Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Горбачев, Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 2, 179–187

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm936>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:26:43

УДК 517.5

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО СФЕРИЧЕСКОГО ТИПА

Д. В. Горбачев

Рассматриваются экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа, связанные с важными экстремальными задачами об оптимальной точке (точке Черныха) в точном неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ и связи между кодами и дизайнами на торе T^n .

Библиография: 17 названий.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $xy = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ – скалярное произведение векторов x, y , $|x| = \sqrt{xx}$ – длина вектора x , $B_r^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$ – шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$ с центром в нуле;

$$L_p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\} \quad (1 \leq p \leq \infty);$$

для $\nu \in \mathbb{R}^n$

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\nu x} dx$$

– преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ [1], [2].

Пусть E^{nR} – множество целых функций $f(z)$ ($z \in \mathbb{C}^n$) экспоненциального сферического типа, не превосходящего числа $R \geq 0$ [1, гл. 3]. Последнее означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A_\varepsilon > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}^n \quad |f(z)| \leq A_\varepsilon e^{(R+\varepsilon)|z|} \quad (|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}).$$

При этом под *типом* функции $f(z)$ понимается точная нижняя грань чисел $d > 0$, для которых выполняется неравенство $|f(z)| \leq A_d e^{d|z|}$ (для всех $z \in \mathbb{C}^n$, $A_d > 0$).

Положим $E_p^{nR} = E^{nR} \cap L_p(\mathbb{R}^n)$. Известно [1, с. 120], что для любой функции $f \in E_1^{nR}$ ($R > 0$) преобразование Фурье $\widehat{f}(\nu)$ непрерывно и имеет носитель в шаре B_R^n ($\text{supp } \widehat{f} \subset B_R^n$) и, более того, как следует, например, из [2, с. 19], $f(z) = (2\pi)^{-n} \int_{B_R^n} \widehat{f}(\nu) e^{i\nu z} d\nu$.

Данная статья посвящена решению двух экстремальных задач для целых функций из E_1^{nR} .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00318, и Минобразования, грант № 97-0-1.4-78.

ЗАДАЧА 1. Пусть $R > 0$. Обозначим

$$F^{nR} = \left\{ f \in E_1^{nR} : f(x)|_{x \in \mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}, \widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \geq 0 \right\},$$

$$\lambda(f) = \sup\{|x| : x \in \mathbb{R}^n, f(x) > 0\} \quad (f \in F^{nR}).$$

Найти величину

$$\Lambda_n(R) = \Lambda(F^{nR}) = \inf\{\lambda(f) : f \in F^{nR}, f \neq 0\}.$$

При $n = 1$ эта задача была поставлена (в несколько иной форме) и решена Логаном [3] ($\Lambda_1(R) = \pi/R$). Этот же результат вытекает из более ранних работ Черныха [4], [5]. Величина $\Lambda_3(R) = 2\pi/R$ найдена Московским [6]. При $n > 1$ в случае функций экспоненциального типа $(R, \dots, R) \in \mathbb{R}_+^n$ (т.е. удовлетворяющих условию $|f(z)| \leq A_\varepsilon e^{(R+\varepsilon)(|z_1|+\dots+|z_n|)}$, $\text{supp } \widehat{f} \subset [-R, R]^n$ [1, гл. 3]) точное решение аналогичной задачи (равное $\pi\sqrt{n}/R$) получено Бердышевой [7].

Пусть $\alpha = (n-2)/2$, $j_\alpha(u) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) u^{-\alpha} J_\alpha(u)$ – нормированная функция Бесселя ($j_\alpha(0) = 1$), $J_\alpha(u)$ – функция Бесселя [8, гл. 7]. Обозначим через $0 < q_{\alpha 1} < q_{\alpha 2} < \dots$ положительные нули $J_\alpha(u)$.

ТЕОРЕМА 1. Если $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = (n-2)/2$, $R > 0$, то

$$\Lambda_n(R) = \frac{2q_{\alpha 1}}{R}.$$

Экстремальной функцией является функция Черныха–Юдина

$$F_R(x) = \frac{j_\alpha^2(R|x|/2)}{1 - R^2|x|^2/(2q_{\alpha 1})^2} \in F^{nR}.$$

Доказательство будет приведено ниже.

Задача 1 оказалась тесно связанной с важной экстремальной задачей об оптимальной точке в точном неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$. Пусть $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$,

$$E_R(f, \mathbb{R}^n)_2 = \inf_{g \in E_2^{nR}} \|f - g\|_2$$

– величина наилучшего приближения порядка $R > 0$ функции $f(x)$; для $\delta > 0$ обозначим

$$\omega(\delta, f, \mathbb{R}^n)_2 = \sup_{|h| \leq \delta} \|f(x+h) - f(x)\|_2$$

– модуль непрерывности функции $f(x)$,

$$D(\delta, R, \mathbb{R}^n)_2 = \sup_{\substack{f \in L_2(\mathbb{R}^n) \\ f \neq 0}} \frac{E_R(f, \mathbb{R}^n)_2}{\omega(\delta, f, \mathbb{R}^n)_2}$$

– точная константа Джексона. Тогда [6], [9] $D(\delta, R, \mathbb{R}^n)_2$ не возрастает по δ и $D(\delta, R, \mathbb{R}^n)_2 \geq 1/\sqrt{2}$ для всех $\delta, R > 0$, причем $D(2q_{\alpha 1}/R, R, \mathbb{R}^n)_2 = 1/\sqrt{2}$, $D(q_{\alpha 1}/R, R, \mathbb{R}^n)_2 > 1/\sqrt{2}$. Точка

$$\tau_n(R) = \inf \left\{ \delta > 0 : D(\delta, R, \mathbb{R}^n)_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

называется *оптимальной точкой* в точном неравенстве Джексона или *точкой Черныха*. Бердышева показала [7], что $\tau_n(R) = \Lambda(F^{nR})$. Таким образом, из теоремы 1 следует, что

$$\tau_n(R) = \frac{2q_{\alpha 1}}{R}.$$

ЗАДАЧА 2. Пусть $R > 0$. Обозначим

$$G^{nR} = \{f \in E_1^{nR} : f(x)|_{x \in \mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}, \hat{f}(0) = 0, \hat{f}(\nu) \geq 0 \quad (\nu \in \mathbb{R}^n)\},$$

$$\sigma(f) = \sup\{|x| : x \in \mathbb{R}^n, f(x) < 0\} = \lambda(-f) \quad (f \in G^{nR}).$$

Найти величину

$$\Sigma_n(R) = \Sigma(G^{nR}) = \inf\{\sigma(f) : f \in G^{nR}, f \neq 0\}.$$

Эта задача возникла под влиянием работы Юдина [10], где установлена связь между кодами и дизайнами на торе $T^n = [-\pi, \pi]^n$ (здесь несколько изменены обозначения [10]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Конечное множество $W \subset T^n$ называется:

1) δ -кодом, если

$$d(W) = \min\{|x - y|_{T^n} : x, y \in W, x \neq y\} = \delta \quad (\delta \in (0, \pi\sqrt{n}]),$$

где $|x - y|_{T^n} = \min_{\nu \in \mathbb{Z}^n} |x - y + 2\pi\nu|$ – метрика на торе;

2) шаровым дизайном порядка $R = R(W)$, если $R > 0$ – наибольшее число, при котором кубатурная формула

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} t(x) dx = \frac{1}{|W|} \sum_{u \in W} t(u)$$

точна для любого тригонометрического полинома

$$t(x) = \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ |\nu| < R}} c_\nu e^{i\nu x}$$

со спектром в шаре B_R^n .

Основным результатом [10] является оценка

$$d(W)R(W) \leq 2q_{\alpha 2} \quad \left(\forall W \subset T^n, R(W) > \frac{2q_{\alpha 2}}{\pi\sqrt{n}} \right). \quad (1)$$

Она получена на пути решения экстремальной задачи построения тригонометрического полинома $t(x)$ со спектром в B_R^n , неотрицательного при $|x| \geq \delta$ ($x \in T^n$), у которого $c_0 = 0$, $c_\nu \geq 0$ и δ – наименьшее. Эта задача трудная (и не решена), поэтому в [10] строится тригонометрический полином с “достаточно малым” δ . Для этого по сути решается задача 2, т.е. ищется функция $f(x)$ из G^{nR} (в [10] функция $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } \hat{f} \subset B_R^n$, $\hat{f}(0) = 0$, $\hat{f} \geq 0$), которая неотрицательна при $|x| \geq \delta$ ($x \in \mathbb{R}^n$) с наименьшим δ . После этого в качестве “хорошего” тригонометрического полинома $t(x)$ используется периодизация $f(x)$, т.е. $t(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} f(x + 2\pi\nu)$. В [10] предлагается функция

$$G_R(x) = \frac{j_\alpha^2(R|x|/2)}{(1 - R^2|x|^2/(2q_{\alpha 1})^2)(1 - R^2|x|^2/(2q_{\alpha 2})^2)} \in L_1(\mathbb{R}^n)$$

с $\delta = 2q_{\alpha 2}/R$ (отсюда как раз следует оценка (1)), для которой установлено, что $\text{supp } \hat{G}_R \subset B_R^n$, $\hat{G}_R(0) = 0$, $\hat{G}_R \geq 0$, т.е. $G_R \in G^{nR}$. При этом известно [11], [10], что в одномерном случае δ , равное $3\pi/R$ на всем классе G^{1R} , уменьшить нельзя, т.е. по сути решена задача 2 и $\Sigma_1(R) = 3\pi/R$. Следующий результат показывает, что и при $n > 1$ величину δ равную $2q_{\alpha 2}/R$ уменьшить нельзя и $G_R(x)$ – наилучшая (экстремальная) функция.

ТЕОРЕМА 2. Если $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = (n - 2)/2$, $R > 0$, то

$$\Sigma_n(R) = \frac{2q_{\alpha 2}}{R}.$$

Экстремальной функцией является функция Юдина

$$G_R(x) = \frac{j_\alpha^2(R|x|/2)}{(1 - R^2|x|^2/(2q_{\alpha 1})^2)(1 - R^2|x|^2/(2q_{\alpha 2})^2)} \in G^{nR}.$$

Доказательство будет приведено ниже.

Нам понадобится одна теорема из [12] (см. также [13]), представляющая собой квадратурную формулу Гаусса на полуоси.

Пусть E_0^δ – множество целых четных функций $\varphi(u)$ одной комплексной переменной $u \in \mathbb{C}$ экспоненциального типа, не превосходящего числа $\delta \geq 0$ [1, гл. 3], т. е. $E_0^\delta = \{\varphi \in E^{1\delta} : \varphi(-u) = \varphi(u)\}$.

ТЕОРЕМА 3 [12]. Если $\alpha > -1$, $\tau > 0$, то для всех $\varphi \in E_0^{2\tau}$ таких, что

$$\int_0^\infty |\varphi(t)|t^{2\alpha+1} dt < \infty,$$

справедлива квадратурная формула

$$\int_0^\infty \varphi(t)t^{2\alpha+1} dt = \frac{1}{\tau^{2\alpha+2}} \sum_{k=1}^\infty \gamma_{\alpha k} \varphi\left(\frac{q_{\alpha k}}{\tau}\right),$$

где

$$\gamma_{\alpha k} = \frac{2q_{\alpha k}^{2\alpha}}{J_{\alpha+1}^2(q_{\alpha k})} > 0.$$

Пусть далее $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = (n - 2)/2$ (так что $2\alpha + 1 = n - 1$), $q_{\alpha k} = q_k$, $\gamma_{\alpha k} = \gamma_k$, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле, $\omega_{n-1} = |S^{n-1}| = 2\pi^{n/2}/(\Gamma(n/2))$ – площадь S^{n-1} [2, с. 16]. Также нам потребуется одна лемма.

ЛЕММА. Пусть $f \in E_1^{n\delta}$. Тогда функция

$$\varphi(u) = \int_{S^{n-1}} f(u\xi) d\xi \quad (u \in \mathbb{C}), \quad (2)$$

являющаяся усреднением функции $f(x)$ по сферам, удовлетворяет условиям:

- 1) $\varphi \in E_0^\delta$;
- 2) $\int_0^\infty |\varphi(t)|t^{2\alpha+1} dt \leq \|f\|_1 < \infty$;
- 3) $\int_0^\infty \varphi(t)j_\alpha(st)t^{2\alpha+1} dt = \omega_{n-1}^{-1} \int_{S^{n-1}} \hat{f}(s\nu) d\nu \quad (s \in \mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Разложим целую функцию $f(z)$ в ряд Тейлора [1, гл. 3]

$$f(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^n} f_\nu z^\nu \quad (z \in \mathbb{C}^n, \quad z^\nu = z_1^{\nu_1} \cdots z_n^{\nu_n}),$$

абсолютно сходящийся для всех z . Тогда для произвольного $u \in \mathbb{C}$

$$\varphi(u) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^n} f_\nu u^{\nu_1 + \cdots + \nu_n} \int_{S^{n-1}} \xi_1^{\nu_1} \cdots \xi_n^{\nu_n} d\xi.$$

Поскольку величина $A_\nu = \int_{S^{n-1}} \xi_1^{\nu_1} \cdots \xi_n^{\nu_n} d\xi$ равна нулю, если хотя бы одна из компонент вектора ν нечетна и $|A_\nu| \leq \omega_{n-1}$, то функцию $\varphi(u)$ можно представить в виде ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k u^{2k}$, очевидно, абсолютно сходящегося для любого u . Отсюда следует, что $\varphi(u)$ является целой четной функцией. То, что она имеет экспоненциальный тип $\leq \delta$ вытекает из того, что $f \in E^{n\delta}$, и оценки

$$|\varphi(u)| \leq \int_{S^{n-1}} |f(u\xi)| d\xi \leq \int_{S^{n-1}} A_\varepsilon e^{(\delta+\varepsilon)|u\xi|} d\xi = \omega_{n-1} A_\varepsilon e^{(\delta+\varepsilon)|u|} \\ (\forall \varepsilon > 0, \forall u \in \mathbb{C}).$$

Таким образом, $\varphi \in E_0^\delta$.

2) Воспользуемся формулой интегрирования в $\mathbb{R}^n$ [2, с. 46]

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} g(t\xi) d\xi t^{n-1} dt \quad (3)$$

и (2). Тогда

$$\int_0^\infty |\varphi(t)| t^{2\alpha+1} dt \leq \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} |f(t\xi)| d\xi t^{n-1} dt = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_1 < \infty.$$

3) Учитывая, что $\|f\|_1 < \infty$, имеем для $s \in \mathbb{R}$:

$$\int_{S^{n-1}} \widehat{f}(s\nu) d\nu = \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-is\nu x} dx d\nu = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{S^{n-1}} e^{-is\nu x} d\nu dx.$$

Известно [2, с. 176], что

$$\int_{S^{n-1}} e^{is\nu x} d\nu = \omega_{n-1} j_\alpha(s|x|). \quad (4)$$

Отсюда с помощью (2) и (3) получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \widehat{f}(s\nu) d\nu &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \omega_{n-1} j_\alpha(s|x|) dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(t\xi) \omega_{n-1} j_\alpha(st) d\xi t^{n-1} dt \\ &= \omega_{n-1} \int_0^\infty \varphi(t) j_\alpha(st) t^{2\alpha+1} dt. \end{aligned}$$

Отметим, что последний интеграл сходится равномерно по $s \in \mathbb{R}$, так как $|j_\alpha(st)| \leq 1$ для $t \in \mathbb{R}$ (см. [8, с. 23] или формулу (4)). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Отметим, что для всех $\delta, R > 0$ выполнено равенство

$$\Lambda_n(\delta R) = \frac{1}{\delta} \Lambda_n(R),$$

что сразу следует из очевидного равенства $\lambda(f(\delta x)) = \lambda(f(x))/\delta$. Поэтому достаточно доказать, что $\Lambda_n(2) = q_1$, откуда

$$\Lambda_n(R) = \frac{2}{R} \Lambda_n(2) = \frac{2q_1}{R}.$$

Покажем, что для всех $\delta \in (0, 2)$ выполнена оценка $\Lambda_n(\delta) \geq q_1$. Предположим обратное, т.е. $\Lambda_n(\delta) < q_1$. Это означает, что существует функция $f \in F^{n\delta}$, для которой $\lambda(f) < q_1$.

Рассмотрим усреднение функции $f(x)$ по сфере

$$\varphi(u) = \int_{S^{n-1}} f(u\xi) d\xi \quad (u \in \mathbb{C}).$$

Так как для $t > 0, \xi \in S^{n-1}$ выполнено неравенство $f(t\xi) \leq 0$ при $|t\xi| = t \geq \lambda(f)$, то, очевидно, и $\varphi(t) \leq 0$ при $t \geq \lambda(f)$.

В силу леммы $\varphi \in E_0^\delta, \int_0^\infty |\varphi(t)| t^{2\alpha+1} dt < \infty$ и

$$\int_0^\infty \varphi(t) t^{2\alpha+1} dt = \hat{f}(0) \geq 0$$

(последнее соотношение получено из пункта 3) леммы при $s = 0$). Отсюда, в частности, следует, что функция $\varphi \in E_0^\delta \subset E_0^2$ полностью удовлетворяет условиям теоремы 3. Применяя эту теорему к ней как к функции экспоненциального типа меньшего 2 (т.е. с $\tau = 1$), получим

$$0 \leq \int_0^\infty \varphi(t) t^{2\alpha+1} dt = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k \varphi(q_k). \quad (5)$$

Но $\varphi(t) \leq 0$ при $t \geq \lambda(f)$, а $\lambda(f) < q_1$. Поэтому (5) возможно лишь в случае, когда $\int_0^\infty \varphi(t) t^{2\alpha+1} dt = \hat{f}(0) = 0$ и целая четная функция $\varphi(u)$ имеет в точках q_k по крайней мере двойные нули.

Известно [8, с. 72, 90], что нормированная функция Бесселя $j_\alpha(u)$ является целой четной функцией экспоненциального типа 1 и имеет разложение Вейерштрасса

$$j_\alpha(u) = \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{u^2}{q_k^2}\right).$$

Таким образом, функцию $\varphi(u)$ можно представить в виде [14]

$$\varphi(u) = j_\alpha^2(u) \psi(u) \quad (\psi \not\equiv 0 - \text{целая функция}),$$

что невозможно, так как слева стоит целая функция экспоненциального типа $\delta < 2$, а справа – типа ≥ 2 . Тем самым мы пришли к противоречию.

Итак, для всех $\delta \in (0, 2)$

$$\Lambda_n(2) = \frac{\delta}{2} \Lambda_n(\delta) \geq \frac{\delta}{2} q_1,$$

откуда при $\delta \rightarrow 2$ получаем $\Lambda_n(2) \geq q_1$.

Для доказательства оценки сверху $\Lambda_n(2) \leq q_1$ достаточно взять функцию Черныха–Юдина

$$F_2(x) = \frac{j_\alpha^2(|x|)}{1 - |x|^2/q_1^2} \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

являющуюся преобразованием Фурье весовой функции Черныха–Юдина, построенной при $n = 1$ Черным [4], а при $n > 1$ – Юдиным [15] и используемой (после периодизации) при доказательстве точного неравенства Джексона в пространстве $L_2(T^n)$. Функция $F_2 \in E^{n,2}$, поскольку $j_\alpha^2(u)/(1 - u^2/q_1^2) \in E_0^2$ (см. также [1, с. 135]), $\|F_2\|_1 < \infty$ и

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_2(x) dx = \omega_{n-1} \int_0^\infty \frac{j_\alpha^2(t)}{1 - t^2/q_1^2} t^{2\alpha+1} dt = \omega_{n-1} \sum_{k=2}^\infty \gamma_k \frac{j_\alpha^2(q_k)}{1 - q_k^2/q_1^2} = 0.$$

Таким образом, функция $F_2(x)$ принадлежит классу $F^{n,2}$. Отметим, что вид этой функции угадывается из (5). Действительно, легко предположить из (5), что экстремальная функция должна получаться из целой четной функции, имеющей в точке q_1 простой нуль, а в точках q_k ($k \geq 2$) двойные нули, т. е. как раз

$$\left(1 - \frac{u^2}{q_1^2}\right) \prod_{k=2}^\infty \left(1 - \frac{u^2}{q_k^2}\right)^2 = \frac{j_\alpha^2(u)}{1 - u^2/q_1^2}.$$

Ясно, что экстремальной функцией для величины $\Lambda_n(R) = 2q_1/R$ ($R > 0$) является функция

$$F_R(x) = F_2\left(\frac{R}{2}x\right) = \frac{j_\alpha^2(R|x|/2)}{1 - R^2|x|^2/(2q_1)^2} \in F^{n,R}.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Будем постоянно использовать факты, установленные при доказательстве теоремы 1. Аналогично соотношению для величины $\Lambda_n(\delta R)$ для любых $\delta, R > 0$ выполнено равенство

$$\Sigma_n(\delta R) = \frac{1}{\delta} \Sigma_n(R),$$

поэтому достаточно доказать, что $\Sigma_n(2) = q_2$, откуда

$$\Sigma_n(R) = \frac{2}{R} \Sigma_n(2) = \frac{2q_2}{R}.$$

Покажем, что для всех $\delta \in (0, 2)$ $\Sigma_n(\delta) \geq q_2$. Предположим обратное, т. е. $\Sigma_n(\delta) < q_2$. Это означает, что существует $f \in G^{n,\delta}$, для которой $\sigma(f) < q_2$.

Как и при доказательстве теоремы 1, рассмотрим усреднение функции $f(x)$

$$\varphi(u) = \int_{S^{n-1}} f(u\xi) d\xi \quad (u \in \mathbb{C}).$$

Так как для $t > 0$, $\xi \in S^{n-1}$ выполнено неравенство $f(t\xi) \geq 0$ при $|t\xi| = t \geq \sigma(f)$, то, очевидно, и $\varphi(t) \geq 0$ при $t \geq \sigma(f)$.

Для функции $\varphi(u)$ выполняются условия:

$$\varphi \in E_0^\delta, \quad \int_0^\infty |\varphi(t)| t^{2\alpha+1} dt < \infty, \quad \int_0^\infty \varphi(t) t^{2\alpha+1} dt = \widehat{f}(0) = 0,$$

а также из пункта 3) леммы для всех $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\infty \psi_\varepsilon(t) \varphi(t) t^{2\alpha+1} dt = -\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \widehat{f}(\varepsilon\nu) d\nu \leq 0,$$

где $\psi_\varepsilon(u) = j_\alpha(\varepsilon\sigma(f)) - j_\alpha(\varepsilon u) \in E_0^\varepsilon$, $|\psi_\varepsilon(t)| \leq 2$ ($t \in \mathbb{R}$).

Далее воспользуемся идеей доказательства теоремы 3 из [16]. Возможны 3 случая: 1) $\sigma(f) \leq q_1$; 2) $\sigma(f) \in (q_1, q_2)$ и $\varphi(q_1) \geq 0$; 3) $\sigma(f) \in (q_1, q_2)$ и $\varphi(q_1) < 0$.

По теореме 3 для $\varphi \in E_0^\delta \subset E_0^2$ выполнено равенство

$$0 = \int_0^\infty \varphi(t) t^{2\alpha+1} dt = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k \varphi(q_k). \quad (6)$$

Но $\varphi(t) \geq 0$ при $t \geq \sigma(f)$ и $\varphi(q_1) \geq 0$ для случаев 1) и 2). Следовательно, целая четная функция $\varphi(u)$ имеет в точках q_k нули, причем в точках q_k ($k \geq 2$), по крайней мере, двойные. Отсюда функцию $\varphi(u)$ можно представить в виде

$$\varphi(u) = \frac{j_\alpha^2(u)}{1 - u^2/q_1^2} \psi(u) \quad (\psi \not\equiv 0 - \text{целая функция}),$$

что невозможно, так как слева стоит целая функция экспоненциального типа $\delta < 2$, а справа – типа ≥ 2 .

В случае 3) применим теорему 3 к функции $\psi_\varepsilon \varphi \in E_0^{\delta+\varepsilon} \subset E_0^2$ ($\varepsilon < 2 - \delta$):

$$0 \geq \int_0^\infty \psi_\varepsilon(t) \varphi(t) t^{2\alpha+1} dt = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k \psi_\varepsilon(q_k) \varphi(q_k). \quad (7)$$

Известно [8], что функция $j_\alpha(t)$ убывает при $0 \leq t \leq q_{\alpha+1,1}$ и $|j_\alpha(t)| \leq |j_\alpha(q_{\alpha+1,1})| < 1$ при $t \geq q_{\alpha+1,1}$, $n > 1$ (последнее вытекает из монотонного убывания последовательных максимумов функции $|j_\alpha(t)|$, равных $|j_\alpha(q_{\alpha+1,k})|$ [17]). Отсюда при достаточно малом ε следует, что $\psi_\varepsilon(q_1) < 0$ и $\psi_\varepsilon(q_k) > 0$ при $k \geq 2$. Но $\varphi(t) \geq 0$ при $t \geq \sigma(f)$, откуда для выбранного ε $\psi_\varepsilon(q_k) \varphi(q_k) \geq 0$ при $k \geq 2$ и $\psi_\varepsilon(q_1) \varphi(q_1) > 0$, что в силу (7) невозможно. Во всех трех случаях пришли к противоречию.

Итак, для всех $\delta \in (0, 2)$ выполнено неравенство

$$\Sigma_n(2) = \frac{\delta}{2} \Sigma_n(\delta) \geq \frac{\delta}{2} q_2,$$

откуда при $\delta \rightarrow 2$ получаем $\Sigma_n(2) \geq q_2$.

Формулы (6) и (7) подсказывают, что в качестве экстремальной функции для оценки $\Sigma_n(2) \leq q_2$ можно попытаться взять функцию, получаемую из целой четной функции с

простыми нулями в точках q_1 , q_2 и двойными нулями в точках q_k ($k \geq 3$), т. е. функцию Юдина

$$G_2(x) = \left(1 - \frac{|x|^2}{q_1^2}\right) \left(1 - \frac{|x|^2}{q_2^2}\right) \prod_{k=3}^{\infty} \left(1 - \frac{|x|^2}{q_k^2}\right)^2 = \frac{j_{\alpha}^2(|x|)}{(1 - |x|^2/q_1^2)(1 - |x|^2/q_2^2)} \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

которая, как уже было отмечено, принадлежит классу G^{n2} .

Для величины $\Sigma_n(R) = 2q_2/R$ ($R > 0$) экстремальной функцией является функция $G_R(x) = G_2(Rx/2) \in G^{nR}$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
- [2] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
- [3] Logan B. F. Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. II. Eventually negative functions // SIAM J. Math. Anal. 1983. V. 14. № 2. P. 253–257.
- [4] Черных Н.И. О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.
- [5] Chernykh N. I., Arestov V. V. On the L_2 -approximation of periodic functions by trigonometric polynomials // Approximation and Functions Spaces. Proc. Inter. Conf. (Gdansk, 1979). Amsterdam: North-Holland, 1981. P. 25–43.
- [6] Московский А.В. Теоремы Джексона в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$ и $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ // Изв. ТулГУ. Сер. матем., мех., информатика. 1997. Т. 3. № 1. С. 44–70.
- [7] Бердышева Е.Е. Две взаимосвязанные экстремальные задачи для целых функций многих переменных // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 3. С. 336–350.
- [8] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966.
- [9] Бабенко А.Г. Точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$ // Тр. ИММ УрО РАН. 1998. Т. 5. С. 182–198.
- [10] Юдин В.А. Расположение точек на торе и экстремальные свойства полиномов // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 453–463.
- [11] Logan B. F. Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. I. Eventually positive functions with zero integral functions // SIAM J. Math. Anal. 1983. V. 14. № 2. P. 253–257.
- [12] Grorev G. R., Rahman Q. I. A quadrature formulae with zeros of Bessel functions as nodes // Math. Comput. 1995. V. 64. P. 715–725.
- [13] Chanem R. B. Explicit quadrature formulae for entire functions of exponential type // J. Approximation Theory. 1998. V. 92. P. 267–279.
- [14] Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т. 2. М.: Наука, 1968.
- [15] Юдин В.А. Многомерная теорема Джексона в L_2 // Матем. заметки. 1981. Т. 29. № 2. С. 309–315.
- [16] Юдин В.А. Код и дизайн // Дискретная матем. 1997. Т. 9. № 2. С. 3–11.
- [17] Иванов В.И. О приближении функций в пространствах L_p // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 2. С. 15–40.