Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. П. Лукашенко, О рекурсивных разложениях мер, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 5, 720–729

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9360>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 17:08:07

О рекурсивных разложениях мер

Т. П. Лукашенко

Рассматриваются рекурсивные разложения комплексной меры по неотрицательной мере, установлены свойства разложений и условия сходимости.

Библиография: 8 названий.

1. Определения и свойства. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с мерой, где Ω – множество, Σ – алгебра (или σ -алгебра) его подмножеств, а μ – конечно (или счетно) аддитивная неотрицательная мера на Σ (подробнее см. [1; гл. III], [2; гл. 2]). Пусть $\{E_k^m\}_k$, где $k, m \in \mathbb{N}$, – конечные (не более чем счетные) системы μ -измеримых множеств конечной строго положительной меры, причем $E_k^m \cap E_l^m = \emptyset$ при $k \neq l$, а если $E_k^m \cap E_l^n \neq \emptyset$ и $m < n$, то $E_k^m \supset E_l^n$.

Пусть (Ω, Σ, ν) – пространство с комплексной мерой, где ν – ограниченная конечно (или счетно) аддитивная комплексная мера на Σ (см. [1; гл. III], [2; с. 105–107]). Рассмотрим рекурсивное разложение меры ν по мере μ по цепочке систем множеств $\{E_k^m\}_k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Рекурсивное разложение меры ν по мере μ по цепочке систем множеств $\{E_k^m\}_k$* введем так:

- 1) $r_0 = \nu$;
- 2) если для натурального m задана мера r_{m-1} , остаток приближения, и система множеств $\{E_k^m\}_k$, то полагаем

$$\hat{\nu}_k^m = \frac{r_{m-1}(E_k^m)}{\mu(E_k^m)} \quad (1)$$

для всех допустимых k и для множеств $D \in \Sigma$ полагаем меру

$$r_m(D) = r_{m-1}(D) - \sum_k \hat{\nu}_k^m \mu(D \cap E_k^m). \quad (2)$$

Коэффициенты $\hat{\nu}_k^m$ – *рекурсивные коэффициенты* меры ν по мере μ по цепочке систем множеств $\{E_k^m\}_k$, $k, m \in \mathbb{N}$, а ряд комплексных мер

$$\sigma\left(\frac{\nu}{\mu}; D\right) = \sum_m \sum_k \hat{\nu}_k^m \mu(D \cap E_k^m)$$

– *рекурсивный ряд* меры ν по мере μ по цепочке систем множеств $\{E_k^m\}_k$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00321) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3252.2010.1).

Рекурсивное разложение мер является развитием рекурсивных разложений функций из [3]. В рекурсивных разложениях имеются две существенно различающиеся схемы разложений. Можно после получения остатка r_{m-1} выбирать следующую систему множеств $\{E_k^m\}_k$ в зависимости от достигнутого результата (т.е. в зависимости от предыдущих шагов и остатка r_{m-1}) или системы и их порядок заранее фиксированы и не меняются в процессе разложения. В первой схеме имеется возможность оптимизации (в различных смыслах) процесса разложения, но отсутствует линейность разложения. Вторая схема привлекательна линейностью разложения и отсутствием усложняющего разложение алгоритма оптимизации (выбора следующей системы). В статье рассматривается последний случай, когда системы и их порядок фиксированы. Легко видеть, что в этом случае для любого числа $\alpha \in \mathbb{C}$ и любого множества $D \in \Sigma$ верно равенство $\sigma(\alpha\nu/\mu; D) = \alpha\sigma(\nu/\mu; D)$; а если (Ω, Σ, τ) также пространство с ограниченной конечно аддитивной (счетно аддитивной) комплексной мерой τ , то $\sigma((\nu + \tau)/\mu; D) = \sigma(\nu/\mu; D) + \sigma(\tau/\mu; D)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Вариацией меры ν на множестве $D \in \Sigma$ называется величина*

$$\text{var}(\nu, D) = \sup \sum_j |\nu(F_j)|,$$

где верхняя грань берется по всем конечным системам $\{F_j\}_j \subset \Sigma$ попарно непересекающихся множеств $F_j \subset D$, см. [1; гл. III, 1, с. 111], [2; с. 106].

Если все системы множеств $\{E_k^m\}_k$ конечны, то в рекурсивном ряде $\sigma(\nu/\mu; D)$ все внутренние ряды $\sum_k \hat{\nu}_k^m \mu(D \cap E_k^m)$ конечны. Счетные системы множеств могут естественно появляться в случае счетно аддитивной меры ν . В этом случае верна следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Если мера ν счетно аддитивна и система $\{E_k^m\}_k$ счетна, то для любого множества $D \in \Sigma$ ряд $\sum_k \hat{\nu}_k^m \mu(D \cap E_k^m)$ абсолютно сходится и*

$$\sum_k |\hat{\nu}_k^m \mu(D \cap E_k^m)| \leq \text{var}(r_{m-1}, \Omega) < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неотрицательности меры μ и (1) следует оценка

$$|\hat{\nu}_k^m \mu(D \cap E_k^m)| \leq |r_{m-1}(E_k^m)|.$$

Если мера r_{m-1} ограничена, то для любого $D \in \Sigma$

$$\sum_k |\hat{\nu}_k^m \mu(D \cap E_k^m)| \leq \text{var}(r_{m-1}, \Omega).$$

Отсюда, из (2) и из предположения об ограниченности меры r_{m-1} следует ограниченность меры r_m . По условию мера $r_0 = \nu$ ограничена; тогда по принципу математической индукции все меры r_m ограничены и лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При указанных условиях $\text{var}(r_m, \Omega)$ может неограниченно возрастать. Так если $\Omega = [0, 1]$, Σ состоит из всех измеримых по Лебегу подмножеств

$[0, 1]$, μ – обычная мера Лебега, а ν – неотрицательная мера Дирака, $\nu(\{0\}) = 1$, $\nu((0, 1]) = 0$, $\{E_k^m\}_k = \{[0, 2^{m-1}]\}$, то для $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$r_m([2^{-k}, 2^{-k+1}]) = -\frac{1}{2}, \quad 1 \leq k < m, \quad r_m((0, 2^{-m+1}]) = -1, \quad r_m(\{0\}) = 1,$$

$$\text{var}(r_m, \Omega) = \frac{m+3}{2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если меры μ и ν конечно (счетно) аддитивны, то конечно (счетно) аддитивны и все меры r_m , $m = 0, 1, 2, \dots$.

Действительно, $r_0 = \nu$ конечно (счетно) аддитивна, а тогда по индукции из формулы (2) (и леммы 1) следует конечная (счетная) аддитивность всех r_m , $m = 1, 2, \dots$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Частичной суммой рекурсивного ряда меры ν по мере μ с номером $n \in \mathbb{N}$ назовем меру

$$S_n\left(\frac{\nu}{\mu}; D\right) = \sum_{m=1}^n \sum_k \hat{\nu}_k^m \mu(D \cap E_k^m) = \sum_{m=1}^n (r_{m-1}(D) - r_m(D)). \quad (3)$$

Меры $S_n(\nu/\mu)$ по следствию 1 конечно (счетно) аддитивны.

Из формул (2) и (3) следует, что для $D \in \Sigma$ выполняется равенство

$$\nu(D) = r_0(D) = \sum_{m=1}^n (r_{m-1}(D) - r_m(D)) + r_n(D) = S_n\left(\frac{\nu}{\mu}; D\right) + r_n(D).$$

Отметим, что если $\mu(D) = 0$, то рекурсивный ряд меры ν по мере μ по цепочке систем множеств $\{E_k^m\}_k$ $\sigma(\nu/\mu; D) = \sum_m \sum_k \hat{\nu}_k^m \mu(E_k^m \cap D)$ тождественно нулевой и равен $\nu(D)$ только в случае, если $\nu(D) = 0$. Следовательно, не всегда рекурсивный ряд $\sigma(\nu/\mu; D)$ сходится к $\nu(D)$. Ниже будут получены условия сходимости рекурсивного ряда $\sigma(\nu/\mu; D)$ к $\nu(D)$.

2. Сходимость рекурсивного ряда.

ЛЕММА 2. Для любого множества $D \in \Sigma$, $D \subset E_k^n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n\left(\frac{\nu}{\mu}; D\right) = \frac{\nu(E_k^n)}{\mu(E_k^n)} \mu(D).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n = 1$, то по (1) и (2) имеем

$$S_1\left(\frac{\nu}{\mu}; D\right) = \hat{\nu}_k^1 \mu(D \cap E_k^1) = \frac{\nu(E_k^1)}{\mu(E_k^1)} \mu(D).$$

Если утверждение верно для $n < l$, то оно верно и для $n = l$. Действительно, если нет $E_j^{l-1} \supset D$, то $r_{l-1}(D) = r_0(D) = \nu(D)$ и по (1) и (2)

$$S_l\left(\frac{\nu}{\mu}; D\right) = \hat{\nu}_k^l \mu(D \cap E_k^l) = \frac{\nu(E_k^l)}{\mu(E_k^l)} \mu(D).$$

А если есть $E_j^{l-1} \supset D$, то по предположению меры $S_{l-1}(\nu/\mu; F) = k\mu F$ для всех $F \subset E_j^{l-1}$, $F \in \Sigma$, где $k = \nu(E_j^{l-1})/\mu(E_j^{l-1})$. По формуле (1)

$$\widehat{\nu}_k^l = \frac{r_{l-1}(E_k^l)}{\mu(E_k^l)} = \frac{\nu(E_k^l)}{\mu(E_k^l)} - k,$$

а по формуле (3)

$$S_l\left(\frac{\nu}{\mu}; D\right) = S_{l-1}\left(\frac{\nu}{\mu}; D\right) + \widehat{\nu}_k^l \mu(D) = \frac{\nu(E_k^l)}{\mu(E_k^l)} \mu(D).$$

ЛЕММА 3. Если $D \in \Sigma$, то

$$S_m\left(\frac{\nu}{\mu}; D\right) = \sum_k \frac{\nu(E_k^m)}{\mu(E_k^m)} \mu(D \cap E_k^m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $S_m(\nu/\mu; D) = \sum_k S_m(\nu/\mu; D \cap E_k^m)$, а по лемме 2

$$S_m\left(\frac{\nu}{\mu}; D \cap E_k^m\right) = \frac{\nu(E_k^m)}{\mu(E_k^m)} \mu(D \cap E_k^m),$$

утверждение леммы верно.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если множество D является конечным (не более чем счетным) объединением множеств системы $\{E_k^m\}_k$, то

$$S_m\left(\frac{\nu}{\mu}; D\right) = \nu(D).$$

Действительно, из леммы 3 видно, что для любого множества E_k^m верно равенство $S_m(\nu/\mu; E_k^m) = \nu(E_k^m)$, а тогда утверждение следствия 2 следует из конечной (счетной) аддитивности меры S_m .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Множества E_k^m имеют свойство дробления, если для всех натуральных m любое множество E_k^m является конечным (не более чем счетным) объединением множеств $E_j^{m+1} \subset E_k^m$.

ЛЕММА 4. Если множества E_k^m имеют свойство дробления, а множество $D \in \Sigma$ таково, что существует конечное (не более чем счетное) покрытие D множествами из системы $\{E_k^n\}_k$, то при $m \geq n$ верно равенство

$$\nu(D) = S_m\left(\frac{\nu}{\mu}; D\right) + \sum_k \frac{\nu(D \cap E_k^m) \mu(E_k^m \setminus D) - \nu(E_k^m \setminus D) \mu(D \cap E_k^m)}{\mu(E_k^m)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем на Σ меры $\tau(F) = \nu(F \cap D)$ и $\rho(F) = \nu(F \setminus D)$. Поскольку $\nu = \tau + \rho$, то

$$\sigma\left(\frac{\nu}{\mu}; D\right) = \sigma\left(\frac{\tau}{\mu}; D\right) + \sigma\left(\frac{\rho}{\mu}; D\right).$$

При $m \geq n$ по леммам 2 и 3

$$\begin{aligned} S_m\left(\frac{\tau}{\mu}; D\right) &= \sum_k \frac{\tau(E_k^m)}{\mu(E_k^m)} \mu(D \cap E_k^m) = \sum_k \frac{\tau(E_k^m)}{\mu(E_k^m)} (\mu(E_k^m) - \mu(E_k^m \setminus D)) \\ &= \nu(D) - \sum_k \frac{\nu(D \cap E_k^m) \mu(E_k^m \setminus D)}{\mu(E_k^m)}. \end{aligned}$$

Аналогично, при $m \geq n$ по леммам 2 и 3

$$S_m\left(\frac{\rho}{\mu}; D\right) = \sum_k \frac{\rho(E_k^m)}{\mu(E_k^m)} \mu(D \cap E_k^m) = \sum_k \frac{\nu(E_k^m \setminus D)}{\mu(E_k^m)} \mu(D \cap E_k^m).$$

Так как

$$S_m\left(\frac{\nu}{\mu}; D\right) = S_m\left(\frac{\tau}{\mu}; D\right) + S_m\left(\frac{\rho}{\mu}; D\right),$$

утверждение леммы верно.

Следствием леммы 4 является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Если множества E_k^m имеют свойство дробления, а множество $D \in \Sigma$ таково, что существует конечное (не более чем счетное) покрытие D множествами из системы $\{E_k^n\}_k$, то необходимым и достаточным условием сходимости рекурсивного разложения $\sigma(\nu/\mu; D)$ к $\nu(D)$ является равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_k \frac{\nu(D \cap E_k^m) \mu(E_k^m \setminus D) - \nu(E_k^m \setminus D) \mu(D \cap E_k^m)}{\mu(E_k^m)} = 0. \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 2. Если множества E_k^m имеют свойство дробления, а множество $D \in \Sigma$ таково, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая покрывающая D система $\{E_k^n\}_k$, что, обозначив

$$\Gamma^n = \{k : \mu(E_k^n \setminus D) \neq 0\}, \quad \Lambda^n = \{k : \mu(D \cap E_k^n) \neq 0\},$$

имеем оценки

$$\sum_{k \in \Gamma^n} \text{var}(\nu, D \cap E_k^n) < \varepsilon, \quad \sum_{k \in \Lambda^n} \text{var}(\nu, E_k^n \setminus D) < \varepsilon,$$

то рекурсивное разложение $\sigma(\nu/\mu; D)$ сходится к $\nu(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $m \geq n$ и $\mu(E_k^m \setminus D) \neq 0$, то найдется $E_j^n \supset E_k^m$ с $j \in \Gamma^n$. Используя неравенство

$$\left| \frac{\nu(D \cap E_k^m) \mu(E_k^m \setminus D)}{\mu(E_k^m)} \right| \leq |\nu(D \cap E_k^m)|,$$

получаем оценку

$$\sum_k \left| \frac{\nu(D \cap E_k^m) \mu(E_k^m \setminus D)}{\mu(E_k^m)} \right| \leq \sum_{k \in \Gamma^n} \text{var}(\nu, D \cap E_k^n) < \varepsilon.$$

А если $m \geq n$ и $\mu(D \cap E_k^m) \neq 0$, то найдется $E_j^n \supset E_k^m$ с $j \in \Lambda^n$. Используя неравенство

$$\left| \frac{\nu(E_k^m \setminus D)\mu(D \cap E_k^m)}{\mu(E_k^m)} \right| \leq |\nu(E_k^m \setminus D)|,$$

получаем оценку

$$\sum_k \left| \frac{\nu(E_k^m \setminus D)\mu(D \cap E_k^m)}{\mu(E_k^m)} \right| \leq \sum_{k \in \Lambda^n} \text{var}(\nu, E_k^n \setminus D) < \varepsilon.$$

Значит, выполнено (4) и утверждение теоремы верно.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если множества E_k^m имеют свойство дробления, а множество $D \in \Sigma$ таково, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая покрывающая D система $\{E_k^n\}_k$, что, обозначив

$$\Gamma^n = \{k : D \cap E_k^n \neq \emptyset\}, \quad \Lambda^n = \{k : E_k^n \setminus D \neq \emptyset\},$$

имеем оценки

$$\sum_{k \in \Gamma^n} \text{var}(\nu, E_k^n \setminus D) < \varepsilon, \quad \sum_{k \in \Lambda^n} \text{var}(\nu, E_k^n \cap D) < \varepsilon,$$

то рекурсивное разложение $\sigma(\nu/\mu; D)$ сходится к $\nu(D)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если множества E_k^m имеют свойство дробления, а множество $D \in \Sigma$ таково, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая покрывающая D система $\{E_k^n\}_k$, что, обозначив

$$\Gamma^n = \{k : D \cap E_k^n \neq \emptyset \text{ и } E_k^n \setminus D \neq \emptyset\},$$

имеем оценку

$$\sum_{k \in \Gamma^n} \text{var}(\nu, E_k^n) < \varepsilon,$$

то рекурсивное разложение $\sigma(\nu/\mu; D)$ сходится к $\nu(D)$.

Действительно, если $D \cap E_k^n = \emptyset$ или $E_k^n \setminus D = \emptyset$, то

$$|\nu(D \cap E_k^m)\mu(E_k^m \setminus D)| = 0, \quad |\nu(E_k^m \setminus D)\mu(D \cap E_k^m)| = 0.$$

Значит, выполняется условие следствия 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если, определив меру ν на всех множествах E_k^m , распространять ее по схеме Жордана (см. [2; с. 296], [4; с. 69, 70, 101]), то утверждение следствия 2 означает, что на ν -измеримых по Жордану множествах рекурсивное разложение $\sigma(\nu/\mu; D)$ сходится к $\nu(D)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $D \in \Sigma$ и $\mu(D) < \delta$, то $\text{var}(\nu, D) < \varepsilon$ (см. [1; гл. III, 4, определение 12, с. 146]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В [2; с. 150] и в [4; с. 372] дано другое в случае счетно аддитивных мер эквивалентное определение абсолютной непрерывности, см. [1; гл. III, 4, лемма 13, с. 147].

ЛЕММА 5. Если множества E_k^m имеют свойство дробления, а множество $D \in \Sigma$ таково, что для любого $\delta > 0$ найдутся система $\{E_j^n\}_j$, конечный (не более чем счетный) набор множеств которой покрывает D , и такая ее конечная (не более чем счетная) подсистема $\{E_j^n\}_{j \in J}$, что

$$\mu\left(D \triangle \bigsqcup_{j \in J} E_j^n\right) < \delta,$$

где $\triangle$ обозначает симметричную разность множеств, а мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ , то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $M \in \mathbb{N}$, что для любого натурального $m > M$

$$\sum_k \frac{|\nu(D \cap E_k^m)|\mu(E_k^m \setminus D) + |\nu(E_k^m \setminus D)|\mu(D \cap E_k^m)}{\mu(E_k^m)} < \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и найдем такое $0 < \delta < 1$, $\delta \operatorname{var}(\nu, \Omega) < \varepsilon$, что

$$\text{если } F \in \Sigma, \quad \mu(F) < \delta, \quad \text{то } \operatorname{var}(\nu, F) < \varepsilon. \quad (5)$$

Для множества D найдем такую систему $\{E_j^n\}_j$, конечный (не более чем счетный) набор множеств которой покрывает D , и такую ее конечную (не более чем счетную) подсистему $\{E_j^n\}_{j \in J}$, что

$$\mu\left(D \triangle \bigsqcup_{j \in J} E_j^n\right) < \delta^2. \quad (6)$$

Пусть $m \geq n$ и $\Lambda^m = \{k : E_k^m \subset \bigsqcup_{j \in J} E_j^n\}$. Тогда

$$\sum_{k \in \Lambda^m} \mu(E_k^m \setminus D) \leq \mu\left(\bigsqcup_{j \in J} (E_j^n \setminus D)\right) < \delta^2$$

и, значит,

$$\sum_{k \in \Lambda^m} |\nu(E_k^m \setminus D)| \leq \operatorname{var}\left(\nu, \bigsqcup_{j \in J} E_j^n \setminus D\right) < \varepsilon.$$

Используя неравенство

$$\left| \frac{\nu(E_k^m \setminus D)\mu(D \cap E_k^m)}{\mu(E_k^m)} \right| \leq |\nu(E_k^m \setminus D)|,$$

получаем оценку

$$\sum_{k \in \Lambda^m} \left| \frac{\nu(E_k^m \setminus D)\mu(D \cap E_k^m)}{\mu(E_k^m)} \right| < \varepsilon. \quad (7)$$

Если $k \notin \Lambda^m$, то $D \cap E_k^m \subset D \setminus \bigsqcup_{j \in J} E_j^n$ и

$$\sum_{k \notin \Lambda^m} \mu(D \cap E_k^m) \leq \mu\left(D \setminus \bigsqcup_{j \in J} E_j^n\right) < \delta^2. \quad (8)$$

Введем обозначения:

$$\Gamma^m = \{k \notin \Lambda^m : \mu(D \cap E_k^m) < \delta \mu(E_k^m)\}, \quad \Phi^m = \{k \notin \Lambda^m : \mu(D \cap E_k^m) \geq \delta \mu(E_k^m)\}.$$

Тогда

$$\sum_{k \in \Gamma^m} \left| \frac{\nu(E_k^m \setminus D) \mu(D \cap E_k^m)}{\mu(E_k^m)} \right| < \delta \sum_{k \in \Gamma^m} |\nu(E_k^m \setminus D)| \leq \delta \operatorname{var}(\nu, \Omega) < \varepsilon. \quad (9)$$

Из (8) и (5) следует, что

$$\sum_{k \in \Phi^m} \mu(E_k^m) \leq \frac{1}{\delta} \sum_{k \in \Phi^m} \mu(D \cap E_k^m) < \delta, \quad \sum_{k \in \Phi^m} \operatorname{var}(\nu, E_k^m) < \varepsilon.$$

Тогда

$$\sum_{k \in \Phi^m} \left| \frac{\nu(E_k^m \setminus D) \mu(D \cap E_k^m)}{\mu(E_k^m)} \right| \leq \sum_{k \in \Phi^m} |\nu(E_k^m \setminus D)| \leq \sum_{k \in \Phi^m} \operatorname{var}(\nu, E_k^m) < \varepsilon. \quad (10)$$

Из (7), (9) и (10) следует, что

$$\sum_k \left| \frac{\nu(E_k^m \setminus D) \mu(D \cap E_k^m)}{\mu(E_k^m)} \right| < 3\varepsilon. \quad (11)$$

Введем обозначения:

$$\Lambda_1^m = \{k \in \Lambda^m : \mu(E_k^m \setminus D) < \delta \mu(E_k^m)\}, \quad \Lambda_2^m = \{k \in \Lambda^m : \mu(E_k^m \setminus D) \geq \delta \mu(E_k^m)\}.$$

Тогда

$$\sum_{k \in \Lambda_1^m} \left| \frac{\nu(D \cap E_k^m) \mu(E_k^m \setminus D)}{\mu(E_k^m)} \right| < \delta \sum_{k \in \Lambda_1^m} |\nu(D \cap E_k^m)| \leq \delta \operatorname{var}(\nu, \Omega) < \varepsilon. \quad (12)$$

Из (6) следует, что

$$\sum_{k \in \Lambda_2^m} \mu(E_k^m) \leq \frac{1}{\delta} \sum_{k \in \Lambda^m} \mu(E_k^m \setminus D) < \delta$$

и, значит,

$$\sum_{k \in \Lambda_2^m} \operatorname{var}(\nu, E_k^m) < \varepsilon.$$

Следовательно, верна оценка

$$\sum_{k \in \Lambda_2^m} \left| \frac{\nu(D \cap E_k^m) \mu(E_k^m \setminus D)}{\mu(E_k^m)} \right| \leq \sum_{k \in \Lambda_2^m} \operatorname{var}(\nu, E_k^m) < \varepsilon. \quad (13)$$

Если $k \notin \Lambda^m$, т.е. $E_k^m \not\subset \bigsqcup_{j \in J} E_j^n$, то $D \cap E_k^m \subset D \setminus \bigsqcup_{j \in \Lambda} E_j^n$ и по (5) и (6)

$$\operatorname{var}\left(\nu, \bigsqcup_{j \notin \Lambda^m} D \cap E_j^m\right) < \varepsilon.$$

Следовательно, верна оценка

$$\sum_{k \notin \Lambda^m} \left| \frac{\nu(D \cap E_k^m) \mu(E_k^m \setminus D)}{\mu(E_k^m)} \right| \leq \sum_{k \notin \Lambda^m} |\nu(D \cap E_k^m)| < \varepsilon. \quad (14)$$

Из (12)–(14) следует, что

$$\sum_k \left| \frac{\nu(D \cap E_k^m) \mu(E_k^m \setminus D)}{\mu(E_k^m)} \right| < 3\varepsilon. \quad (15)$$

Из (11) и (15) получаем оценку

$$\sum_k \frac{|\nu(D \cap E_k^m)| \mu(E_k^m \setminus D) + |\nu(E_k^m \setminus D)| \mu(D \cap E_k^m)}{\mu(E_k^m)} < 6\varepsilon.$$

Константа 6 не существенна (ведь можно предварительно уменьшить ε в 6 раз) и, значит, утверждение леммы верно.

Следствием леммы 5 и теоремы 1 является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Если множества E_k^m имеют свойство дробления, а множество $D \in \Sigma$ таково, что для любого $\delta > 0$ найдутся система $\{E_k^n\}_k$, конечный (не более чем счетный) набор множеств которой покрывает D , и такая ее конечная (не более чем счетная) подсистема $\{E_k^n\}_{k \in \Lambda}$, что

$$\mu \left(D \triangle \bigcup_{k \in \Lambda} E_k^n \right) < \delta,$$

где $\triangle$ обозначает симметричную разность множеств, а мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ , то рекурсивное разложение $\sigma(\nu/\mu; D)$ сходится к $\nu(D)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Другое доказательство теоремы 3 можно получить, используя теорему Радона–Никодима (см. [1; гл. III, 10, теоремы 2 и 7, с. 194, 199], [2; с. 152], [4; с. 372]) и теорему 4 из [3] о сходимости рекурсивных разложений функций в пространствах L^p , $1 \leq p < \infty$.

Часть изложенных результатов была анонсирована в [5]–[8].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*. Т. 1. *Общая теория*, ИЛ, М., 1962.
- [2] В. И. Богачев, О. Г. Смолянов, *Действительный и функциональный анализ: университетский курс*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, М.–Ижевск, 2009.
- [3] Т. П. Лукашенко, В. А. Садовничий, “О рекурсивных разложениях по цепочке систем”, *Докл. РАН*, **425**:6 (2009), 741–746.
- [4] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 2004.
- [5] Т. П. Лукашенко, “О рекурсивных разложениях функций и мер”, *Современные проблемы теории функций и их приложения*, Материалы 15-й Саратовской зимней школы, посвященной 125-летию со дня рождения В. В. Голубева и 100-летию СГУ, Изд-во Саратовск. ун-та, Саратов, 2010, 102–105.

- [6] Т. П. Лукашенко, “О рекурсивных разложениях мер”, *Современные проблемы анализа и преподавания математики*, Материалы международной научной конференции, посвященной 105-летию академика С. М. Никольского, Изд-во ЦПИ при мех.-матем. ф-те МГУ, М., 2010, 27.
- [7] Т. П. Лукашенко, “Рекурсивные разложения мер”, *XVIII международная конференция “Математика. Экономика. Образование”*, VI международный симпозиум “Ряды Фурье и их приложения”. Междисциплинарный семинар “Информационно-коммуникационные технологии”, Тезисы докладов, Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2010, 19.
- [8] Т. П. Лукашенко, “Рекурсивные разложения мер”, *Международная конференция “Метрическая геометрия поверхностей и многогранников”*, посвященная 100-летию со дня рождения Николая Владимировича Ефимова, Сборник тезисов, МАКС Пресс, М., 2010, 89.

Т. П. Лукашенко

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: lukashenko@mail.ru

Поступило

13.10.2010