Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Бондаренко, Д. В. Горбачев, Минимальные взвешенные 4-дизайны на сфере S^2 , *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 5, 787–790

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9364>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:22:09

Минимальные взвешенные 4-дизайны на сфере S^2

А. В. Бондаренко, Д. В. Горбачев

Мы приводим примеры минимальных взвешенных 4-дизайнов из 10 точек на сфере S^2 . Изучению минимальных дизайнов посвящены многочисленные работы, в том числе статьи авторов [1]–[3].

Пусть

$$S^{d-1} = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_1^2 + \dots + x_d^2 = 1\}, \quad d \geq 2,$$

– единичная евклидова сфера. Конечное множество узлов и весов

$$X = \{(x^{(\nu)}, \lambda_\nu)\}_{\nu=1}^N \subset S^{d-1} \times \mathbb{R}_+,$$

называется *взвешенным t -дизайном* [4], [5], если кубатурная формула

$$\frac{1}{|S^{d-1}|} \int_{S^{d-1}} f(x) dx = \sum_{\nu=1}^N \lambda_\nu f(x^{(\nu)}),$$

точна для любого алгебраического многочлена f степени $\leq t$, $t \in \mathbb{N}$. Ясно, что для любого t -дизайна $\sum_{\nu=1}^N \lambda_\nu = 1$.

Множество X является взвешенным t -дизайном тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\nu, \mu=1}^N \lambda_\nu \lambda_\mu P_k^{(d)}(x^{(\nu)} x^{(\mu)}) = \delta_{k0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, t, \quad (1)$$

где

$$P_k^{(d)}(u) = \tilde{P}_k^{((d-3)/2, (d-3)/2)}(u), \quad \tilde{P}_k^{(\alpha, \beta)}(u) = \frac{P_k^{(\alpha, \beta)}(u)}{P_k^{(\alpha, \beta)}(1)}$$

– соответственно многочлены Гегенбауэра и Якоби, нормированные условием $P_k^{(\cdot)}(1) = 1$ ($P_k^{(3)} = P_k$ – многочлены Лежандра). Многочлены $P_k^{(d)}$ ортогональны на отрезке $[-1, 1]$ с весом $w^{(d)}(u) = (1 - u^2)^{(d-3)/2}$:

$$\frac{1}{c^{(d)}} \int_{-1}^1 P_k^{(d)}(u) P_l^{(d)}(u) w^{(d)}(u) du = \frac{\delta_{kl}}{r_k^{(d)}},$$

где

$$c^{(d)} = \int_{-1}^1 w^{(d)}(u) du = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma((d-1)/2)}{\Gamma(d/2)}, \quad r_k^{(d)} = \binom{d+k-1}{d-1} - \binom{d+k-3}{d-1}.$$

Они обладают свойством неотрицательной определенности: для произвольного множества X (не обязательно дизайна)

$$\sum_{\nu, \mu=1}^N \lambda_\nu \lambda_\mu P_k^{(d)}(x^{(\nu)} x^{(\mu)}) \geq 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (2)$$

Работа первого автора выполнена при поддержке гранта МТМ 2011-27637; работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00564). Статья закончена в рамках программы “Теория приближений и гармонический анализ”, сентябрь 2011–февраль 2012, CRM, Barcelona.

Из (1) и (2) следует, что если $\varphi \in \text{Pol}_t$ — многочлен степени t вида

$$\varphi(u) = 1 + \sum_{k=1}^t \varphi_k P_k^{(d)}(u), \quad \varphi_k > 0, \quad k = 1, \dots, t,$$

то X будет взвешенным t -дизайном тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\nu, \mu=1}^N \lambda_\nu \lambda_\mu \varphi(x^{(\nu)} x^{(\mu)}) = 1. \quad (3)$$

Например, можно использовать сферическое воспроизводящее ядро

$$\varphi_t^{(d)}(u) = \sum_{k=0}^t r_k^{(d)} P_k^{(d)}(u) = \tilde{r}_t^{(d)} \tilde{P}_t^{((d-1)/2, (d-3)/2)}(u),$$

где

$$\tilde{r}_t^{(d)} = \binom{d+t-1}{d-1} + \binom{d+t-2}{d-1}.$$

Для $d = 3$ имеем $\varphi_t^{(3)}(u) = (t+1)^2 \tilde{P}_t^{(1,0)}(u)$.

Взвешенный t -дизайн называется *минимальным*, если он состоит из наименьшего числа точек $N = N_w(d, t)$. Нахождение минимальных дизайнов является сложной математической проблемой. В настоящее время известно небольшое их число. При этом большое внимание уделяется исследованиям t -дизайнов с равными весами ($\lambda_1 = \dots = \lambda_N$) и соответствующей величины $N(d, t) \geq N_w(d, t)$. В частности, для сферы S^2 установлено, что $N(3, 1) = 2$ (полюсы сферы), $N(3, 2) = 4$ (вершины вписанного в сферу тетраэдра), $N(3, 3) = 6$ (вершины октаэдра), $N(3, 5) = 12$ (икосаэдр). Во всех этих случаях $N(\cdot) = N_w(\cdot)$. Другие подобные точные результаты для сферы S^2 авторам неизвестны.

Доказательство минимальности приведенных t -дизайнов вытекает из следующей LP-оценки Дельсарта–Гетелса–Зейделя [6], [5]:

$$A(K(d, t)) \leq N_w(d, t).$$

Здесь $A(K) = \sup_{f \in K} f(1)$, $K(d, t) \subset C[-1, 1]$ — класс функций

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k^{(d)}(u), \quad \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| < \infty,$$

удовлетворяющих условиям

$$f(u) \geq 0, \quad u \in [-1, 1], \quad f_0 = 1, \quad f_k \leq 0, \quad k \geq t+1.$$

Дельсарт, Гетелс и Зейдель [6] решили задачу $A(K(d, t) \cap \text{Pol}_t)$ и получили оценку

$$N_w(d, t) \geq \begin{cases} 2 \binom{d+k-2}{d-1}, & t = 2k-1, \\ \binom{d+k-1}{d-1} + \binom{d+k-2}{d-1}, & t = 2k. \end{cases}$$

Как уже отмечалось при $d = 3$ и $t = 1, 2, 3, 5$ она точная. Для $t = 4$ имеем неравенство $N_w(3, 4) \geq 9$.

Юдин [7] доказал оценку принципиально другого вида. Им была построена функция $f_{d,t} \in K(d, t)$, для которой

$$f_{d,t}(1) = c^{(d)} \left(\int_{u_t}^1 w^{(d)}(u) du \right)^{-1},$$

где u_t – наибольший нуль многочлена $P_t^{(d+1)}(u)$. Для $d = 3$ и $t = 4$ имеем $f_{3,4}(1) = 8.51\dots$, что также приводит к оценке $N_w(3, 4) \geq 9$.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливо равенство $N_w(3, 4) = 10$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a = 4\sqrt{4485}/195 = 1.37\dots$,

$$f(u) = \frac{2851875a}{363952} \left(u + \frac{a}{2}\right)^2 \left(u^2 - \frac{1}{10}\right)^2 (a - u).$$

Простые вычисления показывают, что

$$f(u) = 1 + f_1 P_1(u) + \dots + f_4 P_4(u) - \frac{73125a}{250217} P_7(u).$$

Таким образом, многочлен $f \in K(3, 4)$. Для него

$$f(1) = \frac{243}{43} + \frac{3838185a}{1455808} = 9.27\dots$$

Отсюда следует, что $N_w(3, 4) \geq 10$.

Докажем, что $N_w(3, 4) \leq 10$. Для этого приведем две конструкции взвешенных 4-дизайнов из 10 точек, одна из которых содержится в работе [8]. Дизайн X будем задавать указанием весов и соответствующих узлов в сферических координатах (φ, θ) ($x_1 = \cos \varphi \sin \theta$, $x_2 = \sin \varphi \sin \theta$, $x_3 = \cos \theta$).

Конструкция X_1 (полусы и антипризма). Пусть $\theta_1 = \arccos \sqrt{1/5}$, $\theta_2 = \pi - \theta_1$. Тогда для X_1

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} &: (0, 0), (0, \pi), \\ \frac{5}{48} &: (0, \theta_1), \left(\frac{\pi}{2}, \theta_1\right), (\pi, \theta_1), \left(\frac{3\pi}{2}, \theta_1\right), \\ \frac{5}{48} &: \left(\frac{\pi}{4}, \theta_2\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \theta_2\right), \left(\frac{5\pi}{4}, \theta_2\right), \left(\frac{7\pi}{4}, \theta_2\right). \end{aligned}$$

Конструкция X_2 (полус, симметричный пятиугольник и квадрат). Положим $r_2 < r_1$ – корни многочлена $5u^2 + 2u - 1$,

$$\begin{aligned} \theta_i &= \arccos r_i, \quad \varphi_i = 2 \arcsin \frac{\sin(\theta_i/2)}{\sin \theta_1}, \quad i = 1, 2, \\ A_1 &= \frac{13 + 20r_1}{72(1 + 5r_1)} = 0,106\dots, \quad A_2 = \frac{11 + 40r_2}{72(1 + 5r_2)} = 0,094\dots \end{aligned}$$

Тогда для X_2

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} &: (0, 0), \\ \frac{1}{9} &: (0, \theta_1), \quad A_1: (\varphi_1, \theta_1), (2\pi - \varphi_1, \theta_1), \quad A_2: (\varphi_2, \theta_1), (2\pi - \varphi_2, \theta_1), \\ A_2 &: \left(\frac{\pi}{4}, \theta_2\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \theta_2\right), \left(\frac{5\pi}{4}, \theta_2\right), \left(\frac{7\pi}{4}, \theta_2\right). \end{aligned}$$

Эта конструкция следует из чебышевской кубатурной формулы 4-го порядка с 6 точками в круге, построенной в работе [8] (см. с.103 и теорему 2.1). На круге эта формула минимальна. Однако отсюда автоматически не следует оптимальность соответствующей формулы на сфере. Также отметим, что конструкция X_1 не получается методами работы [8].

В обоих случаях простая проверка показывает, что соотношение (3) для многочлена $\varphi_4^{(3)}$ выполняется. Теорема доказана.

Отметим, что на самом деле имеется двухпараметрическое семейство взвешенных 4-дизайнов из 10 точек, связанное с полиномом

$$225u^4 + 180u^3 - 54u^2 - 36u - 315 + 36(\lambda_i^{-1} + \lambda_j^{-1}) - 4(\lambda_i \lambda_j)^{-1}.$$

Авторы благодарят Yuan Xu за обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. В. Горбачев, *Изв. ТулГУ. Сер. Матем. Мех. Информ.*, **5**:3 (1999), 33–37.
[2] Д. В. Горбачев, *Изв. ТулГУ. Сер. Естеств. науки*, 2010, № 2, 15–23. [3] A. Bondarenko, D. Radchenko, M. Viazovska, *Optimal Asymptotic Bounds for Spherical Designs*, 2011, arXiv: math.MG/1009.4407v3. [4] И. П. Мысовских, *Интерполяционные кубатурные формулы*, Наука, М., 1981. [5] Н. Н. Андреев, *Матем. заметки*, **67**:4 (2000), 489–497. [6] P. Delsarte, J. M. Goethals, J. J. Seidel, *Geom. Dedicata*, **6**:3 (1977), 363–388. [7] В. А. Юдин, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:3 (1997), 213–223. [8] S. Neo, Y. Xu, *J. Comput. Appl. Math.*, **112**:1-2 (1999), 95–119.

А. В. Бондаренко

Centre de Recerca Matemàtica (CRM), Spain;

Киевский национальный университет им. Т. Шевченко

E-mail: andriybond@gmail.com

Поступило

02.12.2011

Д. В. Горбачев

Тульский государственный университет

E-mail: dvgmail@mail.ru