Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. М. Ушанов, Теорема Быковского и обобщение теоремы Ларчера, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 5, 795–798

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9366>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:49:31

Теорема Быковского и обобщение теоремы Ларчера

Д. М. Ушанов

1. Введение. Пусть $a = (a_1, \dots, a_s)$ – произвольный набор целых чисел, а $N \geq 3$ – натуральное число. *Сеткой Коробова* (см. [1]) называется множество

$$\mathcal{K}(a) = \left\{ \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) \mid k = 1, 2, \dots, N \right\}.$$

Рассмотрим решетку

$$\Gamma_N(a) = \{ (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s \mid a_1 m_1 + \dots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{N} \};$$

несложно проверить, что

$$\mathcal{K}(a) = \Gamma_N^*(a) \cap [0, 1]^s,$$

где $\Gamma_N^*(a)$ – двойственная к $\Gamma_N(a)$ решетка.

Для последовательности $\Xi = \{ \xi_x \in [0, 1]^s, x = 0, 1, 2, \dots, N-1 \}$ *отклонением* называется следующая величина:

$$D(\Xi) = \sup_{\gamma_1, \dots, \gamma_s \in [0, 1]} \left| \# \{ x : 0 \leq x < N, \xi_x \in [0, \gamma_1) \times \dots \times [0, \gamma_s) \} - \gamma_1 \dots \gamma_s N \right|.$$

В [2] Ларчер получил следующий результат.

ТЕОРЕМА А. *Существует постоянная c такая, что для любого натурального N существует натуральное g , $(g, N) = 1$ и отклонение сетки $\mathcal{K}(1, g)$ оценивается*

$$D_N(\mathcal{K}(1, g)) < c \frac{N \log N \log \log N}{\phi(N)}.$$

Доказательство теоремы элементарно и опирается на аппарат цепных дробей.

Недавно Быковский получил следующий результат (см. [3], [4]).

ТЕОРЕМА В. *Для любого натурального $s \geq 2$ существует постоянная c такая, что для любого натурального N найдется такой набор $(a_1, \dots, a_s)$, что отклонение сетки $\mathcal{K}(a_1, \dots, a_s)$ оценивается*

$$D_N(\mathcal{K}(a_1, \dots, a_s)) < c \log^{s-1} N \log \log N.$$

Доказательство этой теоремы использует аналитический аппарат.

Ларчер получил также следующий результат для вычетов степени k (см. [2; следствие 5]). Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует константа $c(k)$ такая, что для любого $N \in \mathbb{N}$ найдется $x \in \mathbb{N}$, $(x, N) = 1$, $1 \leq x < N$, такой что существует x_1 , $x \equiv x_1^k \pmod{N}$, и для разложения в цепную дробь $x/N = [0; b_1, \dots, b_l]$ выполнено

$$\sum b_i < c(k) (\log N \log \log N)^2.$$

Отсюда следует (см. Островский [5]) оценка на отклонение двумерной последовательности: для такого x будет верно

$$D(\mathcal{K}(1, x)) \ll (\log N \log \log N)^2.$$

В работе [6] получено усиление теоремы Ларчера на случай, когда вместо множества вычетов фиксированной степени при простом N рассматривается произвольная достаточно большая мультипликативная подгруппа группы $\mathbb{Z}_p^*$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00681).

ТЕОРЕМА С. Пусть p простое, G – мультипликативная подгруппа в $\mathbb{Z}_p^*$. Пусть

$$\#G \geq 10^8 p^{7/8} \log^{5/2} p.$$

Тогда существует элемент $a \in G$, $a/p = [0; b_1, b_2, \dots, b_l]$, с

$$D(\mathcal{K}(1, a)) \ll \sum_{i=1}^l b_i \leq 500 \log p \log \log p.$$

Отметим, что недавно Чанг независимо получила теорему С (см. [7]).

Пользуясь результатами Быковского (см. [3], [4]), в настоящей работе мы обобщили результат Ларчера на большие размерности и получили следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Обозначим

$$\alpha_m = \frac{2^{m-1}}{2^{m+1} - m - 2}, \quad \beta_m = \frac{2^m}{2^{m+2} - m - 4}, \quad n_\delta = \max\left(3, \left\lceil \frac{81}{\delta} + \frac{1}{\ln 2} - 160 \right\rceil\right).$$

Определим функции $s'(\delta)$ и $s''(\delta)$ следующим образом:

$$s'(\delta) = \begin{cases} \left\lceil \frac{2m^2(\delta-1)}{4\delta(2^m-1)+1} \right\rceil + 2, & \text{если } \beta_m \leq \delta < \alpha_m, \\ \left\lceil \frac{2m(\delta-1)(m+1)}{\delta(3 \cdot 2^m - 4) + 1} \right\rceil + 2, & \text{если } \alpha_{m+1} \leq \delta < \beta_m, \end{cases}$$

$$s''(\delta) = \left\lceil \frac{(1-\delta)2^{n_\delta}}{(\delta(160+n_\delta)/81-1) \cdot 0.45} \right\rceil + 3.$$

Пусть $s_{\min}(\delta) = \min(s'(\delta), s''(\delta))$.

Если $s \geq 3$ и $\delta \in (0, 1)$ таковы, что $s \geq s_{\min}(\delta)$, то для любого простого $p \geq 3$, любой подгруппы G мультипликативной группы $\mathbb{Z}_p^*$, такой, что $\#G \geq p^\delta$, найдутся элементы $a_1, \dots, a_s \in G$, для которых верно

$$D_p(\mathcal{K}(a_1, \dots, a_s)) \ll_{\delta, s} \log^{s-1} p \log \log p.$$

Подставляя несколько первых значений m в формулировке теоремы 1, получим удобное для анализа следствие.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть s и δ таковы, что

$$s \geq \begin{cases} 3, & \delta \in \left[\frac{3}{4}, 1\right), \\ 4, & \delta \in \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right), \\ 5, & \delta \in \left[\frac{14}{23}, \frac{2}{3}\right), \\ 6, & \delta \in \left[\frac{4}{7}, \frac{14}{23}\right), \\ 7, & \delta \in \left[\frac{6}{11}, \frac{4}{7}\right), \\ 8, & \delta \in \left[\frac{10}{19}, \frac{6}{11}\right), \\ 9, & \delta \in \left[\frac{22}{43}, \frac{10}{19}\right), \\ 10, & \delta \in \left[\frac{1}{2}, \frac{22}{43}\right), \\ 11, & \delta \in \left[\frac{17}{35}, \frac{1}{2}\right), \end{cases} \begin{cases} 12, & \delta \in \left[\frac{9}{19}, \frac{17}{35}\right), \\ 13, & \delta \in \left[\frac{19}{41}, \frac{9}{19}\right), \\ 14, & \delta \in \left[\frac{5}{11}, \frac{19}{41}\right), \\ 15, & \delta \in \left[\frac{21}{47}, \frac{5}{11}\right), \\ 16, & \delta \in \left[\frac{11}{25}, \frac{21}{47}\right), \\ 17, & \delta \in \left[\frac{23}{53}, \frac{11}{25}\right), \\ 18, & \delta \in \left[\frac{3}{7}, \frac{23}{53}\right), \\ 19, & \delta \in \left[\frac{25}{59}, \frac{3}{7}\right), \\ 20, & \delta \in \left[\frac{13}{31}, \frac{25}{59}\right). \end{cases}$$

Тогда для любого простого $p \geq 3$, любой подгруппы G мультипликативной группы $\mathbb{Z}_p^*$, такой, что $\#G \geq p^\delta$, найдутся элементы $a_1, \dots, a_s \in G$, для которых верно

$$D_p(\mathcal{K}(a_1, \dots, a_s)) \ll_{\delta, s} \log^{s-1} p \log \log p.$$

2. Основные идеи доказательства. Всюду далее мы будем использовать следующие обозначения. Пусть G – подгруппа мультипликативной группы $\mathbb{Z}_p^*$ чисел по модулю p . Обозначим через $A(P_1, \dots, P_s)$ число решений сравнения

$$a_1 m_1 + \dots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{N}$$

в целых $a_1, \dots, a_s \in G$ и целых $m_1, \dots, m_s$, таких, что

$$1 \leq m_1 \leq P_1, \dots, 1 \leq m_s \leq P_s.$$

ЛЕММА 1. Пусть параметры s и δ выбраны так, как в теореме 1. Тогда

$$A(P_1, \dots, P_s) \ll \frac{\#G^s}{p} P_1 \cdots P_s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $e_p(t) = \exp(2\pi i t/p)$,

$$S(t, G) = \sum_{g \in G} e_p(tg), \quad S(G) = \max_{t \neq 0} |S(t, G)|.$$

Сначала рассмотрим случай, когда $s \geq s'(\delta)$.

Заметим, что количество решений сравнения равно

$$A(P_1, \dots, P_s) = \frac{1}{p} \sum_{1 \leq m_i \leq P_i} \sum_{a_i \in G} \sum_{n=1}^p e_p(n(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s)).$$

Воспользовавшись неравенством Коши–Буняковского, получим

$$A(P_1, \dots, P_s) \leq \frac{1}{p} \sum_m S^{s-2}(G) \cdot p \#G. \quad (1)$$

Для оценки $S(G)$ сверху мы воспользуемся результатом Конягина (см. [8]). А именно, в обозначениях формулировки теоремы 1

- если существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $\beta_m \leq \delta < \alpha_m$, то

$$S(G) \ll_m \#G^{1-2/m^2+1/2^{m-1}m^2} p^{1/2m^2},$$

- если же существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $\alpha_{m+1} \leq \delta < \beta_m$, то

$$S(G) \ll_m \#G^{1-2/m(m+1)+3/2^{m+1}m(m+1)} p^{1/2m(m+1)}.$$

Подставляя оценки на $S(G)$ в оценку (1) для $A(P_1, \dots, P_s)$, мы получим

$$A(P_1, \dots, P_s) \leq \frac{\#G^s}{p} P_1 \cdots P_s.$$

В случае $s \geq s''(\delta)$ мы рассуждаем так же, разница заключается в другой оценке $S(G)$.

Мы используем следующий результат Гараева (см. [9; теорема 4.1]). Если $3 \leq n \leq 1.44 \log \log p$ – натуральное число, $c > 0$ – произвольная постоянная, $X_1, \dots, X_n$ – подмножества $\mathbb{Z}_p^*$, удовлетворяющие условию

$$\#X_1 \cdot \#X_2 \cdot (\#X_3 \cdots \#X_n)^{1/81} > p^{1+c},$$

то имеет место оценка

$$\left| \sum_{x_1 \in X_1} \cdots \sum_{x_n \in X_n} e_p(x_1 \cdots x_n) \right| \ll \#X_1 \cdots \#X_n p^{-0.45c/2^n}.$$

Взяв $X_1 = tG$, $X_2 = G$, $\dots$, $X_n = G$, и подобрав подходящим образом параметры c и n , мы получим лемму.

3. Схема доказательства теоремы 1. Выберем параметр $Q = p/(2 \log^{s+1} p)$. Пусть $a = (a_1, \dots, a_s)$. Для целочисленного вектора $m = (m_1, \dots, m_s)$ определим

$$H(m) = \max(1, |m_1|) \cdots \max(1, |m_s|).$$

Определим функцию

$$q(a) = \min\{H(m) \mid a_1 m_1 + \cdots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{N}\}.$$

Определим множества Ω_1 и Ω следующим образом:

$$\Omega_1 = \{a \in G^s \mid q(a) \leq Q\}, \quad \Omega = \{a \in G^s \mid q(a) > Q\}.$$

Очевидно, что $\#(\Omega_1 \cup \Omega) = \#G^s$. С помощью леммы 1 мы показываем, что $\#\Omega_1 \leq \#G^s/2$; следовательно, $\#\Omega > \#G^s/2$.

Ненулевой узел γ решетки Γ называется *относительным минимумом*, если не найдется другого ненулевого узла γ' из Γ , для которого

$$|\gamma'_1| \leq |\gamma_1|, \quad \dots, \quad |\gamma'_s| \leq |\gamma_s|.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}(\Gamma)$ множество всех относительных минимумов решетки Γ .

Далее мы воспользуемся следующим результатом Быковского (см. [4]): для любой сетки Коровова верно неравенство

$$D_N(\mathcal{K}(a)) \ll N \sum_{m \in \mathfrak{M}(\Gamma_N(a))} \frac{1}{H(m)}.$$

Таким образом, усредняя по множеству $\#\Omega$, получим

$$\min_{a \in G^s} D(\mathcal{K}(a)) \ll \frac{p}{\#\Omega} \sum_{a \in G^s} \sum_{Q \leq H(m) \leq p} \frac{\delta_p(a_1 m_1 + \cdots + a_s m_s)}{H(m)}.$$

Оценивая последнюю сумму, получаем теорему.

Автор выражает благодарность И. Шпарлинскому за указание на возможность улучшения результата.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. М. Коровов, *УМН*, **22:3** (1967), 83–118. [2] G. Larcher, *Monatsh. Math.*, **101:2** (1986), 135–150. [3] V. A. Bykovskii, *27th Journées Arithmétiques*, Program and Abstract Book, Vilnius University, 2011, 10–11. [4] В. А. Быковский, “Отклонение сеток Коровова”, *Изв. РАН. Сер. матем.* (в печати). [5] A. Ostrowski, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **1** (1922), 77–98; 249–250. [6] N. G. Moshchevitin, D. M. Ushanov, *Unif. Distrib. Theory*, **5:1** (2010), 45–52. [7] М.-С. Chang, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **349:13-14** (2011), 713–718. [8] С. В. Конягин, *IV Международная конференция “Современные проблемы теории чисел и ее приложения”*. Актуальные проблемы, Часть 3, М., Мех.-мат. фак-т МГУ, 2002, 86–114. [9] М. З. Гараев, *УМН*, **65:4** (2010), 5–66.

Д. М. Ушанов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: ushanov.dmitry@gmail.com

Поступило

30.01.2012