Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Цыганов, К задаче Чаплыгина о качении шара,
Матем. заметки, 2013, том 94, выпуск 4, 637–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9368>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:06:39

К задаче Чаплыгина о качении шара

А. В. Цыганов

Введение. Шаром Чаплыгина называют динамически несимметричное уравновешенное твердое тело со сферической поверхностью, которое катится без проскальзывания по шероховатой плоскости [1]. В подвижной системе координат, связанной с главными осями, угловой момент шара относительно точки касания имеет вид

$$M = (\mathbf{I} + d\mathbf{E})\omega - d(x, \omega)x, \quad d = ma^2. \quad (1)$$

Здесь ω – угловая скорость, m – масса, $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ – тензор инерции и a – радиус шара, $x = (x_1, x_2, x_3)$ – единичный вектор нормали к поверхности шара в точке контакта, а $\mathbf{E}$ – единичная матрица. Скобки (x, y) обозначают обычное скалярное произведение, а $x \times y$ – векторное произведение трехмерных векторов. Уравнения движения

$$\dot{M} = M \times \omega, \quad \dot{x} = x \times \omega. \quad (2)$$

обладают интегралами движения

$$H_1 = (M, \omega), \quad H_2 = (M, M), \quad H_3 = (x, x), \quad H_4 = (x, M) \quad (3)$$

и инвариантной формой объема

$$\mu = g^{-1} dx dM, \quad g = \sqrt{1 - d(x, \mathbf{A}x)}, \quad (4)$$

где $\mathbf{A} = (\mathbf{I} + d\mathbf{E})^{-1} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$. Согласно [2] интегралы движения (3) находятся в инволюции относительно скобок Пуассона

$$\{M_i, M_j\}_g = \varepsilon_{ijk} \left(gM_k - \frac{d(M, \mathbf{A}x)}{g} x_k \right), \quad \{M_i, x_j\}_g = \varepsilon_{ijk} g x_k, \quad \{x_i, x_j\}_g = 0, \quad (5)$$

где ε_{ijk} – полностью антисимметричный тензор. Уравнения движения (2) после замены времени

$$dt \rightarrow g dt \quad (6)$$

становятся гамильтоновыми относительно скобки Пуассона (5).

Приведение скобки Пуассона к канонической. В работе [3] доказано, что скобки Пуассона (5) являются деформацией канонических скобок Ли–Пуассона на алгебре $e^*(3)$ в когомологии Пуассона–Лихнеровича. В силу этого должна существовать замена переменных, которая приводит скобки Пуассона (5) для шара Чаплыгина к каноническим скобкам. Нашей основной целью является построение такого преобразования.

Напомним, что канонические скобки Ли–Пуассона для коалгебры $e^*(3)$ группы движений трехмерного евклидова пространства имеют вид

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k, \quad \{L_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = 0, \quad (7)$$

и обладают функциями Казимира (x, x) и (x, L) .

Если $(x, M) = 0$, то скобки Пуассона (5) приводятся к каноническим (7) преобразованием $L_i = g^{-1}(x)M_i$, см. [2]. На симплектических листах общего положения преобразование выглядит следующим образом:

$$L_i = g^{-1}(x)(M_i - b h_i(x)), \quad b = (x, M), \quad (8)$$

где функции $h_i(x)$ удовлетворяют одному алгебраическому уравнению

$$c g(x) = 1 + \sum_{i=1}^3 x_i h_i(x) \iff (x, L) = c(x, M), \quad c \in \mathbb{R},$$

и одному дифференциальному уравнению

$$\sum_{i=1}^3 \left[h_i^2 - \partial_i h_i + h_i \sum_{j \neq i} (x_j \partial_i h_j - x_i \partial_j h_j) \right] = 0, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Так как переменные x_k зависимы, то для решения этих уравнений мы воспользуемся стандартным представлением коалгебры $e^*(3)$ через углы Эйлера и сопряженные им импульсы

$$\begin{aligned} x_1 &= \sin \phi \sin \theta, & M_1 &= \left(\frac{\sin \phi}{\sin \theta} (\cos \theta p_\phi + b) - \cos \phi p_\theta \right), \\ x_2 &= \cos \phi \sin \theta, & M_2 &= \left(\frac{\cos \phi}{\sin \theta} (\cos \theta p_\phi + b) + \sin \phi p_\theta \right), \\ x_3 &= \cos \theta, & M_3 &= -p_\phi, \end{aligned}$$

и аналогично для переменных L . Здесь и всюду далее мы предполагаем, что

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

а все остальные симплектические листы $e^*(3)$ могут быть получены из данного листа преобразованием $x \rightarrow rx$.

Входящие в определение переменных L_i импульсы p_ϕ и p_θ удовлетворяют каноническим скобкам Пуассона

$$\{\phi, p_\phi\} = \{\theta, p_\theta\} = 1, \quad \{\phi, \theta\} = \{\phi, p_\theta\} = \{\theta, p_\phi\} = \{p_\phi, p_\theta\} = 0, \quad (9)$$

порождающими скобки (7). С другой стороны, входящие в определение переменных M_i импульсы p_ϕ и p_θ удовлетворяют скобкам Пуассона вида

$$\begin{aligned} \{\phi, p_\phi\}_g &= \{\theta, p_\theta\}_g = g, & \{\phi, \theta\}_g &= \{\phi, p_\theta\}_g = \{\theta, p_\phi\}_g = 0, \\ \{p_\phi, p_\theta\} &= \frac{\partial g}{\partial \theta} p_\phi - \frac{\partial g}{\partial \phi} p_\theta - b d g \cos \theta (a_1 \sin^2 \phi + a_2 \cos^2 \phi). \end{aligned} \quad (10)$$

Линейное по моментам преобразование

$$p_\phi \rightarrow g^{-1} p_\phi + b h_1(\phi, \theta), \quad p_\theta \rightarrow g^{-1} p_\theta + b h_2(\phi, \theta),$$

переводит скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_g$ (10) в канонические скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ (9), если справедливо уравнение

$$\left(\frac{\partial h_1}{\partial \theta} - \frac{\partial h_2}{\partial \phi} \right) - b d g^{-1} \cos \theta (a_1 \sin^2 \phi + a_2 \cos^2 \phi) = 0. \quad (11)$$

Для функции $g = \sqrt{1 - d(a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2)}$ (см. (4)), отвечающей шару Чаплыгина, уравнение (11) имеет частное решение

$$h_2 = 0, \quad h_1 = g^{-1} \cos \theta \left(1 - \frac{1}{1 - d(a_1 \sin^2 \phi + a_2 \cos^2 \phi)} \right). \quad (12)$$

Заметим, что если $h_1 = 0$ или $h_1 = h_2$, то решения уравнения (11) будут эллиптическими функциями от углов Эйлера ϕ, θ .

ТЕОРЕМА 1. *Отвечающее решению (12) пуассоново отображение (8)*

$$\begin{aligned} L_1 &= g^{-1} \left(M_1 + \frac{bd(a_1x_1^2 + a_2x_2^2)x_1x_3^2}{(d(a_1x_1^2 + a_2x_2^2) - x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)} - \frac{bx_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) + \frac{bcx_1}{x_1^2 + x_2^2}, \\ L_2 &= g^{-1} \left(M_2 + \frac{bd(a_1x_1^2 + a_2x_2^2)x_2x_3^2}{(d(a_1x_1^2 + a_2x_2^2) - x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)} - \frac{bx_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) + \frac{bcx_2}{x_1^2 + x_2^2}, \\ L_3 &= g^{-1} \left(M_3 - \frac{bd(a_1x_1^2 + a_2x_2^2)x_3}{(d(a_1x_1^2 + a_2x_2^2) - x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

при

$$(x, x) = 1, \quad (x, L) = c(x, M), \quad (x, M) = b$$

приводит скобки Пуассона (5) к каноническим скобкам Ли–Пуассона (7).

Таким образом, заменой времени и координат исходная неголомомная система (2) приводится к гамильтоновой интегрируемой системе на коалгебре $e^*(3)$ с каноническими скобками Пуассона.

Возможные приложения. Если положить $c = 0$ в (13), то мы получим пуассоново отображение симплектических листов общего положения скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_g$ (5) в сингулярные листы канонической скобки Ли–Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ (7) при

$$(x, x) = 1, \quad (x, L) = 0,$$

которые симплектоморфны кокасательному расслоению T^*S сферы единичного радиуса. В этом случае, заменяя в интегралах движения (3) переменные M на L и используя затем сферо-конические координаты на сфере $u_{1,2}$

$$x_i = \sqrt{\frac{(u_1 - e_i)(u_2 - e_i)}{(e_j - e_i)(e_k - e_i)}}, \quad L_i = \frac{-2\varepsilon_{ijk}x_jx_k(e_j - e_k)}{u_1 - u_2}((e_i - u_1)p_1 - (e_i - u_2)p_2),$$

при $e_i = dI_i^{-1}$, мы получим

$$\begin{aligned} H_1 &= ap_1^2 + 2bp_1p_2 + cp_2^2 + dp_1 + ep_2 + f, \\ H_2 &= Ap_1^2 + 2Bp_1p_2 + Cp_2^2 + Dp_1 + Ep_2 + F. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $p_{1,2}$ – моменты сопряженные координатам $u_{1,2}$, а коэффициенты полиномов в (14) являются аналитическими функциями от $u_{1,2}$. Согласно [4] гамильтоновы системы с такими интегралами допускают частичное разделение переменных в уравнении Гамильтона–Якоби. Переменные разделения $s_{1,2}$ в этом случае являются корнями уравнения

$$(B - bs)^2 - (A - as)(C - cs) = 0,$$

которые в нашем случае равны $s_{1,2} = d(1 + u_{1,2})u_{1,2}^{-1}$. Как и для случая Клебша [4], эти переменные эволюционируют на примииане алгебраической кривой, которая не является гиперэллиптической, в отличие от разделения переменных у Чаплыгина [1].

Практически для всех известных гамильтоновых интегрируемых систем на коалгебре Ли $e^*(3)$ можно построить несколько различных матриц Лакса, используя метод сдвига аргумента или метод классической r -матрицы. Мы надеемся, что эти же методы могут быть использованы для построения матрицы Лакса для гамильтоновой системы на $e^*(3)$, отвечающей шару Чаплыгина и, тем самым, для самого шара Чаплыгина. Кроме того, известно, что канонические скобки Ли–Пуассона (7) совместны с несколькими другими скобками Пуассона. Применяя к этим скобкам обратное к (13) отображение мы получим набор скобок совместных со скобками Пуассона (5) для шара Чаплыгина.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. А. Чаплыгин, *Собрание сочинений*. Т. 1. *Теоретическая механика*. Математика, Гостехиздат, М.–Л., 1948, 76–101. [2] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Матем. заметки*, **70**:5 (2001), 793–795. [3] A. V. Tsiganov, *J. Geom. Mech.*, **3**:3 (2011), 337–362. [4] В. Г. Марихин, В. В. Соколов, *Нелинейная динам.*, **4**:3 (2008), 313–322.

А. В. Цыганов

Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail: andrey.tsiganov@gmail.com

Поступило

13.02.2012

Исправленный вариант

22.01.2013