Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. А. Латушкин, В. Н. Ушаков, О представлении чисел Фибоначчи и Люка в виде суммы трех квадратов, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 5, 711–719

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9359>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 15:28:27

О представлении чисел Фибоначчи и Люка в виде суммы трех квадратов

Я. А. Латушкин, В. Н. Ушаков

Изучается вопрос о представлении чисел Фибоначчи и чисел Люка в виде суммы трех квадратов целых чисел. Получено описание всех чисел, допускающих такое представление.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. В работе изучается вопрос о представлении элементов последовательностей чисел Фибоначчи

$$\{F_k\}_{k=0}^{\infty}, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = F_2 = 1, \quad F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

и чисел Люка

$$\{L_k\}_{k=0}^{\infty}, \quad L_0 = 2, \quad L_1 = 1, \quad L_{k+2} = L_{k+1} + L_k, \quad k \in \mathbb{Z}^+,$$

в виде суммы трех квадратов целых чисел; здесь $\mathbb{Z}^+$ – множество целых неотрицательных чисел.

Этот вопрос относится к серии вопросов о представимости чисел Фибоначчи и Люка в виде суммы (n) квадратов целых чисел. При $n = 1$ решение вопроса для чисел Фибоначчи было получено относительно недавно, во второй половине XX в. [1]: только числа $F_0 = 0$, $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{12} = 144$ являются квадратами целых чисел. Таким образом, пересечение двух числовых последовательностей – $\{F_k\}_{k=0}^{\infty}$ и последовательности квадратов целых чисел является множеством весьма бедным – $\{0, 1, 144\}$. С другой стороны, как известно [2], [3], любое число $m \in \mathbb{Z}^+$ представимо в виде суммы четырех квадратов целых чисел. Следовательно, последовательность сумм четырех квадратов целых чисел поглощает последовательность $\{F_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Нетривиален вопрос о представлении последовательностей чисел Фибоначчи и Люка и в промежуточных случаях $n = 2, 3$. Поскольку $F_{2k+1} = F_k^2 + F_{k+1}^2$, $k \in \mathbb{Z}^+$, то пересечение последовательности $\{F_k\}_{k=0}^{\infty}$ и последовательности сумм двух квадратов целых чисел представляет собой бесконечную последовательность. В то же время числа F_{6k+4} , $k \in \mathbb{Z}^+$, не представимы в виде суммы двух квадратов целых

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-64508.2010.1).

чисел, поскольку $F_{6k+4} \equiv 3 \pmod{4}$. Следовательно, далеко не все числа вида F_{2k} , $k \in \mathbb{Z}^+$, представимы в виде суммы двух квадратов. Эти факты подтверждают нетривиальность вопроса о представлении чисел F_k в виде суммы двух квадратов целых чисел. Вопрос о представимости чисел L_k , $k \in \mathbb{Z}^+$ в виде суммы двух квадратов также нетривиален.

В настоящей заметке изучен более простой случай $n = 3$. Здесь выясняется, какие числа F_k и L_k , $k \in \mathbb{Z}^+$, не представимы в виде суммы трех квадратов целых чисел. Выделив эти числа F_k и L_k , мы, тем самым, выясним, какие числа F_k и L_k , $k \in \mathbb{Z}^+$, представимы в виде суммы трех квадратов. Основу для такого выяснения составляет следующий хорошо известный факт.

ТЕОРЕМА 1.1 [2]. Число $z \in \mathbb{Z}^+$ не представимо в виде суммы трех квадратов целых чисел тогда и только тогда, когда

$$z = 4^a(8k + 7), \quad a \in \mathbb{Z}^+, \quad k \in \mathbb{Z}^+. \quad (1.1)$$

Первое доказательство этого факта дал Лежандр, который по ходу доказательства предполагал, что любая арифметическая прогрессия $a, a + d, a + 2d, \dots$, где $(a, d) = 1$, содержит бесконечно много простых чисел. Этот факт впервые в 1837 г. обосновал Дирихле. Гаусс в своих “Арифметических исследованиях” дал полное доказательство теоремы 1.1.

Для выяснения того, какие числа F_k и L_k , $k \in \mathbb{Z}^+$, представимы в виде суммы трех квадратов, достаточно выделить все F_k и L_k , которые представимы в виде (1.1).

2. Некоторые свойства последовательностей Фибоначчи и Люка. В этом пункте укажем некоторые свойства последовательностей чисел Фибоначчи и чисел Люка, которые будут использованы в последующих пунктах.

Известно [4], [5], что члены последовательностей $\{F_k\}_{k=0}^\infty$, $\{L_k\}_{k=0}^\infty$ могут быть представлены формулами

$$F_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}}, \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.1)$$

$$L_k = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k, \quad k \in \mathbb{Z}^+. \quad (2.2)$$

Следующее свойство можно найти, например, в [6].

СВОЙСТВО 2.1. Имеем $F_{2k} = L_k F_k$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

Из свойства 2.1 следует свойство

СВОЙСТВО 2.2. Имеем $F_{4k} = L_{2k} L_k F_k$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

Рассмотрим далее последовательность $\{G_k\}_{k=0}^\infty$ вычетов чисел F_k по модулю 128:

$$F_k \equiv G_k \pmod{128}. \quad (2.3)$$

СВОЙСТВО 2.3. 1) $\{G_k\}_{k=0}^\infty$ – периодическая последовательность с периодом 192.
2) $G_k = 112$ тогда и только тогда, когда $k = 96s + 84$, $s \in \mathbb{Z}^+$.

Таблица 1. Последовательность чисел G_n

i	G_{192k+i}	i	G_{192k+i}	i	G_{192k+i}	i	G_{192k+i}	i	G_{192k+i}	i	G_{192k+i}
1	1	33	98	65	29	97	65	129	98	161	93
2	1	34	103	66	88	98	65	130	39	162	88
3	2	35	73	67	117	99	2	131	9	163	53
4	3	36	48	68	77	100	67	132	48	164	13
5	5	37	121	69	66	101	69	133	57	165	66
6	8	38	41	70	15	102	8	134	105	166	79
7	13	39	34	71	81	103	77	135	34	167	17
8	21	40	75	72	96	104	85	136	11	168	96
9	34	41	109	73	49	105	34	137	45	169	113
10	55	42	56	74	17	106	119	138	56	170	81
11	89	43	37	75	66	107	25	139	101	171	66
12	16	44	93	76	83	108	16	140	29	172	19
13	105	45	2	77	21	109	41	141	2	173	85
14	121	46	95	78	104	110	57	142	31	174	104
15	98	47	97	79	125	111	98	143	33	175	61
16	91	48	64	80	101	112	27	144	64	176	37
17	61	49	33	81	98	113	125	145	97	177	98
18	24	50	97	82	71	114	24	146	33	178	7
19	85	51	2	83	41	115	21	147	2	179	105
20	109	52	99	84	112	116	45	148	35	180	112
21	66	53	101	85	25	117	66	149	37	181	89
22	47	54	72	86	9	118	111	150	72	182	73
23	113	55	45	87	34	119	49	151	109	183	34
24	32	56	117	88	43	120	32	152	53	184	107
25	17	57	34	89	77	121	81	153	34	185	13
26	49	58	23	90	120	122	113	154	87	186	120
27	66	59	57	91	69	123	66	155	121	187	5
28	115	60	80	92	61	124	51	156	80	188	125
29	53	61	9	93	2	125	117	157	73	189	2
30	40	62	89	94	63	126	40	158	25	190	127
31	93	63	98	95	65	127	29	159	98	191	1
32	5	64	59	96	0	128	69	160	123	192	0

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В табл. 1 выписаны все члены последовательности $\{G_k\}_{k=0}^{\infty}$. Из табл. 1 видно, что $G_{192} = G_0$, $G_{193} = G_1$, и так далее. Отсюда следует утверждение 1). Из табл. 1 также видно, что в множестве $\{G_k : k = 0, \dots, 192\}$ только G_{84} и G_{180} равны 112. Отсюда, учитывая периодичность последовательности $\{G_k\}_{k=0}^{\infty}$, получаем, что справедливо утверждение 2).

СВОЙСТВО 2.4. Тогда и только тогда $F_k = 4^2(8p+7)$, $p \in \mathbb{Z}^+$, когда $k = 4 \cdot 3 \times (8q+7)$, $q \in \mathbb{Z}^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F_k = 4^2(8p+7)$, $p \in \mathbb{Z}^+$. Тогда $G_k = 112$ и в силу свойства 2.3 имеем $k = 4 \cdot 3 \cdot (8q+7)$, $q \in \mathbb{Z}^+$. В силу того же свойства 2.3 справедливо и обратное утверждение.

Следующее общеизвестное свойство, например, тривиально следует из теорем, сформулированных в [4; пп. 13 и 35, § 2]. Также, оно очевидно следует из табл. 1, как показано в доказательстве ниже.

Свойство 2.5. *Тогда и только тогда $F_k \equiv 0 \pmod{4^3}$, когда $k \equiv 0 \pmod{48}$.*

Доказательство. Очевидно, что $F_k \equiv 0 \pmod{4^3}$ тогда и только тогда, когда $G_k \in \{0, 64\}$. Принимая во внимание свойство 2.3 (периодичность последовательности $\{G_k\}_{k=0}^\infty$ с периодом 192) и табл. 1, получаем, что $G_k \in \{0, 64\}$ тогда и только тогда, когда $k \in \{192q, 192q + 48, 192q + 96, 192q + 144, q \in \mathbb{Z}^+\}$, т.е. когда $k \equiv 0 \pmod{48}$. Свойство 2.5 доказано.

ТАБЛИЦА 2. Последовательность $\{S_k\}_{k=0}^\infty$

k	S_{24m+k}	k	S_{24m+k}
1	1	13	9
2	3	14	11
3	4	15	4
4	7	16	15
5	11	17	3
6	2	18	2
7	13	19	5
8	15	20	7
9	12	21	12
10	11	22	3
11	7	23	15
12	2	24	2

Свойство 2.6. *Тогда и только тогда $L_k \equiv 2 \pmod{16}$, когда $k \equiv 0 \pmod{6}$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{S_k\}_{k=0}^\infty$ вычетов S_k чисел L_k по модулю 16: $L_k \equiv S_k \pmod{16}$. Из табл. 2 видим, что последовательность $\{S_k\}_{k=0}^\infty$ – периодическая с периодом 24 и $S_0 = S_6 = S_{12} = S_{18} = 2$. Значит, $S_k = 2$ тогда и только тогда, когда $k \equiv 0 \pmod{6}$.

3. О представимости чисел F_k в виде суммы трех квадратов. Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть натуральное $k \equiv 0 \pmod{6}$ и $a \geq 2$ – целое число. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) $F_k = 4^a(8p + 7), \quad p \in \mathbb{Z}^+ \tag{3.1}$
- 2) $F_{4k} = 4^{a+1}(8s + 7), \quad s \in \mathbb{Z}^+. \tag{3.2}$

Доказательство. Предположим, что выполнено 1. По свойству 2.2 справедливо

$$F_{4k} = L_{2k} \cdot L_k \cdot F_k. \tag{3.3}$$

По условию леммы имеем $2k \equiv k \equiv 0 \pmod{6}$. Тогда по свойству 2.6 имеем $L_k = 16l + 2, L_{2k} = 16r + 2$, где l и r из $\mathbb{Z}^+$.

Используя (3.1) и (3.2), получаем

$$\begin{aligned} F_{4k} &= 4^a(16l+2) \cdot (16r+2) \cdot (8p+7) \\ &= 4^{a+1} \cdot (8l+1) \cdot (8r+1) \cdot (8p+7) = 4^{a+1} \cdot (8s+7), \quad \text{где } s \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Показано, что из 1) следует 2). Покажем, что из 2) следует 1).

Итак, пусть выполняется (3.2). Следовательно, справедливо равенство

$$4^{a+1}(8s+7) = L_{2k}L_kF_k = (16r+2)(16l+2)F_k,$$

где l и r из $\mathbb{Z}^+$, т.е.

$$4^a(8s+7) = (8r+1)(8l+1)F_k. \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что F_k представимо в виде

$$F_k = 4^a\gamma, \quad \gamma = \frac{8s+7}{(8r+1) \cdot (8l+1)} \in \mathbb{Z}^+. \quad (3.6)$$

Из (3.6) вытекает, что $\gamma = 8p+7$, $p \in \mathbb{Z}^+$ и, значит, F_k представимо в виде (3.1). Показано, что из 2) следует 1).

Следующее утверждение составляет один из основных результатов настоящей работы.

ТЕОРЕМА 3.1. *F_k представимо в виде суммы квадратов трех целых чисел тогда и только тогда, когда*

$$k \notin \{12l+10 : l \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{4^a \cdot 3 \cdot (8l+7) : a \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}^+\}. \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем доказательство теоремы 3.1 на несколько этапов, где каждый этап будет сформулирован в виде отдельного утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1 (случай $a = 0$). *Тогда и только тогда $F_k = 8m+7$, $m \in \mathbb{Z}^+$, когда $k = 12l+10$, $l \in \mathbb{Z}^+$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, равенство $F_k = 8m+7$, $m \in \mathbb{Z}^+$, можно записать в виде $F_k \equiv 7 \pmod{8}$. Полагаем $\Lambda_k = \text{rest } F_k \pmod{8}$. В табл. 3 выписаны члены периодической последовательности $\{\Lambda_k\}_{k=0}^\infty$.

ТАБЛИЦА 3. Периодическая последовательность $\{\Lambda_k\}_{k=0}^\infty$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Λ_{12m+k}	0	1	1	2	3	5	0	5	5	2	7	1

Из табл. 3 видно, что $\Lambda_k = 7$ тогда только тогда, когда $k = 12l+10$, $l \in \mathbb{Z}^+$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2 (случай $a = 1$). *Числа F_k не представимы в виде $F_k = 4 \times (8m+7)$, $m \in \mathbb{Z}^+$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, равенство $F_k = 4 \cdot (8m+7)$, $m \in \mathbb{Z}^+$, можно записать в виде $F_k \equiv 28 \pmod{32}$. В терминах чисел $G_k = \text{rest } F_k \pmod{128}$ это означает, что $G_k \in \{28, 60, 92, 124\}$. Как видно из табл. 1, последовательность $\{G_k\}_{k=0}^\infty$ не содержит элементов множества $\{28, 60, 92, 124\}$. Отсюда следует, что в $\{F_k\}_{k=0}^\infty$ отсутствуют члены вида $4 \cdot (8m+7)$, $m \in \mathbb{Z}^+$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3 (случай $a \geq 2$). Тогда и только тогда $F_k = 4^a \cdot (8p + 7)$, $p \in \mathbb{Z}^+$, когда $k = 4^{a-1} \cdot 3 \cdot (8m + 7)$, $m \in \mathbb{Z}^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $a = 2$ утверждение 3.3 представляет собой свойство 2.4, доказанное ранее.

Доказательство достаточности утверждения 3.3 проведем методом индукции.

База индукции: $a = 2$.

Шаг индукции. Зафиксируем $b \geq 2$.

Считаем, что для $a = b$ достаточность утверждения 3.3 доказана. Докажем достаточность для $a = b + 1$.

Имеем: если $k = 4^{b-1} \cdot 3 \cdot (8m + 7)$, $m \in \mathbb{Z}^+$, то $F_k = 4^b(8p + 7)$, $p \in \mathbb{Z}^+$. Пусть $k' = 4k = 4^b \cdot 3 \cdot (8m + 7)$, $m \in \mathbb{Z}^+$, представимо в виде $k' = 4k$, где $k = 4^{b-1} \cdot 3 \cdot (8m + 7)$. По лемме 3.1 имеем $F_{k'} = 4^{b+1} \cdot (8s + 7)$, $s \in \mathbb{Z}^+$. Достаточность утверждения 3.3 доказана.

Докажем необходимость утверждения 3.3 методом от противного. Пусть существуют такие целые числа

$$a_1 \geq 2, \quad k_1 \notin \{4^{a_1-1} \cdot 3 \cdot (8m + 7), m \in \mathbb{Z}^+\}, \quad (3.8)$$

при которых справедливо равенство

$$F_{k_1} = 4^{a_1} \cdot (8m_1 + 7), \quad m_1 \in \mathbb{Z}^+. \quad (3.9)$$

Принимая во внимание свойство 2.4, имеем $a_1 > 2$. В силу равенства (3.9) имеем, что $F_{k_1} \equiv 0 \pmod{4^3}$. Тогда по свойству 2.5 справедливо равенство $k_1 \equiv 0 \pmod{48}$ и, значит, $k_2 = k_1/4 \in \mathbb{Z}^+$. Согласно лемме 3.1 получаем

$$F_{k_2} = 4^{a_2} \cdot (8m_2 + 7), \quad m_2 \in \mathbb{Z}^+, \quad (3.10)$$

$$k_2 \notin \{4^{a_2-1} \cdot 3 \cdot (8m + 7) : m \in \mathbb{Z}^+\}, \quad (3.11)$$

где $a_2 = a_1 - 1$.

Таким образом, уменьшив a_1 на единицу и k_1 в четыре раза, мы пришли к соотношениям (3.10), (3.11), аналогичным соотношениям (3.8), (3.9). Проводя далее аналогичные рассуждения, получим новую пару целых чисел $a_3 = a_2 - 1$, $k_3 = k_2/4$ и так далее, до тех пор, пока не получим пару

$$a_r = 2, \quad k_r \notin \{4^{a_r-1} \cdot 3 \cdot (8m + 7) : m \in \mathbb{Z}^+\}, \quad (3.12)$$

для которой справедливо равенство

$$F_{k_r} = \{4^{a_r} \cdot (8m_r + 7) : m_r \in \mathbb{Z}^+\}. \quad (3.13)$$

Соотношения (3.12), (3.13) противоречат свойству 2.4.

Итак, предположив при доказательстве необходимости утверждения 3.3 противное и применив традиционный в теории чисел метод спуска, мы пришли к противоречию в случае $a_1 > 2$. Тем самым необходимость утверждения 3.3 доказана и доказано вместе с тем само утверждение 3.3.

Сводя вместе утверждения 3.1–3.3 получаем, что справедливо следующее утверждение

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4. F_k представимо в виде $4^a \cdot (8l + 7)$, а u и t из $\mathbb{Z}^+$, тогда и только тогда, когда

$$a = 0, \quad k \in \{12l + 10 : l \in \mathbb{Z}^+\}$$

или

$$a \geq 2, \quad k \in \{4^{a-1} \cdot 3 \cdot (8l + 7) : l \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Из теоремы 1.1 и утверждения 3.4 следует теорема 3.1.

4. Примеры представлений чисел F_k в виде суммы трех квадратов. Теорему 3.1 дополним некоторыми рассуждениями, относящимися к представлению чисел F_k в виде суммы трех квадратов целых чисел.

Для этого разобьем множество $\mathbb{N}$ на четыре класса (по mod 4)

$$\mathbb{K}_i = \{n \in \mathbb{N} : n \equiv i \pmod{4}\}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Нетрудно показать, что для чисел n из классов $\mathbb{K}_1$ и $\mathbb{K}_3$ т.е. для $n = 4k + 1$ и $n = 4k + 3$, $k \in \mathbb{Z}^+$ справедливы представления

$$F_{4k+1} = F_{2k}^2 + (2F_k \cdot F_{k+1})^2 + (F_{k-1} \cdot F_{k+2})^2, \quad (4.1)$$

$$F_{4k+3} = F_{2k+2}^2 + (2F_k \cdot F_{k+1})^2 + (F_{k-1} \cdot F_{k+2})^2. \quad (4.2)$$

Принимая во внимание эти равенства, а также равенства $F_{4k+1} = F_{2k}^2 + F_{2k+1}^2$ и $F_{4k+3} = F_{2k+1}^2 + F_{2k+2}^2$, получаем, что для всех чисел F_{4k+1} и F_{4k+3} , $k \in \mathbb{Z}^+$, представление в виде суммы трех квадратов не однозначно.

Таким образом, для всех F_n с номерами n из $\mathbb{K}_1$ и $\mathbb{K}_3$ ответ на вопрос о представимости в виде суммы трех квадратов единообразен.

Как мы видим из теоремы 3.1, такое единообразие нарушается в случае чисел F_n с номерами n из $\mathbb{K}_0$ и $\mathbb{K}_2$. Выясним подробнее, как распределяются в $\mathbb{K}_0$ и $\mathbb{K}_2$ те n , которым отвечают F_n , не представимые в виде суммы трех квадратов, и n , которым отвечают F_n , представимые в виде суммы трех квадратов.

Рассмотрим числа $n = 4k$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

Если $k = 4^{a-1} \cdot 3 \cdot (8l + 7)$, $a \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}^+$, то $n = 4^a \cdot 3 \cdot (8l + 7)$ и, значит, по теореме 3.1, F_n не представимо в виде суммы трех квадратов.

Если же $k \neq 4^{a-1} \cdot 3 \cdot (8l + 7)$, $a \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}^+$, то $n = 4k \neq 4^a \cdot 3 \cdot (8l + 7)$, $a \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}^+$.

Учитывая также, что $n = 4k \neq 12l + 10$, $l \in \mathbb{Z}^+$, получаем следующее: если $n \in \mathbb{K}_0$ ($n = 4k$) удовлетворяет соотношению $k \neq 4^{a-1} \cdot 3 \cdot (8l + 7)$, $a \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}^+$, то F_n представимо в виде суммы трех квадратов целых чисел.

Рассмотрим числа $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

Если $k = 3l + 2$, $l \in \mathbb{Z}^+$, то $n = 12l + 10$, $l \in \mathbb{Z}^+$ и, значит, F_n не представимо в виде суммы трех квадратов.

Если же $k \neq 3l + 2$, $l \in \mathbb{Z}^+$, то $n \neq 12l + 10$, $l \in \mathbb{Z}^+$; кроме того, $4k + 2 \neq 4^a \cdot 3 \cdot (8l + 7)$, $a \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}^+$. Следовательно,

$$n \notin \{12l + 10 : l \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{4^a \cdot 3 \cdot (8l + 7) : l \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Значит, получаем следующее: если $n \in \mathbb{K}_2$ ($n = 4k + 2$) удовлетворяет соотношению $k \neq 3l + 2$, то F_n представимо в виде суммы трех квадратов целых чисел.

5. О представлении чисел L_k в виде суммы трех квадратов. В предыдущем пункте мы рассмотрели вопрос о представимости чисел F_k в виде суммы трех квадратов целых чисел. В этом пункте рассмотрим аналогичный вопрос о представимости чисел L_k .

Справедливо следующее утверждение, составляющее один из основных результатов настоящей работы.

ТЕОРЕМА 5.1. *Число L_k представимо в виде суммы трех квадратов целых чисел тогда и только тогда, когда*

$$k \notin \{(24m + l) : m \in \mathbb{Z}^+, l \in \{4, 8, 11, 16, 20, 21, 23\}\}. \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем доказательство теоремы 5.1 на несколько этапов, которые будут сформулированы в виде отдельных утверждений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1 (случай $a = 0$). L_k представимо в виде $L_k = 8p + 7$, $p \in \mathbb{Z}^+$, тогда и только тогда, когда $k \in \{12q + l : q \in \mathbb{Z}^+, l \in \{4, 8, 11\}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, равенство $L_k = 8p + 7$, $p \in \mathbb{Z}^+$ означает, что $S_k \in \{7, 15\}$. В табл. 2 выписаны члены периодической последовательности $\{S_k\}_{k=0}^\infty$. Из табл. 2 видно, что включение $S_k \in \{7, 15\}$ выполняется только при $k \in \{12q + l : q \in \mathbb{Z}^+, l \in \{4, 8, 11\}\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.2 (случай $a = 1$). L_k представимо в виде $L_k = 4 \cdot (8p + 7)$, $p \in \mathbb{Z}^+$, тогда и только тогда, когда $k \in \{3 \cdot (8q + 7) : q \in \mathbb{Z}^+\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, равенство $L_k = 4 \cdot (8p + 7)$, $p \in \mathbb{Z}^+$ можно записать в виде $L_k \equiv 28 \pmod{32}$. Из табл. 2 видим, что соотношению $L_k \equiv 28 \pmod{32}$ удовлетворяют числа L_{12q+9} , $q \in \mathbb{Z}^+$. Рассмотрим правильную подпоследовательность $\{H_q\}_{q=0}^\infty$ (см. [7]) последовательности $\{L_k\}_{k=0}^\infty$, заданную равенством

$$H_q = L_{12q+9}, \quad q \in \mathbb{Z}^+.$$

Для $\{H_q\}_{q=0}^\infty$ справедливо следующее рекуррентное соотношение (см. [7]):

$$H_{k+2} = L_{12}H_{k+1} - H_k = 322 \cdot H_{k+1} - H_k.$$

Начальные элементы H_0 и H_1 последовательности $\{H_q\}_{q=0}^\infty$ определяются равенствами

$$H_0 = L_9 \equiv 12 \pmod{32}, \quad H_1 = L_{21} \equiv 28 \pmod{32}.$$

Далее, легко доказывается по индукции, что при $k \in \mathbb{Z}^+$ справедливы соотношения

$$H_{2k} \equiv 12 \pmod{32}, \quad H_{2k+1} \equiv 28 \pmod{32}.$$

Таким, образом, имеем

$$H_{2k+1} = L_{24k+21} \equiv 28 \pmod{32}. \quad (5.2)$$

Учитывая, что числа Люка, отличные от $H_q = L_{12q+9}$, не представимы в виде $4 \cdot (8p + 7)$, а также принимая во внимание (5.2), получаем, что справедливо утверждение 5.2.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.3 (случай $a \geq 2$). Числа L_k не представимы в виде $L_k = 4^a \times (8p + 7)$, $p \in \mathbb{Z}^+$, $a \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из табл. 2 мы видим, что ни одно число L_k не делится на 16. Отсюда следует утверждение 5.3.

Сводя утверждения 5.1, 5.2, 5.3, получаем, что справедливо следующее утверждение

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.4. L_k представимо в виде $4^a(8p + 7)$, а и p из $\mathbb{Z}^+$, тогда и только тогда, когда $k \in \{(24m + l) : m \in \mathbb{Z}^+, l \in \{4, 8, 11, 16, 20, 21, 23\}\}$.

Из теоремы 1.1 и утверждения 5.4 следует теорема 5.1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. H. E. Cohn, "On square Fibonacci numbers", *J. London Math. Soc.* (1), **39** (1964), 537–540.
- [2] Г. Дэвенпорт, *Высшая арифметика. Введение в теорию чисел*, Наука, М., 1965.
- [3] Г. Хассе, *Лекции по теории чисел*, ИЛ, М., 1953.
- [4] Н. Н. Воробьев, *Числа Фибоначчи*, Популярная лекция по математике, **6**, Наука, М., 1978.
- [5] A. F. Horadam, "Basic properties of a certain generalized sequence of numbers", *Fibonacci Quart.*, **3** (1965), 161–176.
- [6] *Fibonacci Numbers and the Golden Section*, <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/>.
- [7] Ya. Latushkin, V. Ushakov, "A representation of regular subsequences of recurrent sequences", *Fibonacci Quart.*, **43**:1 (2005), 70–84.

Я. А. Латушкин

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург

E-mail: yarlatush@yahoo.com

Поступило

24.05.2010

В. Н. Ушаков

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург

E-mail: ushak@imm.uran.ru

Исправленный вариант

22.11.2010