Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Белев, Н. А. Тюрин, Подъемы лагранжевых торов,
Матем. заметки, 2012, том 91, выпуск 5, 784–786

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9363>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 17:48:50

Подъемы лагранжевых торов

С. А. Белёв, Н. А. Тюрин

В настоящей работе мы продолжаем исследования лагранжевой геометрии компактных симплектических многообразий, обладающих псевдоторической структурой. В отличие от [1], где строились лагранжевы слоения с гладким общим слоем, ниже мы занимаемся задачей построения лагранжевых торов.

Напомним, *псевдоторической структурой* на компактном симплектическом многообразии (X, ω_X) вещественной размерности $2n$ называется набор данных $(f_1, \dots, f_k, B, \psi, Y)$, состоящий из набора гладких морсовских функций f_i , алгебраически не зависящих почти всюду на X и попарно коммутирующих, и семейства симплектических подмногообразий $\{Q_p = \psi^{-1}(p) = \psi^{-1}(p) \cup B, p \in Y\}$ вещественной размерности $2k$ с базисным множеством $B \subset X$, параметризуемого торическим симплектическим многообразием (Y, ω_Y) вещественной размерности $2(n - k)$, так что выполнены следующие обобщенные коммутационные соотношения. Во-первых, гамильтонов поток, индуцируемый каждой f_i , сохраняет каждый элемент семейства Q_p ; во-вторых, для любой гладкой функции $h \in C^\infty(Y, \mathbb{R})$ поднятое посредством симплектической связности ∇_ψ гамильтоново векторное поле X_h коллинеарно гамильтонову векторному полю поднятой функции ψ^*h всюду на $X \setminus B$, т.е.

$$\nabla_\psi X_h \wedge X_{\psi^*h} \equiv 0 \quad (*)$$

для любой $h \in C^\infty(Y, \mathbb{R})$ (детали определения см. [2]). Слой Q_p , гладкий вне базисного множества B , мы называем *регулярным*. Псевдоторическую структуру $(f_1, \dots, f_k, B, \psi, Y)$ с регулярным общим слоем мы называем *регулярной*. Для регулярной псевдоторической структуры множество точек $p \in Y$, параметризующих нерегулярные слои, составляет подмногообразие $D_{\text{Sing}} \subset Y$. Отображение вещественными интегралами $F = (f_1, \dots, f_k): X \rightarrow \mathbb{R}^k$ определяет выпуклый многогранник $P_Q \subset \mathbb{R}^k$, изоморфный многограннику моментов торического многообразия $(Q_p, (f_1, \dots, f_k))$ для общего $p \in Y$, так что $F(B) = \partial P_Q$; особенности нерегулярных слоев $\text{Sing}_\psi \subset X \setminus B$ составляют подмножество в детерминантах $\Delta(f_1, \dots, f_k) = \{df_1 \wedge \dots \wedge df_k = 0\} \subset X$, причем во всех известных на сегодняшний день примерах $\Delta(f_1, \dots, f_k) = B \cup \text{Sing}_\psi$. Образ $F(\text{Sing}_\psi) = P_{\text{Sing}} \subset P_Q$ есть подмножество коразмерности 1 в многограннике P_Q , состоящее из пересечений P_Q с некоторыми гиперплоскостями $\pi_1, \dots, \pi_m \subset \mathbb{R}^k$. При этом нерегулярный слой $Q_p, p \in D_{\text{Sing}}$ есть приводимое многообразие, каждая компонента которого сама по себе является торическим многообразием, многогранник моментов которого получается отрезанием поднабором гиперплоскостей π_i соответствующей части от P_Q . Таким образом, для регулярного слоя Q_p прообразом внутренней точки $F^{-1}(x) \cap Q_p, x \in P_Q \setminus \partial P_Q$, будет гладкий лагранжев k -мерный тор; для нерегулярного слоя Q_p прообразом точки $F^{-1}(x) \cap Q_p, x \in P_Q \setminus (\partial P_Q \cup P_{\text{Sing}})$, снова будет гладкий k -мерный тор, но если $x \in P_{\text{Sing}}$, то прообразом будет сингулярный тор специального вида (подробности в [1], [2]).

ПРИМЕР. Реализуем многообразие флагов F^3 как гиперповерхность в прямом произведении $\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2$, задаваемую уравнением $x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 = 0$; тогда имеется псевдоторическая структура (f_1, f_2, B, ψ, Y) , где $B \subset F^3$ – шестиугольник, состоящий из шести проективных прямых, Y есть $\mathbb{CP}^1$, а $D_{\text{Sing}} \subset Y$ состоит из трех точек. Далее, в качестве $P_Q \subset \mathbb{R}^2$ имеем плоский выпуклый шестиугольник, являющийся многоугольником моментов торической поверхности дель Пеццо $\mathbb{CP}^2_3$, а $P_{\text{Sing}} \subset P_Q$ состоит из трех диагоналей P_Q , соединяющих попарно противоположные вершины. Каждая такая диагональ делит P_Q на два четырехугольника, каждый из которых является выпуклым многогранником для

Работа выполнена при поддержке совместного гранта Российского фонда фундаментальных исследований (№ 11-01-00980-а) и НРУ ВШЭ (№ 11-09-0038), а также при поддержке Лаборатории алгебраической геометрии ГУ-ВШЭ (грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0023).

торической поверхности дель Пеццо $\mathbb{CP}_1^2$, и каждый из трех особых слоев Q_p , $p \in D_{\text{Sing}}$ есть пара таких поверхностей дель Пеццо, пересекающихся по прямой – прообразу соответствующей диагонали. Таким образом, множество особенностей Sing есть три такие прямые (детали этой конструкции см. в [3]).

Основное наблюдение настоящей работы содержит следующая

ТЕОРЕМА. Пусть на компактном симплектическом многообразии (X, ω_X) задана регулярная псевдоторическая структура $(f_1, \dots, f_k, B, \psi, Y)$. Тогда

- 1) для произвольного гладкого лагранжеева тора $T \subset Y$ и произвольного набора значений $(c_1, \dots, c_k) = x \in \mathbb{R}^k$ вещественных интегралов $(f_1, \dots, f_k)$ из области $x \in P_Q \setminus (\partial P_Q \cup P_{\text{Sing}})$ существует подъем T до гладкого лагранжеева тора $T(x) \subset X$;
- 2) для произвольного гладкого лагранжеева тора $T \subset Y$ такого, что $T \cap D_{\text{Sing}} = \emptyset$, и произвольного набора значений $(c_1, \dots, c_k) = x \in \mathbb{R}^k$ вещественных интегралов $(f_1, \dots, f_k)$ из области $x \in P_Q \setminus \partial P_Q$ существует подъем T до гладкого лагранжеева тора $T(x) \subset X$.

Случай, когда $T \subset Y$ есть стандартный тор в симплектическом торическом многообразии Y , следует из доказательства предложения 2 [1]. Для произвольного тора модифицируем основную идею конструкции из [1], а именно, построим локальный набор функций $(h_1, \dots, h_{n-k})$ на Y вблизи T таких, что $\{h_i, h_j\}_{\omega_Y} = 0$ и T есть совместное множество уровня этих функций, соответствующее некритическим значениям.

Итак, пусть $T \subset Y$, а $(c_1, \dots, c_k) = x \in \mathbb{R}^k$ набор значений $f_1, \dots, f_k$ как в условиях 1) или 2). Тогда для каждого слоя $Q_p \subset X$ над точкой $p \in T \subset Y$ выбор значений функций определяет гладкий лагранжеев тор $S_{c_1, \dots, c_k}^p$. Объединяя эти торы вдоль $T \subset Y$, получаем

$$T(x) = \bigcup_{p \in T} S_{c_1, \dots, c_k}^p,$$

обладающий структурой расслоения над $(n-k)$ -мерным тором со слоем k -мерный тор. Покажем, что $T(x)$ является лагранжеевым тором. Для этого достаточно построить на $T(x)$ набор векторных полей $\nu_1, \dots, \nu_n$, глобально тривиализующих касательное расслоение $TT(x)$ и удовлетворяющих условию $\omega_X(\nu_i, \nu_j) \equiv 0$ на $T(x)$.

Набор $\nu_1, \dots, \nu_n$ частично уже существует на $T(x)$, так как всякая функция из набора $f_1, \dots, f_k$ гамильтоновым действием сохраняет каждое из $S_{c_1, \dots, c_k}^p$, т.е.

$$\nu_i = X_{f_i}|_{T(x)}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Построим теперь недостающие векторные поля. Для этого покажем, что для любого лагранжеева тора $T \subset Y$ найдется локальный набор первых интегралов $h_1, \dots, h_{n-k}$, чьи гамильтоновы векторные поля сохраняют T . В самом деле, согласно теореме Дарбу–Вейнштейна [4] любое лагранжеево подмногообразие $S \subset Y$ обладает окрестностью $N(S) \subset Y$, симплектоморфной некоторой малой окрестности $N_0(S) \subset T^*S$ нулевого сечения кокасательного расслоения. Так как в нашем случае $S = T$ есть тор, взяв на T^*T набор коммутирующих функций $p_1, \dots, p_{n-k}$, соответствующих координатам “действия”, обрезав все p_i так, чтобы они занулились на границе $N_0(S)$, и затем перенося результат на $N(S)$, мы получим необходимый локальный набор $h_1, \dots, h_{n-k}$. Теперь воспользуемся подъемом $\psi^*: C^\infty(Y, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(X \setminus (B \cup \text{Sing}))$ гладких функций и определим локальные гладкие функции $\psi^*h_1, \dots, \psi^*h_{n-k}$ вблизи $T(x) \subset X$. При этом заметим, что условия 1) и 2) удостоверяют в том, что в обоих этих случаях $T(x)$ не пересекается с $B \cup \text{Sing}$ и, значит, обладает некоторой окрестностью, для которой работает подъем ψ^* . По определению псевдоторической структуры $\nabla_{\psi^*h_i}$ коллинеарен $X_{\psi^*h_i}$ откуда следуют коммутационные соотношения для f_i и ψ^*h_j , и значит в качестве ν_j при $j > k$ можно взять $\nu_j = X_{\psi^*h_{j-k}}|_{T(x)}$. Чтобы убедиться в том, что при этом последние векторные поля симплектически ортогональны между собой, нам необходимо дополнительное исследование условия (*).

Пусть условие (*) выполнено для произвольной гладкой функции h на Y . Тогда если гамильтоново векторное поле X_h не обращается в нуль в некоторой окрестности точки

$p \in Y$, то из условия (*) следует, что существует не обращающаяся в нуль вещественная функция

$$\alpha_h: X \setminus (B \cup \text{Sing}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{так, что} \quad X_{\psi^*h} = \alpha_h \nabla_{\psi} X_h.$$

Тогда нетрудно видеть, что функция α должна быть одна и та же для всех функций. В самом деле, применим условие (*) к произведению пары $h_1 \cdot h_2$. Тогда получаем

$$\nabla_{\psi} X_{h_1 \cdot h_2} \wedge X_{\psi^*(h_1 \cdot h_2)} = \psi^* h_1 \cdot \psi^* h_2 (\alpha_{h_1} \nabla_{\psi} X_{h_1} \wedge \nabla_{\psi} X_{h_2} + \alpha_{h_2} \nabla_{\psi} X_{h_2} \wedge \nabla_{\psi} X_{h_1}),$$

откуда видно, что условие (*) выполнено тогда и только тогда, когда $\alpha_{h_1} = \alpha_{h_2}$ для любой пары функций, откуда следует универсальность α .

Далее, в слое $\psi^{-1}(p) = Q_p \setminus B$ над p рассмотрим в произвольной точке $x \in \psi^{-1}(p) \subset X$ разложение касательного пространства $T_x X = T_x^{\text{hor}} \oplus T_x^{\text{vert}}$, задаваемое симплектической связностью ∇_{ψ} , и возьмем ограничение симплектической формы ω_X на горизонтальную компоненту, обозначив его ω_X^{hor} . Тогда нетрудно видеть, что геометрический смысл функции α таков: для любой пары векторов $v_1, v_2 \in T_x^{\text{hor}}$ имеем равенство

$$\omega_X^{\text{hor}} = \alpha(x) \omega_Y(d\psi(v_1), d\psi(v_2)).$$

Отсюда следует, что если два гамильтоновых векторных поля были симплектически ортогональны внизу на Y , то их подъемы посредством ∇_{ψ} вверх останутся симплектически ортогональными. Применяя снова условие (*), получаем, что $\psi^* h_j$ коммутируют в X . Но построенный нами тор $T(x)$ есть совместное множество уровней функций $f_1, \dots, f_k, \psi^* h_1, \dots, \psi^* h_{n-k}$, определенных в его окрестности и коммутирующих между собой. Отсюда следует, что $T(x)$ – лагранжев.

ЗАМЕЧАНИЕ. На самом деле для построения подъема лагранжева тора из Y в X мы нигде не пользовались тем, что Y есть торическое многообразие. Поэтому конструкция такого рода подъема может быть использована в общей ситуации, когда на компактном симплектическом многообразии действует вещественный тор неполной размерности.

Доказанная выше теорема может быть использована для построения гамильтоново неизотопных монотонных лагранжевых торов в произвольных монотонных симплектических многообразиях (например, в многообразиях Фано). Возвращаясь к примеру, приведенному выше, заметим, что подъемом лагранжевых торов можно получить соответствие

$$H_1(Y \setminus D_{\text{Sing}}, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{классы лагранжевых торов},$$

при этом нетривиальным это соответствие в примере становится только для монотонных торов. В этом случае ожидается, что каждый из трех примитивных классов из

$$H_1(Y \setminus D_{\text{Sing}}, \mathbb{Z}) = H_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \text{три точки}, \mathbb{Z})$$

порождает свой класс монотонного лагранжева тора в многообразии Фано F^3 (см. пример выше), и эти три класса попарно гамильтоново неизотопны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. А. Белёв, Н. А. Тюрин, *Матем. заметки*, **87:1** (2010), 48–59. [2] Н. А. Тюрин, *ТМФ*, **162:3** (2010), 307–333. [3] Н. А. Тюрин, *ТМФ*, **167:2** (2011), 193–205. [4] А. Weinstein, *Ann. of Math.* (2), **98** (1973), 377–410.

С. А. Белёв

Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна Московской обл.

Поступило

09.11.2011

Н. А. Тюрин

Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна Московской обл.

E-mail: ntyurin@theor.jinr.ru