^*\},$$

$$\begin{aligned}
\Omega \cap ((m_n^2 - 1)^\rho; m_n^{2\rho}] &= \{(m_n^2 - 1)^\rho + \nu((a_2\beta^* - \alpha^*)m_n^2)^{-1} : \\
&\quad \nu \in \mathbb{N}, \nu \leq (m_n^{2\rho} - (m_n^2 - 1)^\rho)(a_2\beta^* - \alpha^*)m_n^2\}, \\
\Omega \cap (m_n^{2\rho}; sm_n^{2\rho}) &= \emptyset, \\
\Omega \cap [sm_n^{2\rho}; s(m_n^2 + 1)^\rho] &= \{sm_n^{2\rho} + \nu((\alpha^* - a_1\beta^*)m_n^2)^{-1} : \\
&\quad \nu \in \mathbb{N}, \nu \leq s((m_n^2 + 1)^\rho - m_n^{2\rho})(\alpha^* - a_1\beta^*)m_n^2\}, \\
\Omega \cap [s(m_n^2 + 1)^\rho; m_{n+1}^\rho] &= \{s(m_n^2 + 1)^\rho + \nu(\rho\alpha^*)^{-1} : \\
&\quad \nu \in \mathbb{N}, \nu \leq (m_{n+1}^\rho - s(m_n^2 + 1)^\rho)\rho\alpha^*\}.
\end{aligned}$$

Отыщем асимптотику $n_\Omega(m_n^\rho)$, воспользовавшись легко проверяемым соотношением

$$(m_n^2 - 1)^\rho = m_n^{2\rho} - \rho m_n^{2\rho-2} + O(m_n^{2\rho-4}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Для этого рассмотрим разность

$$\begin{aligned}
n_\Omega(m_{n+1}^\rho) - n_\Omega(m_n^\rho) &= ((m_n^2 - 1)^\rho - m_n^\rho)\rho\alpha^* + (m_n^{2\rho} - (m_n^2 - 1)^\rho)(a_2\beta^* - \alpha^*)m_n^2 \\
&\quad + s((m_n^2 + 1)^\rho - m_n^{2\rho})(\alpha^* - a_1\beta^*)m_n^2 + (m_{n+1}^\rho - s(m_n^2 + 1)^\rho)\rho\alpha^* + O(1) \\
&= (m_n^{2\rho} - m_n^\rho)\rho\alpha^* + O(m_n^{2\rho-2}) + \rho m_n^{2\rho}(a_2\beta^* - \alpha^*) + O(m_n^{2\rho-2}) + \rho m_n^{2\rho}(s\alpha^* - a_2\beta^*) \\
&\quad + O(m_n^{2\rho-2}) + (m_{n+1}^\rho - sm_n^{2\rho})\rho\alpha^* + O(1) \\
&= \rho\alpha^*(m_{n+1}^\rho - m_n^\rho) + O(1), \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
n_\Omega(m_{n+1}^\rho) &= n_\Omega(m_{n-1}^\rho) + \rho\alpha^*m_n^\rho - \rho\alpha^*m_{n-1}^\rho + \rho\alpha^*m_{n+1}^\rho - \rho\alpha^*m_n^\rho + 2O(1) \\
&= n_\Omega(m_{n-1}^\rho) + \rho\alpha^*m_{n+1}^\rho - \rho\alpha^*m_{n-1}^\rho + 2O(1) = \dots \\
&= n_\Omega(m_1^\rho) + \rho\alpha^*m_{n+1}^\rho - \rho\alpha^*m_1^\rho + O(n), \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$n_\Omega(m_{n+1}^\rho) = \rho\alpha^*m_{n+1}^\rho + O(m_{n+1}^{\rho/2}).$$

Теперь выпишем выражения для считающей функции $n_\Omega(t)$ на различных участках положительной полуоси, используя асимптотику (11).

Если $t \in [m_n^\rho; (m_n^2 - 1)^\rho]$, то

$$n_\Omega(t) = n_\Omega(m_n^\rho) + (t - m_n^\rho)\rho\alpha^* + O(1) = \rho\alpha^*t + O(m_n^{\rho/2}).$$

Если $t \in ((m_n^2 - 1)^\rho; m_n^{2\rho}]$, то

$$\begin{aligned}
n_\Omega(t) &= n_\Omega((m_n^2 - 1)^\rho) + (t - (m_n^2 - 1)^\rho)(a_2\beta^* - \alpha^*)m_n^2 + O(1) \\
&= \rho\alpha^*(m_n^{2\rho} + O(m_n^{2\rho-2})) + tm_n^2(a_2\beta^* - \alpha^*) \\
&\quad - m_n^2(a_2\beta^* - \alpha^*)(m_n^{2\rho} - \rho m_n^{2\rho-2} + O(m_n^{2\rho-4})) + O(m_n^{\rho/2}) \\
&= m_n^2(a_2\beta^* - \alpha^*)(t - m_n^{2\rho}) + \rho a_2\beta^*m_n^{2\rho} + O(m_n^{\rho/2}).
\end{aligned}$$

Если $t \in (m_n^{2\rho}; sm_n^{2\rho})$, то

$$n_\Omega(t) = n_\Omega(m_n^{2\rho}) = \rho a_2\beta^*m_n^{2\rho} + O(m_n^{\rho/2}).$$

Если $t \in [sm_n^{2\rho}; s(m_n^2 + 1)^\rho]$, то

$$\begin{aligned} n_\Omega(t) &= n_\Omega(m_n^{2\rho}) + (t - sm_n^{2\rho})(\alpha^* - a_1\beta^*)m_n^2 + O(1) \\ &= (t - sm_n^{2\rho})(\alpha^* - a_1\beta^*)m_n^2 + \rho a_2\beta^* m_n^{2\rho} + O(m_n^{\rho/2}). \end{aligned}$$

Если $t \in [s(m_n^2 + 1)^\rho; m_{n+1}^\rho]$, то аналогично второму случаю

$$\begin{aligned} n_\Omega(t) &= n_\Omega(s(m_n^2 + 1)^\rho) + (t - s(m_n^2 + 1)^\rho)\rho\alpha^* + O(1) \\ &= sm_n^{2\rho+2}(\rho m_n^{-2} + O(m_n^{-4}))(\alpha^* - a_1\beta^*) \\ &\quad + \rho a_2\beta^* m_n^{2\rho} + \rho\alpha^* t - s\rho\alpha^* m_n^{2\rho} + O(m_n^{\rho/2}) \\ &= \rho\alpha^* t + O(m_n^{\rho/2}). \end{aligned}$$

Соберем полученные сведения в формулу ($n = 1, 2, \dots$):

$$\frac{n_\Omega(t)}{t} = \begin{cases} \rho\alpha^* + O(t^{-1/2}), & t \in [m_n^\rho; (m_n^2 - 1)^\rho] \cup [s(m_n^2 + 1)^\rho; m_{n+1}^\rho], \\ t^{-1}(m_n^2(a_2\beta^* - \alpha^*)(t - m_n^{2\rho}) + \rho a_2\beta^* m_n^{2\rho}) + O(t^{-1/2}), & t \in ((m_n^2 - 1)^\rho; m_n^{2\rho}], \\ \rho a_2\beta^* \frac{m_n^{2\rho}}{t} + O(t^{-1/2}), & t \in (m_n^{2\rho}; sm_n^{2\rho}), \\ t^{-1}(m_n^2(\alpha^* - a_1\beta^*)(t - sm_n^{2\rho}) + \rho a_2\beta^* m_n^{2\rho}) + O(t^{-1/2}), & t \in [sm_n^{2\rho}; s(m_n^2 + 1)^\rho]. \end{cases} \quad (12)$$

С учетом представления (12) выясним поведение усредненной считающей функции $N_\Omega(r)$. Для облегчения работы находим сначала асимптотику величины $N_\Omega(m_n^\rho)$. При $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} N_\Omega(m_{n+1}^\rho) - N_\Omega(m_n^\rho) &= \int_{m_n^\rho}^{m_{n+1}^\rho} \frac{n_\Omega(t)}{t} dt \\ &= \int_{m_n^\rho}^{(m_n^2 - 1)^\rho} \frac{n_\Omega(t)}{t} dt + \int_{(m_n^2 - 1)^\rho}^{m_n^{2\rho}} \frac{n_\Omega(t)}{t} dt + \int_{m_n^{2\rho}}^{sm_n^{2\rho}} \frac{n_\Omega(t)}{t} dt \\ &\quad + \int_{sm_n^{2\rho}}^{s(m_n^2 + 1)^\rho} \frac{n_\Omega(t)}{t} dt + \int_{s(m_n^2 + 1)^\rho}^{m_{n+1}^\rho} \frac{n_\Omega(t)}{t} dt \\ &= \rho\alpha^*((m_n^2 - 1)^\rho - m_n^\rho) + O(m_n^{2\rho-2}) + \rho a_2\beta^* m_n^{2\rho} \ln s + O(m_n^{2\rho-2}) \\ &\quad + \rho\alpha^*(m_{n+1}^\rho - s(m_n^2 + 1)^\rho) + \int_{m_n^\rho}^{m_{n+1}^\rho} O(t^{-1/2}) dt \\ &= \rho\alpha^* m_{n+1}^\rho + O(m_n^{5\rho/2}). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} N_\Omega(m_{n+1}^\rho) &= N_\Omega(m_n^\rho) + \rho\alpha^* m_{n+1}^\rho + O(m_n^{5\rho/2}) \\ &= N_\Omega(m_{n-1}^\rho) + \rho\alpha^* m_n^\rho + O(m_{n-1}^{5\rho/2}) + \rho\alpha^* m_{n+1}^\rho + O(m_n^{5\rho/2}) \\ &= N_\Omega(m_{n-1}^\rho) + \rho\alpha^* m_{n+1}^\rho + 2O(m_n^{5\rho/2}) = \dots \\ &= \rho\alpha^* m_{n+1}^\rho + O(m_n^{3\rho}), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Итак,

$$N_{\Omega}(m_n^{\rho}) = \rho\alpha^* m_n^{\rho} + O(m_n^{3\rho/4}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Формулы (12) и (13) позволяют провести следующие вычисления.

При $r \in [m_n^{\rho}; (m_n^2 - 1)^{\rho}]$ имеем

$$\begin{aligned} N_{\Omega}(r) &= N_{\Omega}(m_n^{\rho}) + \int_{m_n^{\rho}}^r \frac{n_{\Omega}(t)}{t} dt \\ &= \rho\alpha^* m_n^{\rho} + O(m_n^{3\rho/4}) + (r - m_n^{\rho})\rho\alpha^* + \int_{m_n^{\rho}}^r O(t^{-1/2}) dt \\ &= \rho\alpha^* r + (r - m_n^{\rho})O(m_n^{-\rho/2}) + O(m_n^{3\rho/4}) = \rho\alpha^* r + O(r^{3/4}). \end{aligned}$$

При $r \in ((m_n^2 - 1)^{\rho}; m_n^{2\rho}]$ находим

$$\begin{aligned} N_{\Omega}(r) &= N_{\Omega}((m_n^2 - 1)^{\rho}) + \int_{(m_n^2 - 1)^{\rho}}^r \frac{n_{\Omega}(t)}{t} dt \\ &= \rho\alpha^* (m_n^2 - 1)^{\rho} + O(m_n^{3\rho/2}) = \rho\alpha^* m_n^{2\rho} + O(r^{3/4}). \end{aligned}$$

При $r \in (m_n^{2\rho}; sm_n^{2\rho})$ запишем

$$\begin{aligned} N_{\Omega}(r) &= N_{\Omega}(m_n^{2\rho}) + \int_{m_n^{2\rho}}^r \frac{n_{\Omega}(t)}{t} dt \\ &= \rho\alpha^* m_n^{2\rho} + O(m_n^{3\rho/2}) + \rho a_2 \beta^* m_n^{2\rho} \ln \frac{r}{m_n^{2\rho}} + \int_{m_n^{2\rho}}^r O(t^{-1/2}) dt \\ &= \rho\alpha^* m_n^{2\rho} + \rho a_2 \beta^* m_n^{2\rho} \ln \frac{r}{m_n^{2\rho}} + O(r^{3/4}). \end{aligned}$$

При $r \in [sm_n^{2\rho}; s(m_n^2 + 1)^{\rho}]$ вычислим

$$\begin{aligned} N_{\Omega}(r) &= N_{\Omega}(sm_n^{2\rho}) + \int_{sm_n^{2\rho}}^r \frac{n_{\Omega}(t)}{t} dt = \rho\alpha^* m_n^{2\rho} + \rho a_2 \beta^* m_n^{2\rho} \ln s + O(m_n^{3\rho/2}) \\ &= \rho m_n^{2\rho} \underbrace{(\alpha^* + a_2 \beta^* \ln s)}_{=\alpha^* s} + O(m_n^{3\rho/2}) = \rho\alpha^* sm_n^{2\rho} + O(r^{3/4}). \end{aligned}$$

При $r \in [s(m_n^2 + 1)^{\rho}; m_{n+1}^{\rho}]$ получим

$$\begin{aligned} N_{\Omega}(r) &= N_{\Omega}(s(m_n^2 + 1)^{\rho}) + \int_{s(m_n^2 + 1)^{\rho}}^r \frac{n_{\Omega}(t)}{t} dt \\ &= \rho\alpha^* sm_n^{2\rho} + O(m_n^{3\rho/2}) + \rho\alpha^* (r - s(m_n^2 + 1)^{\rho}) + \int_{s(m_n^2 + 1)^{\rho}}^r O(t^{-1/2}) dt \\ &= \rho\alpha^* r + O(r^{3/4}). \end{aligned}$$

Таким образом, при каждом $n \in \mathbb{N}$ справедливо представление

$$\frac{N_{\Omega}(r)}{r} = \begin{cases} \rho\alpha^* + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{r}}\right), & r \in [m_n^{\rho}; m_n^{2\rho}] \cup [sm_n^{2\rho}; m_{n+1}^{\rho}), \\ \rho m_n^{2\rho} r^{-1} \left(\alpha^* + a_2 \beta^* \ln \left(\frac{r}{m_n^{2\rho}} \right) \right) + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{r}}\right), & r \in (m_n^{2\rho}; sm_n^{2\rho}). \end{cases} \quad (14)$$

Найдем усредненные ρ -плотности последовательности $\tilde{\Lambda}$. Поскольку при всех $x > 0$ верно $n_{\tilde{\Lambda}}(x) = n_{\Omega}(x^{\rho})$, то

$$N_{\tilde{\Lambda}}(t) = \int_0^t \frac{n_{\tilde{\Lambda}}(x)}{x} dx = \rho^{-1} \int_0^t \frac{n_{\Omega}(x^{\rho})}{x^{\rho}} d(x^{\rho}) = \rho^{-1} \int_0^{t^{\rho}} \frac{n_{\Omega}(r)}{r} dr = \rho^{-1} N_{\Omega}(t^{\rho}).$$

Поэтому

$$\overline{\Delta}_{\rho}^*(\tilde{\Lambda}) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{N_{\tilde{\Lambda}}(t)}{t^{\rho}} = \rho^{-1} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{N_{\Omega}(t^{\rho})}{t^{\rho}} = \rho^{-1} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N_{\Omega}(r)}{r} = \rho^{-1} \overline{\Delta}^*(\Omega).$$

Аналогично проверяется, что $\underline{\Delta}_{\rho}^*(\tilde{\Lambda}) = \rho^{-1} \underline{\Delta}^*(\Omega)$.

Из формулы (14) видно, что

$$\underline{\Delta}^*(\Omega) = \rho \alpha^*,$$

$$\overline{\Delta}^*(\Omega) = \rho \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \max_{r \in [m_n^{2\rho}; sm_n^{2\rho}]} \frac{\alpha^* + a_2 \beta^* \ln(r/m_n^{2\rho})}{r/m_n^{2\rho}} = \rho \max_{\tau \in [1; s]} \frac{\alpha^* + a_2 \beta^* \ln \tau}{\tau}.$$

Последний максимум достигается в точке

$$\tau_o = \exp \left\{ 1 - \frac{\alpha^*}{a_2 \beta^*} \right\} = a_2 \in [1; s] = \left[1; \frac{a_2}{a_1} \right]$$

и равен

$$a_2 \beta^* \exp \left\{ \frac{\alpha^*}{a_2 \beta^*} - 1 \right\} = \beta^*.$$

Следовательно,

$$\underline{\Delta}^*(\Omega) = \rho \alpha^*, \quad \overline{\Delta}^*(\Omega) = \rho \beta^*.$$

Из (14), учитывая отсутствие точек последовательности Ω на интервалах $(m_n^{2\rho}; sm_n^{2\rho})$, получаем

$$\tilde{\Delta}_{\rho}(\tilde{\Lambda}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{\tilde{\Lambda}}(\lambda_n)}{\lambda_n^{\rho}} = \rho^{-1} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{\Omega}(\lambda_n^{\rho})}{\lambda_n^{\rho}} = \alpha^*.$$

Итак, построенная последовательность $\tilde{\Lambda}$ такова, что

$$\tilde{\Delta}_{\rho}(\tilde{\Lambda}) = \underline{\Delta}_{\rho}^*(\tilde{\Lambda}) = \alpha^*, \quad \overline{\Delta}_{\rho}^*(\tilde{\Lambda}) = \beta^*.$$

Осталось лишь проверить, что

$$\sigma_{\rho}(L_{\tilde{\Lambda}}) = \int_0^{+\infty} \Psi_0(t) \frac{t^{\rho}}{(1+t)^2} dt,$$

где функция $\Psi_0(t)$ задается формулой (10). С этой целью запишем для $\tilde{\Lambda}$ функцию $\varphi_R(t)$, полагая в (14) $r = (Rt)^{\rho}$:

$$\varphi_R(t) = \frac{N_{\tilde{\Lambda}}(Rt)}{(Rt)^{\rho}} = \begin{cases} \alpha^* + \frac{1}{t^{\rho/4}} O\left(\frac{1}{R^{\rho/4}}\right), & t \in \left[\frac{m_n}{R}; \frac{m_n^2}{R}\right] \cup \left[\frac{s^{1/\rho} m_n^2}{R}; \frac{m_n^4}{R}\right], \\ \left(\frac{Rt}{m_n^2}\right)^{-\rho} \left(\alpha^* + a_2 \beta^* \ln\left(\frac{Rt}{m_n^2}\right)^{\rho}\right) + \frac{1}{t^{\rho/4}} O\left(\frac{1}{R^{\rho/4}}\right), \\ t \in \left(\frac{m_n^2}{R}; \frac{s^{1/\rho} m_n^2}{R}\right], & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Вводя функцию

$$\Phi_R(t) = \begin{cases} \alpha^*, & t \in \left[\frac{m_n}{R}; \frac{m_n^2}{R} \right] \cup \left[\frac{s^{1/\rho} m_n^2}{R}; \frac{m_n^4}{R} \right], \\ \left(\frac{Rt}{m_n^2} \right)^{-\rho} \left(\alpha^* + a_2 \beta^* \ln \left(\frac{Rt}{m_n^2} \right)^\rho \right), & t \in \left(\frac{m_n^2}{R}; \frac{s^{1/\rho} m_n^2}{R} \right], \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

запишем

$$\varphi_R(t) = \Phi_R(t) + \frac{1}{t^{\rho/4}} O\left(\frac{1}{R^{\rho/4}}\right), \quad t \in \left[\frac{m_1}{R}; +\infty \right).$$

Пусть $R_n = a_o m_n^2$, где точка a_o та же, что и в формуле (10). Очевидно, тип бесконечного произведения $L_{\tilde{\Lambda}}(z)$ можно находить следующим образом:

$$\sigma_\rho(L_{\tilde{\Lambda}}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{R_n \leq R < R_{n+1}} \int_0^{+\infty} \varphi_R(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt.$$

Оценим интеграл в этом представлении сверху через $\int_0^{+\infty} \Psi_0(t) t^\rho / (1+t)^2 dt$, используя незначительный рост разности $\varphi_R(t) - \Psi_0(t)$ при фиксированном R и $t \rightarrow +\infty$. Вначале сведем задачу к аналогичной с заменой $\varphi_R(t)$ на $\Phi_R(t)$. При каждом $n \in \mathbb{N}$ справедливо представление

$$\int_0^{+\infty} \varphi_R(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt = \int_0^{m_n R^{-1}} \varphi_R(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt + \int_{m_n R^{-1}}^{+\infty} \varphi_R(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt.$$

Пусть $R \in [R_n; R_{n+1}) = [a_o m_n^2; a_o m_n^8)$, $n \in \mathbb{N}$. Равномерно по таким R

$$\int_0^{m_n R^{-1}} \varphi_R(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \leq \int_0^{(a_o m_n)^{-1}} \varphi_R(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \sup_{R_n \leq R < R_{n+1}} \int_0^{+\infty} \varphi_R(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \\ & \leq \sup_{R_n \leq R < R_{n+1}} \left[\int_{m_n R^{-1}}^{+\infty} \Phi_R(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \right. \\ & \quad \left. + O\left(\frac{1}{R^{\rho/4}}\right) \int_0^{+\infty} \frac{t^{3\rho/4} dt}{(1+t)^2} \right] + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Смещение “всплесков” функции $\Phi_R(t)$ при движении R вдоль промежутка $[R_n; R_{n+1})$ вынуждает в дальнейших оценках интегралов по-разному учитывать близость R к концам этого полуинтервала.

Представляя $[R_n; R_{n+1}) = [a_o m_n^2; m_n^7] \cup (m_n^7; a_o m_n^8)$, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_\rho(L_{\tilde{\Lambda}}) & \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{R_n \leq R < R_{n+1}} \int_{m_n R^{-1}}^{+\infty} \Phi_R(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \\ & = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \max \left\{ \sup_{a_o m_n^2 \leq R \leq m_n^7} \int_{m_n R^{-1}}^{+\infty} \Phi_R(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt, \right. \\ & \quad \left. \sup_{m_n^7 < R < a_o m_n^8} \int_{m_n R^{-1}}^{+\infty} \Phi_R(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \right\}. \end{aligned}$$

Пусть вначале $R \in [a_o m_n^2; m_n^7]$. Тогда из определения функций $\Phi_R(t)$, $\Psi_0(t)$ (см. выше) и точки a_o следует, что

$$\begin{aligned}
 & \int_{m_n R^{-1}}^{+\infty} \Phi_R(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \\
 &= \int_{m_n R^{-1}}^{m_{n+1} R^{-1}} \Phi_R(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \\
 & \quad + \int_{m_{n+1} R^{-1}}^{+\infty} \frac{\alpha^* t^\rho}{(1+t)^2} dt + \int_{m_{n+1} R^{-1}}^{+\infty} \frac{(\Phi_R(t) - \alpha^*) t^\rho}{(1+t)^2} dt \\
 &\leq \int_0^{+\infty} \Psi_0(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt + \int_{m_{n+1} R^{-1}}^{+\infty} \frac{(\Phi_R(t) - \alpha^*) t^\rho}{(1+t)^2} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \Psi_0(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt + \int_{m_{n+1}^2 R^{-1}}^{+\infty} \frac{(\Phi_R(t) - \alpha^*) t^\rho}{(1+t)^2} dt \\
 &\leq \int_0^{+\infty} \Psi_0(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \\
 & \quad + \int_{m_n}^{+\infty} \frac{(\Phi_R(t) - \alpha^*) t^\rho}{(1+t)^2} dt = \int_0^{+\infty} \Psi_0(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt + o(1), \quad n \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

где бесконечно малая не зависит от R . Если же $R \in (m_n^7; a_o m_n^8)$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 & \int_{m_n R^{-1}}^{+\infty} \Phi_R(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \\
 &= \int_{m_n R^{-1}}^{m_n^4 R^{-1}} \Phi_R(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt + \int_{m_{n+1} R^{-1}}^{m_{n+2} R^{-1}} \Phi_R(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \\
 & \quad + \int_{m_{n+2} R^{-1}}^{+\infty} \frac{\alpha^* t^\rho}{(1+t)^2} dt + \int_{m_{n+2} R^{-1}}^{+\infty} \frac{(\Phi_R(t) - \alpha^*) t^\rho}{(1+t)^2} dt \\
 &\leq \int_{(a_o m_n^7)^{-1}}^{m_n^{-3}} \Phi_R(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \\
 & \quad + \int_0^{+\infty} \Psi_0(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt + \int_{m_{n+2} R^{-1}}^{+\infty} \frac{(\Phi_R(t) - \alpha^*) t^\rho}{(1+t)^2} dt \\
 &= o(1) + \int_0^{+\infty} \Psi_0(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt + \int_{m_{n+2}^2 R^{-1}}^{+\infty} \frac{(\Phi_R(t) - \alpha^*) t^\rho}{(1+t)^2} dt \\
 &\leq o(1) + \int_0^{+\infty} \Psi_0(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt + \int_{m_n^{24} a_o^{-1}}^{+\infty} \frac{(\Phi_R(t) - \alpha^*) t^\rho}{(1+t)^2} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \Psi_0(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt + o(1),
 \end{aligned}$$

где величина $o(1)$ снова не зависит от R .

Таким образом, установлено, что

$$\sup_{R_n \leq R < R_{n+1}} \int_{m_n R^{-1}}^{+\infty} \Phi_R(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt \leq \int_0^{+\infty} \Psi_0(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt + o(1)$$

с не зависящей от R бесконечно малой $o(1)$, $n \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\sigma_\rho(L_{\bar{\Lambda}}) \leq \int_0^{+\infty} \Psi_0(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt.$$

Привлекая противоположное неравенство

$$\sigma_\rho(L_{\bar{\Lambda}}) \geq \int_0^{+\infty} \Psi_0(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2} dt,$$

установленное в п. 1, получим $\sigma_\rho(L_{\bar{\Lambda}}) = \int_0^{+\infty} \Psi_0(t) t^\rho / (1+t)^2 dt$, что завершает доказательство основной теоремы.

Теперь мы можем сформулировать ответ на первоначальный вопрос Попова (см. введение): насколько сильно может отличаться тип целой функции при порядке $\rho \in (0; 1)$ с дискретно измеримой последовательностью положительных нулей заданной усредненной верхней ρ -плотности от своего наибольшего возможного значения?

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\rho \in (0; 1)$. Всякая целая функция, последовательность корней которой расположена на одном луче и дискретно измерима с фиксированной усредненной верхней ρ -плотностью $\bar{\Delta}^*$, имеет тип σ при порядке ρ , удовлетворяющий неулучшаемому с обеих сторон оценкам

$$C(\rho)\rho\bar{\Delta}^* \leq \sigma \leq \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} \bar{\Delta}^*. \quad (15)$$

Этот результат вытекает из основной теоремы при $\alpha^* = 0$. Как уже отмечалось, верхняя оценка в (15) достигается для функций с измеримой последовательностью положительных корней. В этом случае существующая по условию следствия дискретная усредненная плотность нулей совпадает с их усредненной плотностью.

Оценка снизу в (15) достигается, например, на целой функции с положительными нулями, имеющей тип $\sigma = C(\rho)\bar{\Delta}$, которую построил Попов в работе [14]. В самом деле, как показано в [19], для этой функции $\bar{\Delta} = \rho\bar{\Delta}^*$ и дискретная усредненная плотность ее корней равна нулю.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956.
- [2] А. А. Гольдберг, “Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. III”, *Матем. сб.*, **65**:3 (1964), 414–453.
- [3] А. А. Гольдберг, “Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. IV”, *Матем. сб.*, **66**:3 (1965), 411–457.
- [4] А. А. Кондратюк, “Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями”, *Литовск. матем. сб.*, **7**:1 (1967), 79–117.
- [5] А. А. Кондратюк, “Целые функции с положительными нулями, имеющими конечную максимальную плотность”, *Теория функций, функциональный анализ и их приложения*, **7** (1968), 37–52, Харьков.
- [6] А. А. Кондратюк, “Об экстремальном индикаторе целых функций с положительными нулями”, *Сиб. матем. журн.*, **11**:5 (1970), 1084–1092.
- [7] Н. В. Говоров, “Экстремальный індикатор цілої функції з додатними нулями заданої верхньої та нижньої густини”, *Доповіді АН УРСР*, **2** (1966), 148–150.

- [8] М. І. Андрашко, “Екстремальний індикатор цілої функції порядку менше одиниці з додатними нулями”, *Доповіди АН УРСР*, **7** (1960), 869–872.
- [9] Б. Н. Хабибуллин, “О типе целых и мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **183**:11 (1992), 35–44.
- [10] А. Ю. Попов, “О полноте в пространствах аналитических функций систем экспонент с вещественными показателями заданной верхней плотности”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1999, № 5, 48–52.
- [11] A. Eremenko, P. Yuditskii, *An Extremal Problem for a Class of Entire Functions of Exponential Type*, arXiv:math.CV/0807.2054.
- [12] Б. Н. Хабибуллин, “Последовательность нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции”, *Матем. сб.*, **200**:2 (2009), 129–158.
- [13] А. Ю. Попов, “О наименьшем типе целой функции порядка ρ с корнями заданной верхней ρ -плотности, лежащими на одном луче”, *Матем. заметки*, **85**:2 (2009), 246–260.
- [14] А. Ю. Попов, “Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ -плотности”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, № 1, 31–36.
- [15] Г. Г. Брайчев, В. Б. Шерстюков, “О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:1 (2011), 3–28.
- [16] P. Malliavin, L. A. Rubel, “On small entire functions of exponential type with given zeros”, *Bull. Soc. Math. France*, **89** (1961), 175–206.
- [17] А. М. Седлецкий, *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации*, Физматлит, М., 2005.
- [18] Г. Г. Брайчев, *Введение в теорию роста выпуклых и целых функций*, Прометей, М., 2005.
- [19] G. G. Braichev, V. B. Sherstyukov, “On an extremal problem related to the completeness of a system of exponentials in the disk”, *Asian-Eur. J. Math.*, **1**:1 (2008), 15–26.
- [20] Г. Г. Брайчев, В. Б. Шерстюков, “Точные соотношения между плотностями нулей целых функций конечного порядка”, *Математичні студії*, **30**:2 (2008), 183–188.

Г. Г. Брайчев

Московский педагогический государственный университет

E-mail: braichev@mail.ru

Поступило

07.04.2011

В. Б. Шерстюков

Национальный исследовательский

ядерный университет “МИФИ”, г. Москва

E-mail: shervb73@gmail.com