Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Чистяков, Та Зуй Фыонг, К вопросу о качественных свойствах дифференциально-алгебраических уравнений, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 4, 596–608

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9367>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 14:50:58

К вопросу о качественных свойствах дифференциально-алгебраических уравнений

В. Ф. Чистяков, Та Зуй Фыонг

Рассматриваются линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной в области определения матрицей коэффициентов перед производной искомой вектор-функции. В работе обсуждаются структура общих решений и понятие особой точки таких систем. На основе сравнения свойств “возмущенной” и исходной задач получен достаточный критерий асимптотической устойчивости нулевого решения по Ляпунову.

Библиография: 18 названий.

DOI: 10.4213/mzm9367

1. Введение. Рассмотрим систему

$$\Lambda_1 x := A(t)\dot{x} + B(t)x = \phi(t), \quad t \in T_\infty = [\alpha, \infty), \quad (1)$$

$$x(\alpha) = a, \quad (2)$$

где $A(t)$, $B(t)$ – $(n \times n)$ -матрицы, $x \equiv x(t)$ – искомая, $\phi(t)$ – заданная вектор-функции, a – заданный вектор из $\mathbb{R}^n$, $\dot{} = d/dt$.

Предполагается, что входные данные достаточно гладкие и

$$\det A(t) \equiv 0, \quad t \in T_\infty. \quad (3)$$

Под *решением системы (1)* на $T = [\alpha, \beta] \subseteq T_\infty$ понимается вектор-функция $x \equiv x(t) \in C^1(T; \mathbb{R}^n)$, которая обращает систему в тождество на T при подстановке.

Системы вида (1), удовлетворяющие условию (3), принято называть *дифференциально-алгебраическими* уравнениями (ДАУ) [1]. В ходу также следующие термины: алгебро-дифференциальные системы (АДС) [2], дескрипторные системы [3], сингулярные системы [4]. Несмотря на то, что ДАУ интенсивно исследуются уже около 40 лет, тематика по ряду направлений по-прежнему остается актуальной. Недостаточно исследованы вопросы структуры общих решений ДАУ при наличии особых точек на T . Здесь следует отметить работу, в которой затронуты особенности численного решения ДАУ при наличии особых точек [5]. Большое внимание также привлекают вопросы исследования устойчивости решений таких систем в смысле

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №№ 11-01-93005-Вьет-а, 11-01-00639-а).

Ляпунова (см., например, работы [6]–[8] и приводимую там библиографию). Задачей данной работы является изучение качественных свойств ДАУ в этих направлениях.

2. Структура общих решений дифференциально-алгебраических уравнений. Введем основные для нас понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пространство решений (ПР) системы (1) *конечномерно на T* , если существует $(n \times \nu)$ -матрица $X_\nu(t) \in C^1(T; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\nu)$ с минимально возможным ν такая, что любая линейная комбинация $x(t, c) = X_\nu(t)c$, где вектор c пробегает $\mathbb{R}^\nu$, удовлетворяет тождеству $\Lambda_1 x(t, c) \equiv 0$ и на T нет решений системы $\Lambda_1 x = 0$ отличных от $x(t, c)$.

Ядро оператора Λ_1 *конечномерно* ($\dim \ker \Lambda_1 < \infty$), если ПР системы (1) конечномерно. Число ν будем называть *размерностью ПР* или *размерностью ядра*.

Если мы предположим, что $\det A(t) \neq 0$ для любого $t \in T$, то ПР системы $\Lambda_1 x = 0$, $t \in T$, совпадает с множеством функций $x(t, c) = X(t)c$, где $X(t)$ – *матрицант* системы $\dot{x} = -A^{-1}(t)B(t)x$, $c \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, $\nu = n$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим одно уравнение $\Lambda_1 y := t\dot{y} - 2y = 0$, $t \in T = [-1, 1]$, где

$$\begin{aligned} y(t, c) &= h_1(t)c_1 + h_2(t)c_2 \in C^1(T), & c_1, c_2 &\in \mathbb{R}, \\ h_1(t) &= \{0, t \in T_1, t^2, t \in T_2\}, & h_2(t) &= \{t^2, t \in T_1, 0, t \in T_2\}, \\ T_1 &= [-1, 0], & T_2 &= (0, 1]. \end{aligned}$$

Чтобы выделить одно решение из семейства $y(t, c)$, надо определить две константы c_1, c_2 . Таким образом, здесь $\dim \ker \Lambda_1 = 2$. Более того, можно строить одномерные уравнения $\zeta(t)\dot{y} - y = 0$, $t \in T$, где $\zeta(t)$ – аналитическая функция с нулями на T и с наперед заданной размерностью ПР в нашем смысле.

ПРИМЕР 2. Пусть задано ДАУ

$$\Lambda_1 x = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{dx}{dt} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} x = 0, \quad t \in [0, 1], \quad (4)$$

где γ – вещественный параметр. Имеем

$$\xi(t; \lambda) = \det[\lambda A(t) + B(t)] \equiv \gamma \quad \text{для всех } \lambda, \quad \text{для всех } t \in [0, 1].$$

Здесь $x_2 = -tx_1$, где $(x_1 \ x_2)^\top = x$. Тогда из первого уравнения следует, что

$$(\gamma - 1)x_1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \dim \ker \Lambda_1 = 0$$

при $\gamma \neq 1$, включая значение $\gamma = 0$.

При $\gamma = 1$ с помощью подстановки можно проверить, что любая вектор-функция вида $(-u(t) \quad tu(t))^\top$, где $u(t)$ – произвольная функция из $C^1[0, 1]$, $\top$ – символ транспонирования, является решением системы, а вектор-функции $\phi_j = (-t^j \quad t^{j+1})^\top$, $j = 0, 1, \dots$, образуют базис в пространстве решений: $\dim \ker \Lambda_1 = \infty$.

Для ДАУ с постоянными коэффициентами для конечномерности ПР необходимо и достаточно выполнения условия $\det(\lambda A + B) \neq 0$, где λ – параметр (в общем случае комплексный), и $\dim \ker \Lambda_1 = \nu = \deg \det(\lambda A + B)$ [9]. Здесь мы видим серьезные отличия свойств ДАУ с постоянными и переменными коэффициентами.

Если система (1) не является ДАУ, то любая точка из $\gamma \in T$ со свойством

$$\det A(\gamma) = 0, \quad \det A(\gamma + \delta) \neq 0, \quad \gamma + \delta \in T,$$

при произвольно малом δ является особой точкой системы (1). Тогда возможны ситуации, когда существуют пары $(\gamma, b \in \mathbb{R}^n)$, через которые проходит более одного решения системы (1) или же решений на T вообще нет. Здесь $\text{rank } A(\gamma) < n$ и $\text{rank } A(\gamma + \delta) = n$. В случае ДАУ ситуация гораздо сложнее.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим системы

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{pmatrix} -e^t & 1 \\ -e^t & 1 \end{pmatrix} \frac{dx}{dt} + x = 0, \\ 2) \quad & \begin{pmatrix} -2t & 1 \\ -2t^2 & t \end{pmatrix} \frac{dy}{dt} + y = 0, \\ 3) \quad & \begin{pmatrix} 0 & \sin(it) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{dt} + z = f, \end{aligned}$$

где $t \in T = [-1, 1]$, $i = 5, 6, \dots$. Здесь в первых двух случаях $\text{rank } A(t) = \text{const}$ для любого $t \in T$, а в третьем $\text{rank } A(t) \neq \text{const}$ на T . Формально общие решения можно записать так:

$$\begin{aligned} x(t, c) &= \frac{1}{e^t - 1} \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} c_1, \quad y_1(t, c) = h_1(t)c_1 + h_2(t)c_2, \\ z(t, c) &= f(t) - \begin{pmatrix} 0 & \sin(it) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{f}(t), \end{aligned}$$

где обозначения соответствуют обозначениям из примера 1 и $y_2(t, c) = -ty_1(t, c)$.

Система 1) не имеет ненулевых решений на T ; у системы 2) через точку $(0, b = 0)$, $b \in \mathbb{R}^n$, проходит множество решений на T ; у системы 3) нет особых точек. Итак, для ДАУ 1)–3) поведение ранга матрицы $A(t)$ на T не несет информации о наличии на T особых точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть заданы операторы

$$\tilde{\Lambda}_l := \sum_{j=0}^l \tilde{L}_j(t) \left(\frac{d}{dt} \right)^j, \quad \Lambda_k := \sum_{j=0}^k L_j(t) \left(\frac{d}{dt} \right)^j, \quad t \in T,$$

где $\tilde{L}_j(t)$ – $(n \times n)$ -матрицы из пространства $C(T; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $L_j(t)$ – $(n \times n)$ -матрицы из $C^l(T; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ со свойством

$$\tilde{\Lambda}_l \circ \Lambda_k y = y^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-1} A_j(t) \left(\frac{d}{dt} \right)^j \quad \text{для всех } y \equiv y(t) \in C^{l+k}(T; \mathbb{R}^n),$$

где $A_j(t)$ – некоторые матрицы из $C(T; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Тогда оператор $\tilde{\Lambda}_l$ будем называть *левым регуляризующим оператором* (ЛРО) для оператора $\tilde{\Lambda}_k$, а минимально возможное l – его *индексом*.

Если для оператора системы

$$\Lambda_k y = \phi(t), \quad t \in T, \quad (5)$$

определен ЛРО и $L_j(t) \in C^m(T; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $\phi(t) \in C^l(T; \mathbb{R}^n)$, где $m = 2(r + (k-1)n) + 3$, $r = \max \text{rank}\{A(t), t \in T\}$, то найдутся $(n \times d)$ -матрица $X_d(t) \in C^l(T; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d)$ со свойством

$$\text{rank } \tilde{X}(t) = d \quad \text{для всех } t \in T, \quad \tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} X_d(t) \\ \dot{X}_d(t) \\ \dots \\ X_d^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad d \leq r + (k-1)n,$$

и $(n \times n)$ -матрицы $K(t, s)$, $C_j(t)$, $j = 0, 1, \dots, l-1$, гладкие в своих областях определения и такие, что любая линейная комбинация

$$x(t, c) = X_d(t)c + \psi(t), \quad \psi(t) = \int_{\alpha}^t K(t, s)\phi(s) ds + \sum_{j=0}^{l-k} C_j(t) \left(\frac{d}{dt} \right)^j \phi(t), \quad t \in T, \quad (6)$$

где c – произвольный вектор из $\mathbb{R}^d$, является решением системы (5) и на отрезке T нет других решений. При $l - k < 0$ вектор-функция $\psi(t)$ в (6) содержит только интегральный оператор. Случаю $d = 0$ соответствует отсутствие в (6) слагаемого $X_d(t)c$ и интегрального оператора в выражении для $\psi(t)$ (см., например, неоднородное ДАУ (4) при $\gamma \neq 1$).

Доказательство получается сведением системы (5) заменой переменных к системе первого порядка с последующим применением теорем из [2].

При условии существования ЛРО для системы (1) из формулы (6) следует, что задача (1), (2) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда выполнено условие Кронекера–Капелли $\text{rank } X_d(\alpha) = \text{rank}(X_d(\alpha) \mid a - \psi(\alpha))$ [10].

Формализуем понятие особой точки ДАУ. Пусть для оператора Λ_l определен ЛРО и он обладает свойством

$$\tilde{\Lambda}_l \circ \Lambda_1 y = \begin{pmatrix} \tilde{A}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \dot{y} + \begin{pmatrix} \tilde{B}(t) \\ 0 \end{pmatrix} y \quad \text{для всех } y \equiv y(t) \in C^{l+1}(T; \mathbb{R}^n), \quad (7)$$

где матрицы $\tilde{A}(t)$, $\tilde{B}(t)$ имеют размерность $q \times n$, $q \leq n$, $\tilde{A}(t)$ имеет полный ранг на T за исключением конечного множества точек $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_i\} \subset T$ и число ненулевых строк в матрице $\tilde{B}(t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Точки t_j такие, что $\text{rank } \tilde{A}(t_j) < q$, $j = 0, 1, \dots, i$, из множества Π будем называть *особыми точками* системы (1).

ЛЕММА 1. Пусть в (1) $A(t), B(t) \in C^A(T; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ – пространству вещественно-аналитических на T матриц. Тогда существует линейный дифференциальный оператор $\tilde{\Lambda}_l$ из формулы (7), у которого коэффициенты принадлежат пространству $C^A(T; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\det A \neq 0$ на T , то лемма справедлива. Пусть $\det A = 0$ для любого $t \in T$. Согласно теореме Долежала [11] существует матрица $L \in C^A(T;$

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$) такая, что $\det L \neq 0$ для любого $t \in T$ и

$$L(A\dot{x} + Bx) = \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \end{pmatrix} x = 0, \quad LA = \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad LB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in T, \quad (8)$$

где $(\mu \times n)$ -блок B_2 имеет полный ранг для любого $t \in T$, за исключением, может быть, конечного числа точек. Здесь

$$\mu = r_1 - r, \quad r_1 = \max\{\text{rank}(A \mid B), t \in T\}, \quad r = \max\{\text{rank } A, t \in T\}.$$

Дифференцированием второй блочной строки приведем систему (9) к виду

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_2 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} B_1 \\ \dot{B}_2 \\ 0 \end{pmatrix} x = 0, \quad (9)$$

Если матрица

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

имеет полный ранг для всех $t \in T$, за исключением конечного числа точек, то лемма справедлива и

$$\tilde{\Lambda}_l = \Omega_1 = \begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} E_\mu & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-r-\mu} \end{pmatrix} L. \quad (10)$$

В противном случае процесс повторяем. В результате получим

$$\tilde{\Lambda}_l = \prod_{j=1}^l \Omega_j = \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_l & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_2 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \Omega_1, \quad (11)$$

где операторы $\tilde{\Omega}_j$ имеют структуры, аналогичные структуре оператора из формулы (10), E – единичные блоки подходящей размерности.

Покажем, что $l \leq r + 1$. Произведем в (9) замену

$$x = Ry, \quad \text{где } B_2 R = \begin{pmatrix} 0 & B_{22} \end{pmatrix}, \quad R \in C^A(T; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \\ \det B_{22} \neq 0, \quad \det R \neq 0 \quad \text{для всех } t \in T.$$

При этом исходная система преобразуется к виду

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & B_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & \dot{B}_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0, \quad t \in T. \quad (12)$$

Если ранг матрицы A_{11} в (12) полный для всех $t \in T$, за исключением конечного числа точек, то лемма справедлива и $l = 1$. В противном случае на отрезке между нулями функции $\det B_{22}$ мы можем умножить второе блочное уравнение на матрицу $A_{12} B_{22}^{-1}$ и вычесть из первого блочного уравнения. Блок A_{12} обратится в нуль.

Затем повторим рассуждения для системы (12). За $l_1 \leq r + 1$ шагов такого процесса мы исчерпаем систему, так как на каждом шаге к размерности блока $B_{22} = B_{22}^1$ будут добавляться размерности блоков $B_{22}^2, B_{22}^3, \dots, B_{22}^{l_1}$, по меньшей мере равные единице. Таким образом, мы получим оператор из равенства (7) на некотором подотрезке отрезка T , который отличается от оператора (11) на некоторое линейное преобразование. В силу аналитичности матриц A, B и преобразующих матриц $l = l_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для упрощения записи в доказательстве леммы указание зависимости от t опущено.

ЛЕММА 2 [2]. Пусть в системе (1) $A(t), B(t) \in C^{r+1}(T; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Тогда для конечномерности ПР системы (1) на T необходимо, чтобы T не содержал подотрезка $[\alpha_0, \beta_0]$ такого, что

$$\text{rank}(A(t) \mid B(t)) < n \quad \text{для всех } t \in [\alpha_0, \beta_0].$$

Следствием лемм 1, 2 является такое утверждение.

ТЕОРЕМА 1. В условиях леммы 2 ПР системы (1) конечномерно тогда и только тогда, когда существуют матрицы $P(t), Q(t) \in C^A(T; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ такие, что

$$\det P(t)Q(t) \neq 0 \quad \text{для всех } t \in T, \quad P(t)A(t)Q(t) = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}(t) & \tilde{A}_{12}(t) \\ 0 & \tilde{N}(t) \end{pmatrix},$$

$$P(t)[B(t)Q(t) + A(t)\dot{Q}(t)] = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11}(t) & \tilde{B}_{12}(t) \\ 0 & \tilde{B}_{22}(t) \end{pmatrix},$$

где $(d \times d)$ -блок $\tilde{A}_{11}(t)$ и $[(n-d) \times (n-d)]$ -блок $\tilde{B}_{22}(t)$ обладают свойствами

$$\det \tilde{A}_{11}(t) \neq 0, \quad \det \tilde{B}_{22}(t) \neq 0, \quad t \in T,$$

$\tilde{N}(t), \tilde{B}_{22}(t)$ – блочно-верхнетреугольные матрицы с идентичной структурой, причем диагональные блоки матрицы $\tilde{N}(t)$ нулевые.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 1 при $l = 1$ справедливо равенство $\tilde{N}(t) \equiv 0$, $t \in T$, $d = r$ и любой нуль старшего коэффициента многочлена

$$\xi(t; \lambda) = \det[\lambda A(t) + B(t)] = a_r(t)\lambda^r + \dots \quad (13)$$

является особой точкой системы (1).

Более того, $l = 1, d = r$, если выполнено равенство (13).

Для систем из примера 3 здесь соответственно имеем

$$\begin{aligned} \xi_1(t; \lambda) &= (-e^t + 1)\lambda + 1, \\ \xi_2(t; \lambda) &= -t\lambda + 1, \\ \xi_3(t; \lambda) &= 1, \quad t \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Нули старших коэффициентов $a_1(t)$ совпадают с особыми точками для ДАУ для первой и второй систем. Для третьей системы $l = 2$. Критерии наличия у ДАУ с $l > 1$ и конечномерным ПР особых точек на T можно найти в [13].

Если для операторов $\Lambda_1, \bar{\Lambda}_1$ с матрицами коэффициентов из $C^A(T; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ определены ЛРО, то справедливо равенство

$$\dim \ker \Lambda_1 \circ \bar{\Lambda}_1 = \dim \ker \Lambda_1 + \dim \ker \bar{\Lambda}_1. \quad (14)$$

Для систем с постоянными матрицами коэффициентов этот факт следует из теоремы Лузина [9]. Для систем с переменными матрицами коэффициентов равенство (14) получено в [12]. Возникает вопрос: можно ли получить условия, при выполнении которых равенство (14) верно для операторов ДАУ с конечномерным ядром при наличии особых точек на T .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Произведение $\Lambda_1 \circ \bar{\Lambda}_1$ может быть дифференциальным оператором порядка выше первого. Под размерностью ПР системы (5) при $k > 1$ мы понимаем размерность ПР системы первого порядка (в смысле определения 1), полученной из исходной системы стандартной заменой переменных.

3. Критерий устойчивости по Ляпунову. Методы исследования в работах [6]–[8] опираются на построение специальных проекторов. Эта операция численно неустойчива и возникает потребность найти какие-то другие подходы. В данном пункте сделан шаг в этом направлении.

Введем необходимые обозначения и понятия. Ниже используются равномерная норма q -мерного вектора $b \in \mathbb{R}^q$, и согласованная с ней норма $(q \times q)$ -матрицы $B = \{b_{ij}, i, j = 1, \dots, q\}$, а именно,

$$\|b\|_I = \max\{|b_i|, i = 1, 2, \dots, q\}, \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_q)^\top,$$

где $\top$ – символ транспонирования, $\|B\| = \max\{\sum_{j=1}^q |b_{ij}|, i = 1, 2, \dots, q\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Решение $x^*(t)$ системы (1) будем называть *устойчивым в смысле Ляпунова при $t \rightarrow +\infty$* (или, короче, *устойчивым*), если для любого $\epsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ такое, что для всех решений $x(t)$ системы (1), удовлетворяющих условию $\|x(0) - x^*(0)\| < \delta(\epsilon)$, выполняется неравенство

$$\|x(t) - x^*(t)\| < \epsilon \quad \text{для всех } t \in T_\infty.$$

Решение $x^*(t)$ системы (1) *асимптотически устойчиво при $t \rightarrow +\infty$* , если

- 1) это решение устойчиво в смысле Ляпунова;
- 2) все решения системы (1) обладают свойством

$$\|x(t) - x^*(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В определении 4 предполагается, что система (1) имеет на T_∞ некоторое семейство решений и вектор-функция $x^*(t)$ принадлежит этому семейству. Если же ДАУ (1) имеет единственное решение, то исследование на устойчивость теряет смысл (нормы в определении равны нулю).

Для исследования разностной схемы (РС) Эйлера

$$A(t_{j+1}) \frac{x_{j+1} - x_j}{\varepsilon} + B(t_{j+1}) x_{j+1} = \phi(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, \mathcal{N} - 1, \quad x_0 = a, \quad (15)$$

где $t_j = \alpha + j\varepsilon$, $\varepsilon = (\beta - \alpha)/\mathcal{N}$, применим так называемое дифференциальное приближение РС [15]. Значения решения системы (1) и входные данные в (15) разлагаем в ряд Тейлора в точке t_{j+1} . Например, $x(t_{j+1}) = x(t_j) + \varepsilon \dot{x}(t_j) + o(\varepsilon)$. Эти разложения подставим в (15) и соберем малые члены в правой части. Имеем

$$[A(t_j) + \varepsilon B(t_j)]\dot{x}(t_j) + B(t_j)x(t_j) = \phi(t_j) + \zeta(\varepsilon), \quad (16)$$

где $\|\zeta(\varepsilon)\| = o(\varepsilon)/\varepsilon$. Отбросим в (16) малые члены в правой части. Получим

$$[A(t) + \varepsilon B(t)]\dot{x}_\varepsilon + B(t)x_\varepsilon = \phi(t), \quad \varepsilon > 0, \quad t \in T. \quad (17)$$

Если начиная с некоторого $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ в (17) $\det[A(t) + \varepsilon B(t)] \neq 0$ для любого $t \in T$, то

$$\dot{x}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon(t)x_\varepsilon + \phi_\varepsilon(t), \quad t \in T, \quad (18)$$

где

$$\mathcal{A}_\varepsilon(t) = -[A(t) + \varepsilon B(t)]^{-1}B(t), \quad \phi_\varepsilon(t) = [A(t) + \varepsilon B(t)]^{-1}\phi(t).$$

Для исследования качественных свойств системы (18) существует хорошо разработанный математический аппарат (см., например, [14]). Возникает вопрос о связи динамических свойств систем (1) и (18).

Сформулируем такое утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть в системе (1) матрицы A, B постоянны, а пучок матриц $\lambda A + B$ регулярен: т.е. существует $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ со свойством $\det(\lambda_0 A + B) \neq 0$ и $\phi \in C^{2k}(T; \mathbb{R}^n)$, где k – минимальное натуральное число, начиная с которого

$$\text{rank } W^k = \text{rank } W^{k+1}, \quad \text{где } W = [(\lambda_0 A + B)^{-1}A].$$

Тогда

- 1) система (1) имеет общее решение вида (6), где $l = k$, $d = \deg \det(\lambda A + B)$, где $\deg$ – символ степени многочлена по λ ;
- 2) при любых начальных данных $x_\varepsilon(\alpha) = a$ найдется вектор c_* из (6) такой, что

$$\begin{aligned} \max_{t \in [\alpha + \varrho, \beta]} \|x(t, c_*) - x_\varepsilon(t)\| &\leq \kappa \varepsilon, \\ \max_{t \in [\alpha, \alpha + \varrho)} \|x(t, c_*) - x_\varepsilon(t)\| &= O\left(\frac{1}{\varepsilon^{2k-2}}\right), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\varrho = O(\varepsilon)$, $\kappa = \text{const} > 0$;

- 3) при любых начальных данных $x_0 = a$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|x(t_j, c_*) - x_j\| &\leq \kappa_1 \varepsilon, \quad j = l, l+1, \dots, \mathcal{N}, \\ \max \|x(t_j, c_*) - x_j\| &= O\left(\frac{1}{\varepsilon^{l-1}}\right), \quad j = 0, 1, \dots, l-1, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\kappa_1 = \text{const} > 0$, вектор c_* совпадает с вектором c_* из (19);

- 4) если среди корней уравнения $\det(\lambda A + B) = 0$ нет мнимых корней, то начиная с некоторого $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ нулевые решения систем (1), (18) устойчивы (асимптотически устойчивы) одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [10], что в случае регулярного пучка матриц $\lambda A + B$ существуют постоянные матрицы P, Q со свойством

$$P(AQ\dot{y} + BQy) = \text{diag}\{E_d, N\}\dot{y} + \text{diag}\{J, E_{n-d}\}y = P\phi(t), \quad x = Qy, \quad (21)$$

где E_d, E_{n-d} – единичные матрицы размерности d и $n = d$, $N^k = 0$. Следовательно, в (6) и определении 1 можно принять

$$K(t, s) = Q \text{diag}\{e^{-J(t-s)}, 0\}P, \quad C_j = Q \text{diag}\{0, -N^j\}P, \quad N^0 = E_{n-d},$$

$$X_d(t) = Q \begin{pmatrix} e^{-J(t-\alpha)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Lambda}_k := Q \begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{k-1} \left[-N \left(\frac{d}{dt} \right) \right]^j \end{pmatrix} P.$$

Если ввести разбиение $y = (y_1^\top, y_2^\top)^\top$, то

$$y_2 = \sum_{j=0}^{k-1} \left[-N \left(\frac{d}{dt} \right) \right]^j f_2(t),$$

где $P\phi(t) = (f_1(t)^\top, f_2(t)^\top)^\top$ и других решений подсистема $N\dot{y}_2 + y_2 = f_2(t)$ не имеет. Пункты 2), 3) утверждения теоремы доказаны соответственно в работах [4] и [16], кроме утверждения, что последовательности x_j и $x_\varepsilon(t)$ сходятся к одному и тому же решению системы (1), причем решение задачи (1), (2) может не существовать. Решения задач

$$(E_d + \varepsilon J)\dot{y}_{1,\varepsilon} + Jy_{1,\varepsilon} = f_1(t),$$

$$\frac{y_{1,j+1} - y_{1,j}}{\varepsilon} + Jy_{1,j+1} = f_1(t_{j+1}), \quad y_{1,\varepsilon}(\alpha) = y_{1,0} = b_1,$$

сходятся к решению задачи

$$\dot{y}_1 + Jy_1 = f_1(t), \quad y_1(\alpha) = b_1, \quad \text{где } b = Q^{-1}a = (b_1^\top, b_2^\top)^\top.$$

Таким образом, система (1) имеет решение при $x(\alpha) = \tilde{a} = Q(b_1^\top, y_2(\alpha)^\top)^\top$. Следовательно, найдется и соответствующий вектор $c_* \in \mathbb{R}^d$.

Далее, пусть система (1) однородная. В системе (21) подсистема $N\dot{y}_2 + y_2 = 0$ имеет только нулевое решение. Пусть нулевое решение системы (1) устойчиво. Тогда матрицы P, Q можно выбрать так, что $J = \text{diag}\{J_1, 0\}$, где блок J_1 имеет размерность $(\nu \times \nu)$ и все собственные числа блока J_1 имеют положительные вещественные части:

$$\lambda_j(J_1) = v_j + iw_j, \quad v_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, \nu.$$

Матрицу возмущенной системы (6) можно представить в виде произведения:

$$\mathcal{A}_\varepsilon = -Q \text{diag}\{(E_\nu + \varepsilon J_1)^{-1} J_1, 0, (N + \varepsilon E_{n-d})^{-1}\} Q^{-1}.$$

Все собственные блоков $(E_\nu + \varepsilon J_1)^{-1} J_1, N + \varepsilon E_{n-d})^{-1}$ имеют отрицательные вещественные части, все нулевые собственные числа матрицы $\mathcal{A}_\varepsilon$ простые. Таким образом, для устойчивости (асимптотической устойчивости) нулевого решения системы (1) необходимо и достаточно устойчивости (асимптотической устойчивости) нулевого решения (18).

Допустим теперь, что нулевое решение (1) неустойчиво. В этом случае вещественная часть хотя бы одного собственного числа $\lambda_j(J_1) = v_j + iw_j$ отрицательна или вместо нулевого блока стоит блок M такой, что $M^\mu = 0$, $\mu \leq d - \nu$. Тогда при достаточно малом ε в матрице $\mathcal{A}_\varepsilon$ блок $(E_\nu + \varepsilon J_1)^{-1} J_1$ имеет собственное число с отрицательной вещественной частью либо блок $(E_{d-\nu} + \varepsilon M)^{-1} M$ содержит непротые нулевые числа.

Взаимосвязь свойств однородных систем (1) и (18) при наличии мнимых корней у многочлена $\det(\lambda A + B) = 0$ теряется.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим систему

$$\dot{x} + \begin{pmatrix} iE_2 + N & 0 \\ 0 & -iE_2 + N \end{pmatrix} x = 0, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Нулевое решение этой системы неустойчиво. Тем не менее, собственные числа системы (18), поставленной в соответствие нашей системе, имеют вид

$$\text{diag} \left\{ \frac{\varepsilon + i}{\sigma} E_2, \frac{\varepsilon - i}{\sigma} E_2 \right\}, \quad \sigma = 1 + \varepsilon^2,$$

и возмущенная система асимптотически устойчива.

Еще сложнее ситуация для нестационарных систем. Существовала гипотеза, что если начиная с некоторого $j \geq j_0$ РС (15) сходится, то начиная с некоторого $\varrho > 0$ выполняется оценка (19) при $t \in [\alpha + \varrho, \beta]$ и обратно. Но это не так.

ПРИМЕР 5. Выпишем неоднородную систему (4) и ее возмущенный аналог

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} x &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} t + \varepsilon\gamma & 1 \\ \varepsilon t & \varepsilon \end{pmatrix} \dot{x}_\varepsilon + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} x_\varepsilon &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $t \in [0, \beta]$, γ, a, b – параметры из $\mathbb{R}^1$. Произведя в (11) замены

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix} y,$$

получим две системы с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{y} + \begin{pmatrix} \gamma - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \varepsilon\gamma & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \dot{y}_\varepsilon + \begin{pmatrix} \gamma - 1 & 0 \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix} y_\varepsilon &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (23)$$

Ниже предполагается, что $\gamma \neq 1$. Системы (23) имеют точки покоя

$$y = \begin{pmatrix} \frac{a}{\gamma - 1} & b \end{pmatrix}^\top, \quad y_\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{a}{\gamma - 1} & b + \varepsilon \frac{a}{\gamma - 1} \end{pmatrix}^\top.$$

Вторая из систем (23) приводима к форме Коши $\dot{y}_\varepsilon = \mathcal{M}y_\varepsilon + \varphi$, и матрица $\mathcal{M}$ имеет собственные числа

$$\lambda_1 = -\frac{1+\omega}{\varepsilon}, \quad \lambda_2 = -\frac{1-\omega}{\varepsilon}, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}.$$

Итак, приняв $y_\varepsilon(0) = y(0) = \begin{pmatrix} a/(\gamma-1) & b \end{pmatrix}^\top$, получим

$$\begin{aligned} \max\{\|y(t) - y_\varepsilon(t)\|, t \in [0, \beta]\} &\rightarrow \infty, & \gamma \in (-1, 0), \\ \max\{\|y(t) - y_\varepsilon(t)\|, t \in [0, \beta]\} &\rightarrow 0, & \gamma \in (0, 1). \end{aligned}$$

Связь со свойствами РС Эйлера (15) теряется. Справедливы оценки

$$\begin{aligned} \max\{\|x(t_j, c_*) - x_j\|, j = 0, 1, \dots, \mathcal{N}\} &= O(\varepsilon), & |\gamma| > 1, \\ \|x(t_j, c_*) - x_j\| &= O\left(\frac{1}{\gamma^j}\right), & \gamma \in (-1, 1), \end{aligned}$$

(см., например, [2]).

Для нестационарных линейных ДАУ индекса 1 корреляция свойств РС (15) и системы (18) сохраняется.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $A(t), B(t), \phi(t) \in C^m(T_\infty)$, $m \geq 1$. Тогда

- 1) для того, чтобы система (1) имела индекс $l = 1$, необходимо и достаточно выполнения критерия “ранг-степень”:

$$\text{rank } A(t) = \deg \det[\lambda A(t) + B(t)] = r = \text{const} \quad \text{для всех } t \in T,$$

причем $d = r$ в формуле (6);

- 2) если $l = 1$, то существуют $(n \times n)$ -матрицы $P(t), Q(t) \in C^m(T; \mathbb{R}^n)$ такие, что

$$\begin{aligned} \det P(t)Q(t) &\neq 0 \quad \text{для всех } t \in T, \\ P(t)[\lambda A(t) + B(t)]Q(t) &= \text{diag}\{\lambda E_r + J(t), E_{n-r}\}, \end{aligned}$$

где $J(t)$ – некоторый блок;

- 3) если $\text{rank } A(\alpha) = \text{rank}\{A(\alpha) \mid \phi(\alpha) - B(\alpha)a\}$ и $l = 1$, то на T определено единственное решение задачи (1) $x(t) \in C^m(T; \mathbb{R}^n)$;
- 4) если $m \geq 2$ и $l = 1$, то система (17) начиная с некоторого $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ приводима к нормальной форме (18) и выполнены оценки (19) и (20);
- 5) если $m \geq 2$, $l = 1$, матрица $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$ симметричная, причем

$$\min\{\lambda_j(t), t \in T_\infty, j = 1, 2, \dots, r\} \geq \gamma > 0, \quad (24)$$

где $\lambda_j(t)$ – корни уравнения $\det[\lambda A(t) + B(t)] = 0$, $t \in T_\infty$, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты 1)–4) утверждения теоремы доказаны в работах [2], [17], [18] и нужны для доказательства пункта 5).

Для матрицы $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$ из системы (18) в условиях теоремы с учетом пункта 2) утверждения справедливо представление

$$\mathcal{A}_\varepsilon(t) = -Q(t) \operatorname{diag} \left\{ [E_r + \varepsilon J(t)]^{-1} J(t), \frac{E_{n-d}}{\varepsilon} \right\} Q^{-1}(t),$$

причем матрица $E_r + \varepsilon J(t)$ обратима при любом $\varepsilon > 0$ силу условия (24). Следовательно, максимальное собственное число матрицы $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$ меньше числа $-\gamma$ и справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt} \|x_\varepsilon\|^2 = (\mathcal{A}_\varepsilon(t)x_\varepsilon, x_\varepsilon),$$

где $(\cdot, \cdot)$ – символ скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}_\varepsilon(t) = \mathcal{A}_\varepsilon^\top(t)$ по условию. Так как $\mathcal{A}_\varepsilon(t) < 0$, $t \in T_\infty$, имеем $\|x_\varepsilon\|^2 \rightarrow 0$, $t \in T_\infty$.

Далее, пусть существует $x^*(t)$ – решение ДАУ (1) со свойством $\|x^*(t)\| > \theta$ для любого $t \in T_\infty$, где θ – фиксированное положительное число. Найдем решение системы (18) с начальными данными $x_\varepsilon(\alpha) = x^*(\alpha)$. Выберем положительное число $\delta \ll \theta$ и найдем отрезок T такой, что $\|x_\varepsilon(\beta)\| < \delta$. Согласно пункту 4) справедлива оценка (19). Получили противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Нулевое решение системы (1) устойчиво, если отрицательны собственные числа матрицы $\widetilde{\mathcal{A}}_\varepsilon(t) = [\mathcal{A}_\varepsilon(t) + \mathcal{A}_\varepsilon^\top(t)]/2$ [14]. Но здесь не удалось пока установить связь между корнями уравнения $\det[\lambda A(t) + B(t)] = 0$ и собственными числами матрицы $\widetilde{\mathcal{A}}_\varepsilon(t)$.

ПРИМЕР 6. Выпишем систему

$$\begin{pmatrix} \sin(g(t)) - 1 & \cos(g(t)) \\ \cos(g(t)) & -\sin(g(t)) - 1 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} x = \phi(t), \quad t \in T_\infty,$$

где $g(t)$ – произвольная функция из $C^m(T_\infty)$, $m \geq 2$. Здесь

$$\det[\lambda A(t) + B(t)] = 2\gamma\lambda + \gamma^2.$$

Из формулы (10) следует, что

$$\deg \det[\lambda A(t) + B(t)] \leq r \quad \text{для всех } t \in T_\infty$$

и мы видим, что здесь

$$\operatorname{rank} A(t) = 1 \quad \text{для всех } t \in T_\infty.$$

Из теоремы 3 следует, что индекс $l = 1$ и общее решение представимо в виде (6). Более того, если $\gamma < 0$, то нулевое решение ДАУ асимптотически устойчиво. Если $g(t) = 2t$, $\gamma = -2$, то решение однородной системы можно выписать явно:

$$x(t) = c \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) & \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}^\top e^{-t},$$

где c – произвольная константа.

Более тонкий анализ устойчивости ДАУ основан на вычислении показателей Ляпунова [14]. В связи с этим возникает вопрос о связи показателей Ляпунова систем (1) и (18). В настоящее время ведутся исследования в этом направлении.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. E. Brenan, S. L. Campbell, L. R. Petzold, *Numerical Solution of Initial – Value Problems in Differential Algebraic Equations*, Classics Appl. Math., **14**, SIAM, Philadelphia, PA, 1996.
- [2] Ю. Е. Бояринцев, В. Ф. Чистяков, *Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования*, Наука, Новосибирск, 1998.
- [3] С. П. Зубова, “Решение задачи управления для линейной дескрипторной системы с прямоугольно-матричными коэффициентами”, *Матем. заметки*, **88**:6 (2010), 885–896.
- [4] Ю. Е. Бояринцев, *Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, Новосибирск, 1980.
- [5] V. K. Gorbunov, I. V. Lutoshkin, “The parameterization method in singular differential-algebraic equations”, *Computational Science – ICCS 2003*, 2658, Lecture Notes in Comput. Sci., Springer-Verlag, Berlin, 2003, 483–491.
- [6] Nguyen Dinh Cong, Hoang Nam, “Lyapunov regularity of linear differential algebraic equations of index 1”, *Acta Math. Vietnam.*, **29**:1 (2004), 1–21.
- [7] S. L. Campbell, V. H. Linh, “Stability criteria for differential-algebraic equations with multiple delays and their numerical solutions”, *Appl. Math. Comput.*, **208**:2 (2009), 397–415.
- [8] V. H. Linh, V. Mehrmann, “Lyapunov, Bohl, and Sacker-Sell spectral intervals for differential-algebraic equations”, *J. Dynam. Differential Equations*, **21**:1 (2009), 153–194.
- [9] Н. Н. Лузин, “К изучению матричной системы теории дифференциальных уравнений”, *Автомат. и телемех.*, **1940**:5, 4–66.
- [10] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1988.
- [11] L. M. Silverman, R. S. Bucy, “Generalizations of theorem of Dolezal”, *Math. System Theory*, **4**:4 (1970), 334–339.
- [12] В. Ф. Чистяков, “О нетеровом индексе линейных алгебро-дифференциальных систем. I”, *Сиб. матем. журн.*, **34**:3 (1993), 209–219.
- [13] В. Ф. Чистяков, *Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром*, Наука, Новосибирск, 1996.
- [14] Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, М., 1967.
- [15] Н. Н. Яненко, Ю. И. Шокин, “О корректности первых дифференциальных приближений разностных схем”, *Докл. АН СССР*, **182**:4 (1968), 776–778.
- [16] Ю. Е. Бояринцев, В. М. Корсуков, “Применение разностных методов к решению регулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Вопросы прикладной математики*, Сибирский энергетический институт (СЭИ) СО АН СССР, Иркутск, 1975, 140–152.
- [17] В. Ф. Чистяков, “Применение разностных методов для решения линейных систем, не разрешенных относительно производных”, *Методы оптимизации и их приложения*, Сибирский энергетический институт (СЭИ) СО АН СССР, Иркутск, 1982, 56–60.
- [18] В. Ф. Чистяков, “О влиянии возмущений входных данных при решении линейных сингулярных систем ОДУ”, *Приближенные методы анализа и их приложения*, Сибирский энергетический институт (СЭИ) СО АН СССР, Иркутск, 1985, 136–145.

В. Ф. Чистяков

Институт динамики систем и теории управления
СО РАН, г. Иркутск
E-mail: chist@icc.ru

Поступило

24.01.2012

Та Зуй Фыонг

Hanoi Institute of Mathematics, Vietnam
E-mail: tdphuong@math.ac.vn