Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, О. В. Починка, О включении в поток диффеоморфизмов Морса–Смейла на многообразиях размерности, большей двух, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 5, 791–794

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9365>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 18:26:27

О включении в поток диффеоморфизмов Морса–Смейла на многообразиях размерности, большей двух

В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, О. В. Починка

Пусть M^n – гладкое связное замкнутое многообразие M^n размерности n , $\text{Diff}^r(M^n)$ – пространство всех диффеоморфизмов на M^n гладкости C^r , $r \geq 1$. Напомним, что диффеоморфизм $f \in \text{Diff}^1(M^n)$ называется *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если выполняются следующие условия:

- неблуждающее множество $\Omega(f)$ конечно и состоит из гиперболических периодических точек;
- устойчивые и неустойчивые многообразия периодических точек пересекаются трансверсально.

Будем говорить, что диффеоморфизм $f: M^n \rightarrow M^n$ включается в топологический (гладкий) поток, если существует топологический (гладкий) поток X^t на M^n такой, что f является сдвигом на единицу времени вдоль траекторий потока X^t . Из работ [1], [2], в которых доказана структурная устойчивость диффеоморфизмов Морса–Смейла, следует, что для любого многообразия M^n существует открытое в $\text{Diff}^1(M^n)$ множество диффеоморфизмов Морса–Смейла, включающихся в топологический поток. Палис доказал в [1] следующие необходимые условия включения диффеоморфизма f Морса–Смейла в топологический поток:

- 1) множество $\Omega(f)$ совпадает с множеством $\text{Fix}(f)$ неподвижных точек;
- 2) ограничение диффеоморфизма f на каждое инвариантное многообразие любой неподвижной точки $p \in \Omega(f)$ сохраняет его ориентацию;
- 3) если для различных седловых точек $p, q \in \Omega(f)$ пересечение $W^s(p) \cap W^u(q)$ непусто, то каждая его компонента связности не является замкнутым множеством.

Более того, он показал, что при $n = 2$ эти условия являются достаточными. В этой же работе была поставлена проблема нахождения соответствующих условий в случае большей размерности.

Следует отметить, что проблема в гладкой ситуации значительно отличается от топологической. Так в работе [3] доказано, что множество C^2 -диффеоморфизмов, включающихся в C^1 -гладкий поток, нигде не плотно в пространстве диффеоморфизмов Морса–Смейла.

В настоящей заметке получены необходимые и достаточные условия включения в топологический поток сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла, объединенных в класс $G_k(M^n)$ ($n > 2$) следующими условиями, выполняющимися для любого $f \in G_k(M^n)$:

- 1) $\Omega(f) = \text{Fix}(f)$;
- 2) множество седловых точек состоит в точности из $k > 0$ седловых неподвижных точек¹, причем устойчивое многообразие $W^s(\sigma)$ любой седловой неподвижной точки $\sigma \in \Omega(f)$ имеет размерность $n - 1$;

Работа выполнена при поддержке правительства Российской Федерации (грант 11.G34.31.0039), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 11-01-12056-офи-м-2011, 12-01-00672-а) и гранта Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

¹Если $k = 0$, то $\Omega(f)$ состоит в точности из одного стока и одного источника, все диффеоморфизмы с таким неблуждающим множеством вкладываются в топологический поток.

- 3) для любых двух различных седловых точек $p, q \in \Omega(f)$ пересечение $W^s(p) \cap W^u(q)$ пусто.

Из условий, выделяющих класс $G_k(M^n)$, следует, что неблуждающее множество любого диффеоморфизма $f \in G_k(M^n)$ содержит в точности один источник и $k + 1$ стоковую точку, а несущее многообразие M^n диффеоморфно n -сфере. Отметим, что любой диффеоморфизм $f \in G_k(M^n)$ удовлетворяет всем необходимым условиям включения в поток, сформулированным выше.

ТЕОРЕМА 1. *Если $n \geq 4$, то любой диффеоморфизм $f \in G_k(M^n)$ включается в топологический поток.*

Теорема 1 является следствием результатов, полученных в работах [4], [5].

В случае $n = 3$, как следует из работ [6], [7], уже в классе $G_1(M^3)$ существуют диффеоморфизмы, не включающиеся в поток. Этот эффект связан с возможностью дикого вложения замыкания сепаратрис седловых неподвижных точек в несущее многообразие. Для пояснения этого эффекта приведем точные определения ручного и дикого вложения.

Напомним, что *устойчивой (неустойчивой) сепаратрисой седловой периодической точки σ диффеоморфизма f* называется компонента связности многообразия $W^s(\sigma) \setminus \sigma$ ($W^u(\sigma) \setminus \sigma$). Пусть α – источниковая неподвижная точка диффеоморфизма $f \in G_k(M^3)$ Морса–Смейла. Из гиперболичности α следует, что $W^u(\alpha)$ гомеоморфно пространству $\mathbb{R}^3$. Из определения класса $G_k(M^3)$ следует, что все сепаратрисы седловых точек диффеоморфизма f , принадлежащие $W^u(\alpha)$, двумерны. Будем обозначать их объединение через $\mathcal{L}_\alpha$. Положим $F_\alpha = \mathcal{L}_\alpha \cup \alpha$ и назовем F_α *двумерным пучком сепаратрис*. Аналогично определяется пучок одномерных сепаратрис F_ω , принадлежащий устойчивому многообразию стоковой точки ω .

Пусть $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $\{s_1, \dots, s_\mu\}$ ($\{p_1, \dots, p_\nu\}$) – попарно непересекающиеся простые замкнутые кривые (попарно несовпадающие точки), принадлежащие сфере S^2 , и C_j – конус в $\mathbb{R}^3$ с вершиной в начале координат и направляющей s_j , $j \in \{1, \dots, \mu\}$ (L_i – луч, выходящий из начала координат и проходящий через точку p_i , $i \in \{1, \dots, \nu\}$). Совокупность $\mathbb{F}^2 = \bigcup_{j=1}^\mu C_j$ ($\mathbb{F}^1 = \bigcup_{j=1}^\nu L_j$) будем называть *стандартным двумерным (одномерным) пучком*.

Подмножество $F^i \subset \mathbb{R}^3$, снабженное индуцированной топологией и гомеоморфное $\mathbb{F}^i$, $i \in \{1, 2\}$, будем называть *одномерным или двумерным пучком*. При этом пучок F^i будем называть *ручным*, если существует гомеоморфизм $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ такой, что $H(F^i) = \mathbb{F}^i$; в противном случае пучок F^i будем называть *диким*. Если $\mu = 1$ ($\nu = 1$), то двумерный (одномерный) пучок вырождается в конус (дугу). Первые примеры диких конусов и диких дуг были приведены Дж. Александером в 1924 году, Е. Артином и Р. Фоксом в 1948 году. Отметим, что ручность каждого из элементов, входящих в пучок $F^i \subset \mathbb{R}^3$, еще не является гарантией того, что пучок в целом будет ручным. Например, в работе [8] построен пример так называемого *умеренно дикого одномерного пучка*, т.е. такого дикого пучка, что любой содержащийся в нем пучок из $\nu' < \nu$ дуг является ручным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Двумерный пучок сепаратрис F_α назовем *ручным*, если существует гомеоморфизм $H_\alpha: W^u(\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^3$, отображающий F_α на стандартный двумерный пучок. В противном случае будем говорить, что пучок сепаратрис F_α является *диким*. Если ручной (дикий) пучок F_α содержит только одну сепаратрису, то будем называть эту сепаратрису *ручной (дикой)*.

Аналогично определяется одномерный ручной (дикий) пучок сепаратрис F_ω .

В работах [6], [7] построены примеры диффеоморфизмов из класса $G_1(M^3)$, имеющих дико вложенные одномерную и двумерную сепаратрису седла, в работе [9] построены диффеоморфизмы из класса $G_k(S^3)$, $k \geq 2$, одномерные сепаратрисы которых образуют умеренно дикие пучки. Как будет следовать из леммы 1, такие диффеоморфизмы не включаются ни в какие потоки. Сюрпризом оказался тот факт, что условие ручности всех

пучков сепаратрис седловых неподвижных точек диффеоморфизма $f \in G_k(M^3)$ так же не является достаточным для вложения диффеоморфизма f в поток, а именно, справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существует не включающийся в поток диффеоморфизм $f \in G_4(S^3)$, все пучки сепаратрис которого являются ручными.*

Как оказалось, необходимое условие включения диффеоморфизма $f \in G_k(M^3)$ в поток заключается в более сильном, нежели ручность, требовании.

Пусть $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – линейное растяжение евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, определяемое формулой $A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2, 2x_3)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пучок сепаратрис F_α называется *тривиально вложенным*, если существует гомеоморфизм $h_\alpha: W^u(\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^3$, отображающий пучок F_α на стандартный двумерный пучок, и удовлетворяющий условию $f|_{W^u(\alpha)} = h_\alpha^{-1} A h_\alpha|_{W^u(\alpha)}$.

Аналогично определяется тривиально вложенный одномерный пучок сепаратрис F_ω .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существует не включающийся в поток диффеоморфизм $f \in G_5(S^3)$ такой, что для любой стоковой точки $\omega \in \Omega(f)$ пучок F_ω является тривиальным.*

ЛЕММА 1. *Пусть $f \in G_k(M^3)$. Если f включается в топологический поток, то все пучки сепаратрис диффеоморфизма f тривиальны.*

Основной результат работы заключается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. *Диффеоморфизм $f \in G_k(M^3)$ вкладывается в топологический поток тогда и только тогда, когда пучок F_α тривиально вложен.*

Необходимость условия теоремы 2 следует из леммы 1. Доказательство достаточности сводится к получению такого полного топологического инварианта в классе диффеоморфизмов из $G_k(M^3)$ с тривиальными двумерными пучками, который можно реализовать диффеоморфизмом, являющимся сдвигом на единицу времени вдоль траекторий потока. Таким инвариантом является граф $\Gamma(f)$ диффеоморфизма f , множество вершин которого изоморфно множеству неподвижных точек, а множество ребер – множеству сепаратрис седловых неподвижных точек.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $f, f' \in G_k(M^3)$ и пучки $F_\alpha, F_{\alpha'}$ тривиальны. Диффеоморфизмы f, f' топологически сопряжены тогда и только тогда, когда графы $\Gamma(f), \Gamma(f')$ изоморфны.*

Из работы [10] следует, что для потоков Морса–Смейла, удовлетворяющих условиям, аналогичным условиям, определяющим класс диффеоморфизмов $G_k(M^n)$, граф является полным топологическим инвариантом, и любой абстрактный допустимый граф (обладающий теми же свойствами, что и графы потоков из рассматриваемого класса) реализуется таким потоком. Отсюда следует, что для любого диффеоморфизма $f \in G_k(M^n)$, удовлетворяющего теореме 3, существует поток X^t , граф которого изоморфен графу $\Gamma(f)$. В силу леммы 1 все пучки сепаратрис диффеоморфизма X^1 , полученного сдвигом на единицу времени вдоль потока X^t являются тривиальными. Тогда диффеоморфизм f топологически сопряжен с X^1 , т.е. существует гомеоморфизм $h: M^n \rightarrow M^n$ такой, что $f = hX^1h^{-1}$. Следовательно, диффеоморфизм f вкладывается в топологический поток $Y^t = hX^th^{-1}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Palis, *Topology*, **8:4** (1969), 385–404. [2] Дж. Палис, С. Смайл, *Математика. Сб. пер.*, **13:2** (1969), 145–155. [3] М. И. Брин, *Изв. вузов. Матем.*, 1972, № 8, 19–25. [4] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **261**, МАИК, М., 2008, 61–86. [5] В. З. Гринес,

Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **270**, МАИК, М., 2010, 62–85. [6] D. Pixton, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172. [7] С. Bonatti, V. Grines, *J. Dynam. Control Systems*, **6**:4 (2000), 579–602. [8] Н. Debrunner, R. Fox, *Duke Math. J.*, **27**:3 (1960), 425–429. [9] О. Pochinka, *Univ. Iagel. Acta Math.*, **47** (2009), 149–154. [10] С. Ю. Пилогин, *Дифференц. уравнения*, **14**:2 (1978), 245–254.

В. З. Гринес

Нижегородская государственная
сельскохозяйственная академия
E-mail: vgrines@yandex.ru

Поступило

06.10.2011

Е. Я. Гуревич

Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: elena_gurevich@list.ru

В. С. Медведев

Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: medvedev@unn.ac.ru

О. В. Починка

Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru