Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Гоголадзе, В. Цагарейшвили, Коэффициенты Фурье непрерывных функций, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 5, 691–703

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9358>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:36:46

Коэффициенты Фурье непрерывных функций

Л. Гоголадзе, В. Цагарейшвили

Хорошо известно, что коэффициенты Фурье непрерывных функций по классическим ортогональным системам (тригонометрическим, Хаара и Уолша) оцениваются модулями непрерывности функций. Однако этим свойством обладают не все ортонормированные системы (ОНС). В работе найдены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять ОНС для того, чтобы коэффициенты Фурье непрерывных функций по этим ОНС оценивались модулями непрерывности в некотором смысле.

Библиография: 5 названий.

1. Вспомогательные обозначения и теоремы. Как обычно, через $C(0, 1)$ обозначается класс всех непрерывных на $[0, 1]$ функций, через $\omega(\delta, f)$ – модуль непрерывности функций $f(x) \in C(0, 1)$ по норме $C(0, 1)$.

Пусть $(\varphi_n(x))$ – ОНС на $[0, 1]$ и $(a_n) \in \ell_2$ – некоторая последовательность чисел. Тогда

$$P_{ns}(x) = \sum_{k=n}^{n+s} a_k \varphi_k(x) \quad (1)$$

есть полином относительно системы (φ_n) , p и s – некоторые натуральные числа. Положим, что

$$\hat{\varphi}_n(f) = \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx \quad (2)$$

есть коэффициенты Фурье функций $f(x) \in L_2(0, 1)$.

Пусть $(a_n) \in \ell_2$ и $f(x) \in L_2(0, 1)$. Введем обозначения

$$e_{ns} = \left(\sum_{k=n}^{n+s} a_k^2 \right)^{1/2}, \quad (3)$$

$$e_n = \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Далее

$$e_{ns}(f) = \left(\sum_{k=n}^{n+s} \hat{\varphi}_k^2(f) \right)^{1/2}, \quad (5)$$

$$e_n(f) = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \hat{\varphi}_k^2(f) \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Наконец

$$B_{ns} = \sum_{i=1}^{n-1} \left| \int_0^{i/n} P_{ns}(x) dx \right|. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(a_n) \in \ell_2$ – любая последовательность, $a_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, а $f(x) \in L_2(0, 1)$ – любая функция ($f(x) \not\equiv 0$). Тогда существует ОНС (φ_n) на $[0, 1]$ такая, что

$$a_n = c \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где c – абсолютная константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала положим

$$\int_0^1 f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

Тогда

$$\int_0^1 f^2(x) dx > a_1^2.$$

Поэтому существует $E_1 \subset [0, 1]$ такая, что

$$\int_{E_1} f^2(x) dx = a_1^2.$$

Затем, если $F_1 = [0, 1] \setminus E_1$, то

$$\int_{F_1} f^2(x) dx = \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2.$$

Следовательно,

$$\int_{F_1} f^2(x) dx > a_2^2$$

и существует $E_2 \subset F_1$ такая, что

$$\int_{E_2} f^2(x) dx = a_2^2$$

при $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Продолжая этот процесс, мы получим последовательность непересекающихся множеств E_m таких, что

$$\int_{E_m} f^2(x) dx = a_m^2.$$

Рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{a_n} f(x) & \text{при } x \in E_n, \\ 0 & \text{при } x \notin E_n. \end{cases}$$

Так как $E_m \cap E_n = \emptyset$ при $m \neq n$, то

$$\int_0^1 \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = 0.$$

Далее,

$$\int_0^1 \varphi_n^2(x) dx = \frac{1}{a_n^2} \int_{E_n} f^2(x) dx = \frac{a_n^2}{a_n^2} = 1.$$

Наконец,

$$\widehat{\varphi}_n(f) = \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx = \frac{1}{a_n} \int_{E_n} f^2(x) dx = \frac{a_n^2}{a_n} = a_n.$$

Если теперь

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = c^2 \int_0^1 f^2(x) dx,$$

то получим

$$a_n = c \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx.$$

Теорема 1 доказана (см. [1]).

ЛЕММА 1. Если $\phi(x) \in L_2(0, 1)$ и функция $f(x)$ принимает конечные значения в каждой точке из $[0, 1]$, то справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \phi(x) dx &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right) \int_0^{i/n} \phi(x) dx \\ &+ \sum_{k=1}^m \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \phi(x) dx + f(1) \int_0^1 \phi(x) dx. \end{aligned} \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$\int_0^1 f(x) \phi(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)/n}^{i/n} f(x) \phi(x) dx. \quad (9)$$

Используя преобразование Абеля, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \int_{(k-1)/n}^{k/n} \phi(x) dx \\ = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right) \int_0^{k/n} \phi(x) dx + f(1) \int_0^1 \phi(x) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (9) и (10) легко получается (8) (см. [2]).

Лемма доказана.

2. Постановка основной задачи. Как известно, если $(\sqrt{2} \sin 2\pi nx)$ – тригонометрическая система на $[0, 1]$, то наилучшее приближение в смысле $L_2(0, 1)$ оценивается через модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ по норме $C(0, 1)$, т.е. (см. [3])

$$e_n(f) = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)\right).$$

Аналогичная оценка имеет место для системы Хаара (см., например, [4]) и Уолша (см. [5]). Если $f(x) \in C(0, 1)$, то будет иметь место

$$e_n(f) = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)\right), \quad (11)$$

где $\omega(1/n, f)$ есть модуль непрерывности по норме класса $C(0, 1)$. Из теоремы 1 вытекает, что условие (11) не имеет места для общих ортонормированных систем.

В настоящей работе найдены условия, которым должна удовлетворять ОНС, чтобы выполнялось (11).

3. Основные результаты.

ЛЕММА 2. Пусть $E_n \subset \{1, 2, \dots, n\}$, и пусть для каждого $i \in E_n$ существует $t \in ((i-1)/n, i/n)$ такое, что

$$\operatorname{sign} \int_0^t P_{ns}(x) dx \neq \operatorname{sign} \int_0^{(i-1)/n} P_{ns}(x) dx.$$

Тогда

$$\sum_{i \in E_n} \left| \int_0^{i/n} P_{ns}(x) dx \right| \leq \left(\int_0^1 P_{ns}^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения множества E_n и непрерывности интеграла $\int_0^t P_{ns}(x) dx$ имеем, что для любого $i \in E_n$ существует точка $t_{in} \in ((i-1)/n, i/n)$ такая, что

$$\int_0^{t_{in}} P_{ns}(x) dx = 0.$$

Поэтому

$$\int_0^{i/n} P_{ns}(x) dx = \int_0^{t_{in}} P_{ns}(x) dx + \int_{t_{in}}^{i/n} P_{ns}(x) dx = \int_{t_{in}}^{i/n} P_{ns}(x) dx.$$

Отсюда

$$\sum_{i \in E_n} \left| \int_0^{i/n} P_{ns}(x) dx \right| = \sum_{i \in E_n} \left| \int_{t_{in}}^{i/n} P_{ns}(x) dx \right| \leq \left(\int_0^1 P_{ns}^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Лемма 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если в лемме 2 $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$, то

$$B_{ns} = \sum_{i=1}^{n-1} \left| \int_0^{i/n} P_{ns}(x) dx \right| \leq \left(\int_0^1 P_{ns}^2(x) dx \right)^{1/2} \leq e_n.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть ОНС $(\varphi_n(x))$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \varphi_n(x) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Следующие условия эквивалентны:

а) существует абсолютная константа $c_1 > 0$ такая, что неравенство

$$e_n(f) \leq c_1 \omega\left(\frac{1}{n}, f\right)$$

имеет место для любой функции $f(x) \in C(0, 1)$ и для любого натурального n ;

б) существует абсолютная константа $c_2 > 0$ такая, что неравенство

$$B_{ns} \leq c_2 e_n$$

имеет место для любой последовательности $(a_k) \in \ell_2$ и для любых натуральных n и s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняется условие б) и покажем, что выполняется а). В самом деле, если

$$\widehat{\varphi}_n(f) = \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx,$$

то

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+s} \widehat{\varphi}_k^2(f) &= \sum_{k=n}^{n+s} \widehat{\varphi}_k(f) \int_0^1 f(x) \varphi_k(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) \sum_{k=n}^{n+s} \widehat{\varphi}_k(f) \varphi_k(x) dx = \int_0^1 f(x) P_{ns}(x) dx. \end{aligned} \quad (12)$$

В равенстве (10) полагая $\phi(x) = P_{ns}(x)$ и учитывая, что $\int_0^1 P_{ns}(x) dx = 0$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) P_{ns}(x) dx &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(f\left(\frac{i}{n}\right) - f\left(\frac{i+1}{n}\right) \right) \int_0^{i/n} P_{ns}(x) dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)/n}^{i/n} \left(f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right) P_{ns}(x) dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Оценим первое слагаемое равенства (13). Будем иметь (см. (7))

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^{n-1} \left(f\left(\frac{i}{n}\right) - f\left(\frac{i+1}{n}\right) \right) \int_0^{i/n} P_{ns}(x) dx \right| \\ &\leq \omega\left(\frac{1}{n}, f\right) \sum_{i=1}^n \left| \int_0^{i/n} P_{ns}(x) dx \right| = B_{ns} \omega\left(\frac{1}{n}, f\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Далее, для второго слагаемого (13), используя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{n-1} \int_{(i+1)/n}^{i/n} \left(f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right) P_{ns}(x) dx \right| &\leq \omega\left(\frac{1}{n}, f\right) \int_0^1 |P_{ns}(x)| dx \\ &\leq \omega\left(\frac{1}{n}, f\right) \left(\int_0^1 P_{ns}^2(x) dx \right)^{1/2} \leq \omega\left(\frac{1}{n}, f\right) \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} = \omega\left(\frac{1}{n}, f\right) e_n. \end{aligned} \quad (15)$$

Учитывая в (13) оценки (14) и (15), имеем

$$\left| \int_0^1 f(x) P_{ns}(x) dx \right| \leq \omega\left(\frac{1}{n}, f\right) B_{ns} + \omega\left(\frac{1}{n}, f\right) e_n. \quad (16)$$

В силу b)

$$B_{ns} \leq c_2 \cdot e_n.$$

Поэтому из (16) будем иметь

$$\left| \int_0^1 f(x) P_{ns}(x) dx \right| \leq (c_2 + 1) \omega\left(\frac{1}{n}, f\right) e_n. \quad (17)$$

Теперь из (12) и (17) получаем

$$\sum_{k=n}^{n+s} \widehat{\varphi}_k^2(f) \leq (c+1) \omega\left(\frac{1}{n}, f\right) e_n. \quad (18)$$

В нашем случае, так как $P_{ns} = \sum_{k=n}^{n+s} \widehat{\varphi}_k(f) \varphi_k(x)$, то $e_n = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \widehat{\varphi}_k^2(f) \right)^{1/2}$. Таким образом, из (18) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} \widehat{\varphi}_k^2(f) &\leq (c_2 + 1) \omega\left(\frac{1}{n}, f\right) \left(\sum_{k=n}^{\infty} \widehat{\varphi}_k^2(f) \right)^{1/2}, \\ \left(\sum_{k=n}^{\infty} \widehat{\varphi}_k^2(f) \right)^{1/2} &\leq (c_2 + 1) \omega\left(\frac{1}{n}, f\right). \end{aligned}$$

Условие а) теоремы 2 доказано.

Пусть теперь выполнено а) и покажем справедливость б). Допустим противное, т.е. выполнено а) и не выполнено б). Это означает, что для каждого натурального q существуют последовательности чисел $a^{(q)} \equiv (a_k^{(q)}) \in \ell_2$ и натуральных чисел n_q и s_q такие, что

$$\frac{B_{n_q s_q}(a^{(q)})}{e_{n_q}(a^{(q)})} \geq q,$$

где $B_{n_q s_q}(a^{(q)})$ и $e_{n_q}(a^{(q)})$ есть соответственно $B_{n_q s_q}$ и e_{n_q} относительно числовой последовательности $a^{(q)}$ (см. (4) и (7)).

Отсюда имеем, что

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{B_{n_q s_q}(a^{(q)})}{e_{n_q}(a^{(q)})} = +\infty.$$

Из последнего условия и из следствия леммы 2 следует, что

$$F_{n_q} = \{1, 2, \dots, n_q\} \setminus E_{n_q} \neq \emptyset.$$

Введем обозначения $B_{n_q s_q}(a^{(q)}) \equiv B_q$, $e_{n_q}(a^{(q)}) \equiv h_q$ и $P_{n_q s_q}(x) = P_q(x)$. Тогда

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{B_q}{h_q} = +\infty. \quad (19)$$

Рассмотрим теперь последовательность функций

$$f_q(x) = \int_0^x \left(\operatorname{sign} \int_0^t P_q(x) dx \right) dt, \quad q = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\|f_q\|_{\operatorname{Lip} 1} = \sup_{x, y \in [0, 1]} \frac{|f_q(x) - f_q(y)|}{|x - y|} + \|f_q\|_C \leq 2. \quad (20)$$

Таким образом, последовательность $(f_q(x))$ ограничена по норме пространства $\operatorname{Lip} 1$.

В равенстве (12) положим $f(x) = f_q(x)$, $n = n_q$ и $P_{ns}(x) = P_q(x)$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_q(x) P_q(x) dx &= \sum_{i=1}^{n_q-1} \left(f_q\left(\frac{i}{n_q}\right) - f_q\left(\frac{i+1}{n_q}\right) \right) \int_0^{i/n_q} P_q(x) dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n_q} \int_{(i-1)/n_q}^{i/n_q} \left(f_q(x) - f_q\left(\frac{i}{n_q}\right) \right) P_{n_q}(x) dx. \end{aligned} \quad (21)$$

В силу определения функций $f(x)$, когда $i \in F_{n_q}$ (см. лемма 2), будем иметь

$$f_q\left(\frac{i}{n_q}\right) - f_q\left(\frac{i+1}{n_q}\right) = -\frac{1}{n_q} \operatorname{sign} \int_0^{i/n_q} P_q(x) dx,$$

а если $i \in E_{n_q}$, то

$$\left| f_q\left(\frac{i}{n_q}\right) - f_q\left(\frac{i+1}{n_q}\right) \right| \leq \frac{1}{n_q}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n_q-1} \left(f_q\left(\frac{i}{n_q}\right) - f_q\left(\frac{i+1}{n_q}\right) \right) \int_0^{i/n_q} P_q(x) dx \\ &= -\frac{1}{n_q} \sum_{i \in F_{n_q}} \left| \int_0^{i/n_q} P_q(x) dx \right| + \sum_{i \in E_{n_q}} \left(f_q\left(\frac{i}{n_q}\right) - f_q\left(\frac{i+1}{n_q}\right) \right) \int_0^{i/n_q} P_q(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда в силу утверждения леммы 2 получаем

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^{n_q-1} \left(f_q\left(\frac{i}{n_q}\right) - f_q\left(\frac{i+1}{n_q}\right) \right) \int_0^{i/n_q} P_q(x) dx \right| \\ &\geq \frac{1}{n_q} \sum_{i=1}^{n_q-1} \left| \int_0^{i/n_q} P_q(x) dx \right| - 2 \sum_{i \in E_{n_q}} \left| f_q\left(\frac{i}{n_q}\right) - f_q\left(\frac{i+1}{n_q}\right) \right| \left| \int_0^{i/n_q} P_q(x) dx \right| \\ &\geq \frac{1}{n_q} B_q - \frac{2}{n_q} \left(\int_0^1 P_q^2(x) dx \right)^{1/2} > \frac{B_q}{n_q} - \frac{2h_q}{n_q}. \end{aligned} \quad (22)$$

Теперь оценим второе слагаемое равенства (21). Учитывая, что

$$\left| f_q(x) - f_q\left(\frac{1}{n_q}\right) \right| \leq \frac{1}{n_q}$$

при $x \in [(i-1)/n_q, i/n_q]$ и $i = 1, 2, \dots, n_q$, получим

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^{n_q} \int_{(i-1)/n_q}^{i/n_q} \left(f_q(x) - f_q\left(\frac{i}{n_q}\right) \right) P_q(x) dx \right| \\ & \leq \frac{1}{n_q} \sum_{i=1}^{n_q} \int_{(i-1)/n_q}^{i/n_q} |P_q(x)| dx \leq \frac{1}{n_q} \left(\int_0^1 P_{n_q}^2(x) dx \right)^{1/2} \leq \frac{h_q}{n_q}. \end{aligned} \quad (23)$$

Далее из (21)–(23) следует

$$\left| \int_0^1 f_q(x) P_q(x) dx \right| \geq \frac{B_q}{n_q} - \frac{3h_q}{n_q}.$$

Отсюда

$$\frac{n_q}{h_q} \left| \int_0^1 f_q(x) P_q(x) dx \right| \geq \frac{B_q}{n_q} - 3,$$

поэтому в силу (19) имеем

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{n_q}{h_q} \left| \int_0^1 f_q(x) P_{n_q}(x) dx \right| = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{B_q}{n_q} = +\infty.$$

В силу теоремы Банаха–Штейнгауза существует функция $f_0(x) \in \text{Lip } 1$ такая, что

$$\overline{\lim}_{q \rightarrow \infty} \frac{n_q}{h_q} \left| \int_0^1 f_0(x) P_q(x) dx \right| = +\infty. \quad (24)$$

Таким образом (см. (6)),

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f_0(x) P_q(x) dx \right| &= \left| \sum_{k=n_q}^{n_q+s+q} a_k^{(q)} \int_0^1 f_0(x) \varphi_k(x) dx \right| \leq \left| \sum_{k=n_q}^{n_q+s+q} a_k^{(q)} \hat{\varphi}_k(f_0) \right| \\ &\leq \left(\sum_{k=n_q}^{n_q+s+q} (a_k^{(q)})^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=n_q}^{n_q+s+q} \hat{\varphi}_k^2(f_0) \right)^{1/2} \leq h_q \cdot e_{n_q}(f_0). \end{aligned} \quad (25)$$

Следовательно, так как $f_0(x) \in \text{Lip } 1$, то (см. (25))

$$\frac{n_q}{h_q} \left| \int_0^1 f_q(x) P_q(x) dx \right| \leq \frac{e_{n_q}(f_0)}{1/n_q} \leq M \frac{e_{n_q}(f_0)}{\omega(1/n_q, f_0)},$$

где $M > 0$ не зависит от q .

Наконец из (24) следует

$$\overline{\lim}_{q \rightarrow \infty} \frac{e_{n_q}(f_0)}{\omega(1/n_q, f_0)} = +\infty,$$

что противоречит условию а).

Теорема 2 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие теоремы 2 $B_n = O(e_n)$ можно заменить интегральным условием

$$n \int_0^1 \left| \int_0^x P_{ns}(t) dt \right| dx = O(e_n). \quad (26)$$

В самом деле, в силу теоремы о среднем будем иметь

$$\begin{aligned} n \int_0^1 \left| \int_0^x P_{ns}(t) dt \right| dx &= n \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)/n}^{i/n} \left| \int_0^x P_{ns}(t) dt \right| dx \\ &= n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \int_0^{x_{in}} P_{ns}(t) dt \right| = \sum_{i=1}^n \left| \int_0^{x_{in}} P_{ns}(t) dt \right|. \end{aligned} \quad (27)$$

Так как

$$\left| \int_0^{i/n} P_{ns}(t) dt \right| \leq \left| \int_0^{x_{in}} P_{ns}(t) dt \right| + \int_{x_{in}}^{i/n} |P_{ns}(t)| dt,$$

то (см. (27))

$$\begin{aligned} B_{ns} &= \sum_{i=1}^n \left| \int_0^{i/n} P_{ns}(t) dt \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \int_0^{x_{in}} P_{ns}(t) dt \right| + \sum_{i=1}^n \int_{x_{in}}^{i/n} |P_{ns}(t)| dt \\ &\leq n \int_0^1 \left| \int_0^x P_{ns}(t) dt \right| dx + \int_0^1 |P_{ns}(t)| dt \leq n \int_0^1 \left| \int_0^x P_{ns}(t) dt \right| dx + e_n. \end{aligned}$$

Следовательно, из (26) получается, что

$$B_{ns} = O(e_n).$$

Легко можно также доказать, что

$$n \int_0^1 \left| \int_0^x |P_{ns}(t)| dt \right| dx = O(B_{ns}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теореме 2 условие $\int_0^1 \varphi_n(x) dx = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) не гарантирует, что

$$e_n(t) = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)\right)$$

для любой функции из $C(0, 1)$.

В самом деле, пусть $\chi_n(x)$ – последовательность функций Хаара. Тогда для функции $f(x) = x$ (см. [4]) имеем

$$\widehat{\chi}_{2^n+k}(f) = 2^{n/2} \int_{(2k-2)/2^{n+1}}^{(2k-1)/2^{n+1}} \left(x - x - \frac{1}{2^{n+1}} \right) = -\frac{1}{4} \cdot 2^{-3n/2} \quad \text{при } 1 \leq k < 2^n.$$

Предположим, что

$$\phi_{2^{2n}}(x) = \chi_{2^{n+1}}(x).$$

Тогда при $f_0(x) = x$

$$\widehat{\phi}_{2^{2n}}(x) = \int_0^1 x \phi_{2^{2n}}(x) dx = \int_0^1 x \chi_{2^{n+1}}(x) dx = -\frac{1}{4} 2^{-3n/2}.$$

Таким образом,

$$e_{2^{2^n}}(f_0) = \left(\sum_{k=2^{2^n}}^{\infty} \widehat{\phi}_k^2(f_0) \right)^{1/2} > \frac{1}{4} 2^{-3n/2}.$$

Следовательно, неравенство

$$e_{2^{2^n}}(f_0) < c \cdot \omega\left(\frac{1}{2^{2^n}}, f_0\right) = c \cdot 2^{-2^n}$$

не имеет места, хотя

$$\int_0^1 \phi_{2^{2^n}}(x) dx = \int_0^1 \chi_{2^{2^n}+1}(x) dx = 0$$

при $n = 1, 2, \dots$.

ТЕОРЕМА 3. Из любой ОНС $(\varphi_n(x))$ с $\int_0^1 \varphi_n(x) dx = 0$, $n = 1, 2, \dots$, можно выделить подсистему $\psi_k(x) = \varphi_{n_k}(x)$ такую, что

$$e_n(f) = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)\right)$$

для любой функции $f(x) \in C(0, 1)$, где

$$e_n(f) = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \widehat{\psi}_k^2(f) \right)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неравенства Бесселя

$$M_i = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{i/k} \varphi_n(x) dx \right)^2 \leq 1$$

для любого k и $i = 1, 2, \dots, k$. Таким образом, для любого фиксированного k и $i \in \{1, \dots, k\}$ можно найти натуральное число $m(i, k)$ такое, что

$$\sum_{n=m(i, k)}^{\infty} \left(\int_0^{i/k} \varphi_n(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{k^2}.$$

Пусть $m_k = \max_{1 \leq i \leq k} m(i, k)$. Тогда

$$\sum_{n=m_k}^{\infty} \left(\int_0^{i/k} \varphi_n(x) dx \right)^2 < \frac{1}{k^2} \quad (28)$$

для любого $i = 1, 2, \dots, k$.

Отсюда при любом $i = 1, 2, \dots, k$

$$\left| \int_0^{i/k} \varphi_{m_k}(x) dx \right| < \frac{1}{k}.$$

Положим

$$\psi_k(x) = \varphi_{m_k}(x).$$

Затем подобным образом построим

$$\psi_{k+1}(x) = \varphi_{m_{k+1}}(x) \quad \text{при} \quad m_{k+1} > m_k.$$

Таким образом получим подсистему $(\psi_k(x))$.

Теперь из (28) следует, что для любого s

$$\sum_{n=k}^{k+s} \left(\int_0^{i/k} \psi_n(x) dx \right)^2 < \frac{1}{k^2} \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Следовательно, если $(a_k) \in \ell_2$ – любая последовательность, то

$$\begin{aligned} B_{ks} &= \sum_{i=1}^{k-1} \left| \int_0^{i/k} \sum_{n=k}^{k+s} a_n \psi_n(x) dx \right| \\ &\leq \left(\sum_{n=k}^{k+s} a_n^2 \right)^{1/2} \sum_{i=1}^{k-1} \left(\sum_{n=k}^{k+s} \left(\int_0^{i/k} \psi_n(x) dx \right)^2 \right)^{1/2} \leq e_k \cdot \sum_{i=1}^k \frac{1}{k} = e_k. \end{aligned}$$

Таким образом $(k, s = 1, 2, \dots)$,

$$B_{ks} < e_k$$

для любой последовательности $(a_m) \in \ell_2$. Отсюда в силу теоремы 2 имеем, что для любой функции $f(x) \in C(0, 1)$ соблюдается условие

$$e_k(f) \leq d \left(\omega \left(\frac{1}{n}, f \right) \right),$$

где $d > 0$ – абсолютная константа.

Теорема 3 доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть (φ_n) – ОНС на $[0, 1]$ с $\int_0^1 \varphi_n(x) dx = 0$ и для любой последовательности $(a_n) \in \ell_2$ соблюдается условие

$$B_{ns} \leq c \cdot e_n.$$

Если $f(x) \in C(0, 1)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega(1/n, f)}{\sqrt{n}} < \infty, \tag{29}$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{\varphi}_n(f)| < +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия теоремы 4 и теоремы 2 следует, что

$$e_n(f) \leq c \cdot \omega \left(\frac{1}{n}, f \right). \tag{30}$$

Используя (30), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{\varphi}_n(f)| &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} |\widehat{\varphi}_k(f)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} \left(\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \widehat{\varphi}_k^2(f) \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} e_{2^n} \leq c \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} \omega(2^{-n}, f). \end{aligned}$$

В силу (29) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{\varphi}_n(f)| = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} \omega(2^{-n}, f) < +\infty.$$

Теорема 4 доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда если $f(x) \in \text{Lip } \alpha$, $\alpha \in (0, 1]$ и $\beta > 2/(1 + 2\alpha)$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{\varphi}_n(f)|^\beta < +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\beta < 2$ и применим неравенство Гёльдера

$$\begin{aligned} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} |\widehat{\varphi}_k(f)|^\beta &\leq 2^{n(1-\beta/2)} \left(\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \widehat{\varphi}_k^2(f) \right)^{\beta/2} < 2^{n(1-\beta/2)} (e_n(f))^\beta \\ &\leq c_\beta 2^{n(1-\beta/2)} (\omega(2^{-n}, f))^\beta < c_{1,\beta} 2^{n(1-\beta/2)} \cdot 2^{-n\alpha\beta} = c_{1,\beta} 2^{n(1-\beta/2-\alpha\beta)}. \end{aligned}$$

Так как $\beta > 2/(1 + 2\alpha)$, то $\gamma = 1 - \beta/2 - \alpha\beta < 0$ ($c_\beta > 0$ и $c_{1,\beta} > 0$ не зависят от n). Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(f)|^\beta \leq c_{1,\beta} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n\gamma} < +\infty.$$

Теорема 5 доказана.

4. Вопросы эффективности условия теоремы 2. Пусть (χ_n) – система Хаара (см. [4]) и $(a_n) \in \ell_2$ – любая последовательность чисел. Рассмотрим

$$P_{ns}(x) = \sum_{m=n}^{n+s} a_m \chi_m(x).$$

Тогда

$$B_{ns} = \sum_{k=1}^{n-1} \left| \int_0^{k/n} P_{ns}(x) dx \right|.$$

Поэтому, если $n = 2^p + q$ ($1 \leq q \leq 2^p$) и M_k – натуральные числа такие, что

$$0 < \frac{k}{n} - \frac{M_k}{2^{p+1}} \leq \frac{1}{2^{p+1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

то

$$B_{ns} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left| \int_0^{M_k/2^{p+1}} P_{ns}(x) dx \right| + \sum_{k=1}^{n-1} \left| \int_{M_k/2^{p+1}}^{k/n} P_{ns}(x) dx \right|. \quad (31)$$

Так как множества $(M_k/2^{p+1}, k/n)$ не пересекаются относительно k , то

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left| \int_{M_k/2^{p+1}}^{k/n} P_{ns}(x) dx \right| \leq \int_0^1 |P_{ns}(x)| dx \leq \left(\int_0^1 P_{ns}^2(x) dx \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{m=n}^{\infty} a_m^2 \right)^{1/2} = e_n. \quad (32)$$

Потом при $n + s \geq 2^{p+1}$ имеется

$$\int_0^{M_k/2^{p+1}} \sum_{m=2^{p+1}}^{n+s} a_m \chi_m(x) dx = 0. \quad (33)$$

С другой стороны, принимая во внимание тот факт, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left| \int_0^{M_k/2^{p+1}} \chi_m(x) dx \right| < \frac{2}{\sqrt{m}},$$

получаем ($n = 2^p + q$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \left| \int_0^{M_k/2^{p+1}} \sum_{m=n}^{2^{p+1}} a_m \chi_m(x) dx \right| &\leq \sum_{m=n}^{2^{p+1}} |a_m| \sum_{k=1}^{n-1} \left| \int_0^{M_k/2^{p+1}} \chi_m(x) dx \right| \\ &\leq 2 \sum_{m=n}^{2^{p+1}} |a_m| \frac{1}{\sqrt{m}} \leq 2 \left(\sum_{m=n}^{2^{p+1}} a_m^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=n}^{2^{p+1}} \frac{1}{m} \right)^{1/2} \leq 2e_n \cdot (2^{p+1} - 2^p) \frac{1}{2^p} = e_n. \end{aligned} \quad (34)$$

Наконец, учитывая (32)–(34), из (31) получаем, что

$$B_{ns} \leq 2e_n.$$

Таким образом, проверяется, что для системы Хаара выполнены условия теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А.М. Олевский, “Об ортогональных рядах по полным системам”, *Матем. сб.*, **58:2** (1962), 707–748.
- [2] V. Tsagareishvili, “Estimated of Fourier coefficients”, *Georgian Math. J.*, **10:2** (2003), 363–379.
- [3] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Мир, М., 1965.
- [4] Б.И. Голубов, “О рядах Фурье непрерывных функций по системе Хаара”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28:6** (1964), 1271–1296.
- [5] N. J. Fine, “On the Walsh functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65** (1949), 372–414.

Л. Гоголадзе

Тбилисский государственный университет

им. И. Джавахишвили

E-mail: lgogoladze1@hotmail.com

Поступило

27.12.2010

Исправленный вариант

17.02.2011

В. Цагарейшвили

Тбилисский государственный университет

им. И. Джавахишвили

E-mail: cagare@ymail.com