Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Степанов, Числа Бетти и Тачибаны, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 6, 926–936

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9369>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 15:57:15

Числа Бетти и Тачибаны

С. Е. Степанов

В статье рассматриваются числа Тачибаны $t_r(M)$, Киллинга $k_r(M)$ и планарности $p_r(M)$ как размерности векторных пространств соответственно конформно киллинговых, козамкнутых и замкнутых конформно киллинговых r -форм, $1 \leq r \leq n-1$, заданных “в целом” на n -мерном, $n \geq 2$, компактном римановом многообразии (M, g) , в их связи с числами Бетти $b_r(M)$. В частности, доказано, что если число Бетти $b_r(M) = 0$, то соответствующее число Тачибаны имеет вид $t_r(M) = k_r(M) + p_r(M)$ для $t_r(M) > k_r(M) > 0$. В частном случае, когда $b_1(M) = 0$ и $t_1(M) > k_1(M) > 0$, многообразие (M, g) конформно диффеоморфно евклидовой сфере.

Библиография: 31 название.

DOI: 10.4213/mzm9369

1. Введение и результаты. Известно (см. [1; примечание 11]), что алгебра Ли $\mathfrak{S}(M, g)$ группы $C(M, g)$ инфинитезимальных конформных преобразований n -мерного, $n \geq 3$, связного риманова многообразия (M, g) реализуется в виде пространства *конформно киллинговых векторных полей* и имеет размерность $\dim \mathfrak{S}(M, g) \leq (1/2)(n+1)(n+2)$. Равенство достигается на конформно плоском римановом многообразии (M, g) .

Обобщением конформно киллинговых векторных полей являются *конформно киллинговые r -формы*, $1 \leq r \leq n-1$, или, иначе, *конформные тензоры Киллинга–Яно* ранга r . Для $r = 1$ такие формы дуальны конформно киллинговым векторным полям. На протяжении всей почти полувековой истории, начиная со статьи Тачибаны [2] и заканчивая работами последних лет [3]–[5], конформно киллинговые формы вызвали активный интерес исследователей, в том числе и из-за их многочисленных физических приложений [6], [7], [8; с. 414; 426], [9].

В частности, в статье [4] было установлено, что на n -мерном связном многообразии (M, g) размерность t_r пространства *конформно киллинговых r -форм*, $1 \leq r \leq n-1$, имеет ограничение

$$t_r \leq \frac{(n+2)!}{(r+1)!(n-r+1)!}$$

и что равенство достигается на конформно плоском римановом многообразии.

Для уточнения этого результата рассмотрим n -мерное, $n \geq 2$, пространство Лобачевского, которое является римановым многообразием постоянной отрицательной кривизны. В пространстве Лобачевского, как это следует из сформулированных выше утверждений, размерность t_r пространства конформно киллинговых r -форм,

$1 \leq r \leq n - 1$, равна $(n + 2)! / ((r + 1)!(n - r + 1)!)$ и, в частности, размерность пространства конформно киллинговых векторных полей равна $(1/2)(n + 1)(n + 2)$. Факторизуя пространство Лобачевского по подходящей дискретной группе движений [10; § 4], [11; гл. 8, § 12], [12; гл. 2, § 2.4], мы получаем компактное многообразие постоянной отрицательной кривизны. На таком многообразии не существует отличных от нуля *глобально заданных* конформно киллинговых форм [13] и, в частности, конформно киллинговых векторных полей [14; гл. II, § 12].

Таким образом, в известных утверждениях речь идет о размерностях векторных пространств конформно киллинговых r -форм, $1 \leq r \leq n - 1$, и векторных полей, заданных в окрестности произвольной точки риманова многообразия (M, g) .

В настоящей статье мы остановимся на изучении размерности пространства конформно киллинговых r -форм, $1 \leq r \leq n - 1$, и, в частности, пространства конформно киллинговых векторных полей, глобально заданных на n -мерном, $n \geq 2$, компактном (без границы) римановом многообразии (M, g) . Эта размерность в статье [13] была названа *числом Тачибаны* $t_r(M)$ по аналогии с *числом Бетти* $b_r(M)$ компактного многообразия (M, g) на том основании [15; гл. 4, § 2], что число $b_r(M)$ равно размерности пространства гармонических r -форм на (M, g) . Кроме того, как это установлено в [16], числа Тачибаны обладают свойством двойственности $t_r(M) = t_{n-r}(M)$, аналогом двойственности Пуанкаре для чисел Бетти $b_r(M) = b_{n-r}(M)$ и являются скалярными конформными инвариантами многообразия (M, g) .

Группа инфинитезимальных изометрий $I(M, g)$, является подгруппой группы $C(M, g)$. Ее алгебра Ли $\mathfrak{F}(M, g)$ имеет размерность, не превосходящую $n(n + 1)/2$, и реализуется в виде пространства киллинговых векторных полей [1; гл. VI, § 3]. Каждое такое поле можно определить как *козамкнутое* конформно киллинговое векторное поле.

В свою очередь, *замкнутые* конформно киллинговые векторные поля составляют пространство $\mathcal{L}(M, g)$ *конциркулярных векторных полей* [17], которое имеет размерность $\dim \mathcal{L}(M, g) \leq n + 1$.

Равенства в приведенных выше двух оценках размерностей достигаются на многообразии (M, g) постоянной кривизны, где

$$\dim \mathfrak{S}(M, g) = \dim \mathfrak{F}(M, g) + \dim \mathcal{L}(M, g). \quad (1.1)$$

Обобщением киллинговых векторных полей являются *киллинговые r -формы*, $1 \leq r \leq n - 1$, т.е. козамкнутые конформно киллинговые r -формы или, иначе, *тензоры Киллинга-Яно* ранга r [14; гл. III, § 3]; [18; гл. 31, § 3]. Для $r = 1$ такие формы дуальны киллинговым векторным полям. В свою очередь, обобщением конциркулярных векторных полей служат *планарные r -формы*, $1 \leq r \leq n - 1$, т.е. замкнутые конформно киллинговые r -формы или, иначе, *замкнутые конформные тензоры Киллинга-Яно* ранга r [3], [9]. Для $r = 1$ такие формы дуальны конциркулярным векторным полям.

Было установлено в [19], [20], что на n -мерном связном римановом многообразии (M, g) размерности k_r и p_r пространств *киллинговых* и *планарных r -форм*, $1 \leq r \leq n - 1$, удовлетворяют следующим оценкам:

$$k_r \leq \frac{(n + 1)!}{(r + 1)!(n - r)!}, \quad p_r \leq \frac{(n + 1)!}{r!(n - r + 1)!}. \quad (1.2)$$

При этом равенства достигаются только на римановом многообразии постоянной кривизны, где, как это проверяется непосредственно,

$$t_r = k_r + p_r. \quad (1.3)$$

Неравенства (1.2) и равенство (1.3) имеют локальный характер.

Размерности пространств киллинговых и планарных r -форм, $1 \leq r \leq n-1$, глобально заданных на n -мерном, $n \geq 2$, связном компактном (без границы) римановом многообразии (M, g) , в статье [13] получили название *чисел Киллинга* $k_r(M)$ и *планарности* $p_r(M)$ соответственно. Эти числа, как это установлено в [3], [13] и [16] обладают свойством дуальности $k_r(M) = p_{n-r}(M)$ и являются скалярными проективными инвариантами многообразия (M, g) .

Связь между числами $t_r(M)$, $k_r(M)$ и $p_r(M)$ при условии равенства нулю соответствующего числа Бетти $b_r(M)$ устанавливает следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть число Бетти $b_r(M)$ n -мерного связного компактного ориентированного риманова многообразия (M, g) равно нулю для некоторого $1 \leq r \leq n-1$, а соответствующие числа Тачибаны $t_r(M)$ и Киллинга $k_r(M)$ связаны неравенствами $t_r(M) > k_r(M) > 0$. Тогда их разность $t_r(M) - k_r(M)$ равна числу планарности $p_r(M)$ многообразия.

Заметим, что для случая $r = 1$ аналогичное утверждение можно найти в статье [21] в случае сферы S^n евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Дополним это утверждение следующим нашим.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть для n -мерного связного компактного ориентированного риманова многообразия (M, g) первые числа Бетти, Тачибаны и Киллинга удовлетворяют условиям

$$b_1(M) = 0 \quad \text{и} \quad t_1(M) > k_1(M) > 0.$$

Тогда многообразие (M, g) будет конформно диффеоморфно гиперсфере S^n евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ и, следовательно,

$$b_2(M) = \dots = b_{n-2}(M) = 0.$$

Учитывая свойство дуальности чисел Бетти и Киллинга и свойство планарности, можем сформулировать

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть для n -мерного связного компактного ориентированного риманова многообразия (M, g) его число Бетти $b_{n-1}(M) = 0$, а число Киллинга $k_{n-1}(M) \neq 0$. Тогда многообразие (M, g) будет конформно диффеоморфно гиперсфере S^n евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ и, следовательно,

$$b_2(M) = \dots = b_{n-2}(M) = 0.$$

Следующее утверждение является дополнением к уже известным из [13] “теоремам существования” для чисел Тачибаны $t_r(M)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть (M, g) является n -мерным, $n \geq 2$, связным компактным ориентированным римановым многообразием. Если выполняется одно из следующих двух условий:

- 1) тензор Риччи $\text{Ric} \leq 0$ и первое число Тачибаны $t_1(M) = p \neq 0$;
 2) тензор Риччи $\text{Ric} \geq 0$ и первое число Бетти $b_1(M) = p \neq 0$,
 то числа Тачибаны и Бетти удовлетворяют неравенству

$$t_r(M) = b_r(M) \geq \frac{p!}{r!(p-r)!} \quad \text{для всех } r \leq p.$$

В заключение обратимся к конформно плоским римановым многообразиям, о которых шла речь в начале статьи в связи с размерностью пространства конформно киллинговых форм. Предварительно напомним ставшее уже классическим утверждение о том, что числа Бетти $b_1(M), \dots, b_{n-1}(M)$ компактного риманова многообразия (M, g) с положительным оператором кривизны равны нулю [22; с. 212]. В дополнении к нему нами в [13] была доказана “двойственная теорема” о равенстве нулю чисел Тачибаны $t_1(M), \dots, t_{n-1}(M)$ компактного риманова многообразия (M, g) с отрицательным оператором кривизны. Ниже мы сформулируем теорему, которая является аналогом двух приведенных выше утверждений для компактного конформно плоского риманова многообразия.

ТЕОРЕМА 3. Пусть (M, g) является n -мерным, $n \geq 2$, связным компактным ориентированным конформно плоским римановым многообразием со знакоопределенной кривизной Риччи. Тогда числа Тачибаны $t_k(M)$ и Бетти $b_l(M)$ удовлетворяют условию

$$t_k(M) \cdot b_l(M) = 0 \quad \text{при всех } k, l = 1, \dots, n-1.$$

В частности, если (M, g) является $2r$ -мерным связным компактным ориентированным конформно плоским римановым многообразием с необращающейся в нуль скалярной кривизной s , то

$$t_r(M) \cdot b_r(M) = 0.$$

Закончим введение тем, чем и начали, а именно, оценкой размерности пространства конформно киллинговых форм. Справедлива

ТЕОРЕМА 4. Если первое число Бетти $b_1(M) = 0$ для n -мерного связного компактного конформно плоского риманова многообразия (M, g) , то

$$t_r(M) = \frac{(n+2)!}{(r+1)!(n-r+1)!} \quad \text{и} \quad b_2(M) = \dots = b_{n-2}(M) = 0.$$

2. Доказательства теоремы 1 и следствий 1 и 2. Рассмотрим n -мерное, $n \geq 2$, компактное римановое многообразие (M, g) со связностью Леви-Чивита ∇ . Обозначим через $C^\infty M$ алгебру C^∞ -функций на M , а через $\Omega^r(M)$ – модуль дифференциальных r -форм на M над алгеброй $C^\infty M$ [11; гл. 8, § 10]. Риманова метрика g на компактном ориентированном многообразии M позволяет ввести глобальное скалярное произведение в $\Omega^r(M)$ вида

$$\langle \omega, \omega' \rangle = \int_M \frac{1}{r!} g(\omega, \omega') dv \quad (2.1)$$

для произвольных $\omega, \omega' \in \Omega^r(M)$ и элемента объема dv многообразия (M, g) . Это дает возможность построить для оператора внешнего дифференцирования

$$d: C^\infty \Omega^r(M) \rightarrow C^\infty \Omega^{r+1}(M)$$

формально сопряженный оператор кодифференцирования

$$d^*: \Omega^{r+1}(M) \rightarrow \Omega^r(M),$$

т.е. $\langle d\omega, \omega' \rangle = \langle \omega, d^*\omega' \rangle$ для произвольных $\omega \in \Omega^r(M)$ и $\omega' \in \Omega^{r+1}(M)$, а для ковариантной производной $\nabla: \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^1(M) \otimes \Omega^r(M)$ – формально сопряженный оператор $\nabla^*: \Omega^1(M) \otimes \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M)$, т.е. $\langle \nabla\omega, \theta \rangle = \langle \omega, \nabla^*\theta \rangle$ для произвольных $\theta \in \Omega^1(M) \otimes \Omega^r(M)$ и $\omega \in \Omega^r(M)$ [11; гл. 8, § 10]; [22; с. 203–204]; [25; § A, § C].

На основе определенных выше дифференциальных операторов первого порядка строятся *лапласиан Ходжа–де Рама* $\Delta = dd^* + d^*d$ и *грубый лапласиан Бохнера* $\nabla^*\nabla$, которые являются эллиптическими дифференциальными операторами второго порядка [10; § 7]; [23; гл. 1, § I]; [24; доклад XVI, § 3].

Обозначим через $\Omega^r(M, \mathbb{R})$ векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, состоящее из дифференциальных r -форм, $1 \leq r \leq n-1$, заданных на компактном римановом многообразии (M, g) . Тогда

$$\mathbf{H}^r(M, \mathbb{R}) = \{\omega \in \Omega^r(M, \mathbb{R}) \mid \Delta\omega = 0\}$$

является конечномерным векторным пространством гармонических r -форм [11; гл. 8, § 11]; [22; с. 205]. Его размерность совпадает с числом Бетти $b_r(M)$ многообразия (M, g) , т.е. $b_r(M) = \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker } \Delta$.

Для изучения конформно киллинговых форм на компактном римановом многообразии (M, g) в статье [25] нами был построен эллиптический дифференциальный оператор второго порядка (см. также [13])

$$D^*D = \frac{1}{r(r+1)} \left(\nabla^*\nabla - \frac{1}{r+1} d^*d - \frac{1}{n-r+1} dd^* \right) \quad (2.2)$$

и было доказано, что его ядро является конечномерным векторным пространством

$$\mathbf{T}^r(M, \mathbb{R}) = \{\omega \in \Omega^r(M, \mathbb{R}) \mid D^*D\omega = 0\}$$

конформно киллинговых r -форм, $1 \leq r \leq n-1$. Число $t_r(M) = \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker } D^*D$ было названо в [13] и [16] *числом Тачибаны* многообразия (M, g) .

Киллинговые или, иначе, *козамкнутые конформно киллинговые r -формы*, $1 \leq r \leq n-1$, образуют векторное пространство

$$\mathbf{K}^r(M, \mathbb{R}) = \{\omega \in \Omega^r(M, \mathbb{R}) \mid D^*D\omega = d^*\omega = 0\},$$

которое является подпространством векторного пространства $\mathbf{T}^r(M, \mathbb{R})$. При этом число

$$k_r(M) = \dim_{\mathbb{R}} (\text{Ker } D^*D \cap \text{Ker } d^*)$$

было названо в [13] и [16] *числом Киллинга* многообразия (M, g) .

Планарные или, иначе, *замкнутые конформно киллинговые r -формы*, $1 \leq r \leq n-1$, образуют векторное пространство

$$\mathbf{P}^r(M, \mathbb{R}) = \{\omega \in \Omega^r(M, \mathbb{R}) \mid D^*D\omega = d\omega = 0\},$$

которое является подпространством векторного пространства $\mathbf{T}^r(M, \mathbb{R})$. При этом число

$$p_r(M) = \dim_{\mathbb{R}} (\text{Ker } D^*D \cap \text{Ker } d)$$

было названо в [13] и [16] *числом планарности* многообразия (M, g) .

Следует отметить, что пространство $\mathbf{K}^r(M, \mathbb{R}) \cap \mathbf{P}^r(M, \mathbb{R})$ состоит из параллельных или, иначе, ковариантно постоянных r -форм, $1 \leq r \leq n-1$, которые являются гармоническими [22; с. 212], а потому

$$\mathbf{K}^r(M, \mathbb{R}) \cap \mathbf{P}^r(M, \mathbb{R}) \subset \mathbf{H}^r(M, \mathbb{R}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Напомним, что на компактном многообразии (M, g) относительно глобального скалярного произведения (2.1) справедливо ортогональное разложение Ходжа–де Рама [15; гл. 4, § 2]

$$\Omega^r(M) = \text{Im } d \oplus \text{Im } d^* \oplus \text{Ker } \Delta, \quad (2.3)$$

где $\Delta = dd^* + d^*d$ и $\text{Ker } \Delta = \text{Im } d \cap \text{Ker } d^*$. Кроме (2.3), также имеют место ортогональные разложения вида [15; гл. 4, § 2]

$$\text{Ker } d^* = \text{Im } d^* \oplus \text{Ker } \Delta, \quad (2.4)$$

$$\text{Ker } d = \text{Im } d \oplus \text{Ker } \Delta. \quad (2.5)$$

Согласно условию теоремы полагаем, что для n -мерного компактного риманова многообразия (M, g) его число Бетти $b_r(M) = 0$ для некоторого $1 \leq r \leq n-1$. Тогда $\text{Ker } \Delta = 0$ всюду в разложениях (2.3)–(2.5) и, как следствие этого,

$$\Omega^r(M) = \text{Im } d \oplus \text{Im } d^* \quad (2.6)$$

для $1 \leq r \leq n-1$, а также

$$\text{Ker } d^* = \text{Im } d^*, \quad (2.7)$$

$$\text{Ker } d = \text{Im } d. \quad (2.8)$$

Рассмотрим над компактным ориентированным многообразием (M, g) векторное пространство $\mathbf{T}^r(M, \mathbb{R})$ конечной ненулевой размерности $t_r(M)$ со скалярным произведением (2.1). Согласно условию теоремы в $\mathbf{T}^r(M, \mathbb{R})$ существует ненулевое подпространство $\mathbf{K}^r(M, \mathbb{R})$ размерности $k_r(M)$ такой, что $t_r(M) > k_r(M) > 0$. В силу (2.7) подпространство $\mathbf{K}^r(M, \mathbb{R})$ состоит из *точных* конформно киллинговых r -форм.

Поскольку $t_r(M) \neq k_r(M) > 0$, то для векторного подпространства

$$\mathbf{K}^r(M, \mathbb{R}) = \{\omega \in \Omega^r(M, \mathbb{R}) \mid \omega \in \text{Ker } D^*D \cap \text{Im } d^*\}$$

в $\mathbf{T}^r(M, \mathbb{R})$ должно существовать ортогональное относительно скалярного произведения (2.1) дополнение. Согласно (2.6) и (2.8) таким дополнением будет подпространство

$$\mathbf{P}^r(M, \mathbb{R}) = \{\omega \in \Omega^r(M, \mathbb{R}) \mid \omega \in \text{Ker } D^*D \cap \text{Im } d\}$$

из *точных* конформно киллинговых r -форм такое, что

$$\mathbf{K}^r(M, \mathbb{R}) \cap \mathbf{P}^r(M, \mathbb{R}) = \{0\}$$

из-за отсутствия на (M, g) ненулевых гармонических r -форм. В этом случае справедливо ортогональное разложение

$$\mathbf{T}^r(M, \mathbb{R}) = \mathbf{K}^r(M, \mathbb{R}) \oplus \mathbf{P}^r(M, \mathbb{R}). \quad (2.9)$$

В результате

$$t_r(M) = k_r(M) + p_r(M).$$

Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В статье [27] для $2r$ -мерного компактного конформно плоского риманова многообразия (M, g) с постоянной скалярной кривизной $s > 0$ было установлено ортогональное разложение

$$\mathbf{T}^r(M, \mathbb{R}) = \mathbf{K}^r(M, \mathbb{R}) + \mathbf{P}^r(M, \mathbb{R}).$$

Притом, что согласно [14; гл. IV, § 2] для такого многообразия $b_r(M) = 0$. В другой статье [13] аналогичное разложение было установлено для n -мерного компактного многообразия (M, g) с положительным оператором кривизны. Последнее, как известно из [28], диффеоморфно сферической пространственной форме, а в случае его односвязности – сфере $\mathbb{S}^n$ евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. В обоих этих случаях $b_1(M) = \dots = b_{n-1}(M) = 0$.

Докажем теперь следствия 1 и 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Согласно теореме 1 на компактном римановом многообразии (M, g) с равным нулю первым числом Бетти $b_1(M) = 0$ и $t_1(M) > k_1(M) > 0$ справедливо ортогональное относительно скалярного произведения (2.1) разложение

$$\mathbf{T}^1(M, \mathbb{R}) = \mathbf{K}^1(M, \mathbb{R}) + \mathbf{P}^1(M, \mathbb{R}). \quad (2.10)$$

Одновременно из условия $t_1(M) \neq k_1(M) > 0$ следует, что $p_1(M) \geq 1$, а потому пространство $\mathbf{P}^1(M, \mathbb{R})$ содержит, по крайней мере, одну точную конформно киллинговую 1-форму, т.е. форму вида $\omega = \text{grad } f$ для некоторой функции $f \in C^\infty M$, которая удовлетворяет уравнениям $\nabla \nabla f = -(1/n) \Delta f \cdot g$. Наличие подобной непостоянной функции $f \in C^\infty M$ означает [26], что компактное многообразие (M, g) конформно диффеоморфно сфере $\mathbb{S}^n$ евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. По свойствам двойственности имеем $b_1(M) = b_{n-1}(M) = 0$ и $p_1(M) = k_{n-1}(M) \neq 0$, а потому на многообразии (M, g) существует, по меньшей мере, одна точная конформно киллинговая 1-форма. Далее надо повторить заключительную часть доказательства следствия 1.

3. Доказательство теоремы 2. Пусть (M, g) будет n -мерным компактным связным римановым многообразием с $t_1(M) = p \neq 0$, тогда на (M, g) существуют p линейно независимых глобально определенных конформно киллинговых 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_p$. Обозначим через $X_1, \dots, X_p$ дуальные им конформно киллинговые векторные поля, т.е. $\omega_\alpha(Y) = g(Y, X_\alpha)$ для $\alpha = 1, \dots, p$. Если предположить, что тензор Риччи $\text{Ric} \leq 0$, то $X_1, \dots, X_p$ будут параллельными [14; гл. II, § 12], т.е. $\nabla X_1 = 0, \dots, \nabla X_p = 0$. Из этого следует, что 1-формы $\omega_1, \dots, \omega_n$ будут также параллельными. В этом случае будут параллельными и формы вида

$$\theta_{i_1 i_2 \dots i_r} = \omega_{i_1} \wedge \omega_{i_2} \wedge \dots \wedge \omega_{i_r} \quad \text{для} \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq p.$$

Эти формы являются конформно киллинговыми и одновременно гармоническими формами, поскольку произвольная параллельная r -форма является конформно киллинговой как, впрочем, и гармонической для всех $r = 1, \dots, n-1$. Среди форм $\theta_{i_1 i_2 \dots i_r}$ будет $p!/(r!(p-r)!)$ линейно независимых. Поскольку параллельная форма полностью определяется своими начальными значениями в некоторой фиксированной точке многообразия [22; с. 212], то

$$t_r(M) = b_r(M) \geq \frac{p!}{r!(p-r)!} \quad \text{для всех} \quad r \leq p.$$

Для доказательства второго случая нам надо лишь упомянуть теорему из [22; с. 208], согласно которой на компактном ориентированном римановом многообразии с $\text{Ric} \geq 0$ любая гармоническая 1-форма является параллельной.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если в условии теоремы 2, где требуется, чтобы $\text{Ric} \leq 0$, положить $t_1(M) = n$ или, когда требуется, чтобы $\text{Ric} \geq 0$, положить $b_1(M) = n$, то в качестве следствия мы получим существование n линейно независимых параллельных векторных полей на n -мерном компактном римановом многообразии (M, g) . В этом случае многообразие (M, g) вырождается [22; с. 208] в плоский риманов тор T^n , для которого

$$t_r(T^n) = b_r(T^n) = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

4. Доказательство теоремы 3. Лапласианы Бохнера и Ходжа–де Рама связаны [10; § 7]; [23; гл. 1, § I] классической формулой Бохнера–Вайцебёка

$$\Delta = \nabla^* \nabla + F_r, \quad (4.1)$$

где F_r алгебраически (даже линейно) известным образом выражается через тензор кривизны R многообразия (M, g) . С учетом (4.1) находим новое выражение дифференциального оператора (2.2):

$$D^*D = \frac{1}{r(r+1)} \left(\frac{r}{r+1} d^*d + \frac{n-r}{n-r+1} dd^* - F_r \right).$$

В результате будет справедливым уравнение

$$\langle F_r(\omega), \omega \rangle = \frac{r}{r+1} \langle d\omega, d\omega \rangle + \frac{n-r}{n-r+1} \langle d^*\omega, d^*\omega \rangle - r(r+1) \langle D\omega, D\omega \rangle \quad (4.2)$$

для произвольной ненулевой r -формы ω .

Пусть квадратичная форма $\text{Ric}(X, X)$ для тензора Риччи Ric и произвольного не имеющего нулей векторного поля $X \in C^\infty TM$ будет отрицательно определенной для компактного конформно плоского многообразия (M, g) , тогда при $n \geq 2r$ справедливо неравенство [14; гл. IV, § 2]

$$g(F_r(\omega), \omega) \leq -\frac{n-r}{n-1} \lambda \cdot g(\omega, \omega)$$

для наибольшего (отрицательного) собственного значения $-\lambda$ матрицы $\|\text{Ric}\|$, всех $1 \leq r \leq n-1$ и любой не обращающейся в нуль формы $\omega \in \Omega^r(M)$. В результате произвольная конформно киллинговая r -форма ω должна удовлетворять неравенству

$$-\frac{n-r}{n-1} \lambda \langle \omega, \omega \rangle \geq \frac{r}{(n-r)(r+1)} \langle d\omega, d\omega \rangle + \frac{1}{n-r+1} \langle d^*\omega, d^*\omega \rangle \geq 0.$$

Последнее возможно только в случае, когда при $r \leq (1/2)n$ произвольная конформно киллинговая r -форма ω обращается в нуль в каждой точке многообразия (M, g) . Принимая во внимание свойство дуальности чисел Тачибаны, заключаем, что $t_1(M) = \dots = t_{n-1}(M) = 0$.

Пусть теперь квадратичная форма $\text{Ric}(X, X)$ для произвольного не имеющего нулей векторного поля $X \in C^\infty TM$ будет положительно определенной. В этом случае, как это доказано в [14; гл. IV, § 2], $b_1(M) = \dots = b_{n-1}(M) = 0$. Первое утверждение теоремы 1 справедливо.

Для $2r$ -мерного конформно плоского многообразия (M, g) известно [14; гл. IV, § 2] выражение F_r , а именно, $F_r = s/(2r - 1)$. В результате уравнение (2.4) примет следующий вид:

$$\frac{1}{2(2r - 1)} \langle s\omega, \omega \rangle = \frac{r}{r + 1} \langle d\omega, d\omega \rangle + \frac{n - r}{n - r + 1} \langle d^*\omega, d^*\omega \rangle - r(r + 1) \langle D\omega, D\omega \rangle \quad (4.3)$$

для произвольной ненулевой r -формы ω . Если на компактном многообразии (M, g) скалярная кривизна s не обращается в нуль, нам остается рассмотреть следующие два случая.

Пусть скалярная кривизна s является положительной функцией. Обозначим через $s_{\min}$ – ее наименьшее значение на компактном многообразии (M, g) , тогда произвольная гармоническая r -форма ω должна удовлетворять неравенству

$$-r(r + 1) \langle D\omega, D\omega \rangle \geq \frac{1}{2(2r - 1)} s_{\min} \cdot \langle \omega, \omega \rangle \geq 0.$$

Последнее возможно только в случае, когда произвольная гармоническая r -форма ω обращается в нуль в каждой точке многообразия (M, g) и, следовательно, $b_r(M) = 0$.

Пусть теперь скалярная кривизна s является отрицательной функцией и $-s_{\max}$ – ее наибольшее значение на компактном многообразии (M, g) , тогда произвольная конформно киллинговая r -форма ω должна удовлетворять неравенству

$$0 \leq \frac{r}{r + 1} \langle d\omega, d\omega \rangle + \frac{n - r}{n - r + 1} \langle d^*\omega, d^*\omega \rangle \leq -\frac{1}{2(2r - 1)} s_{\max} \cdot g(\omega, \omega) \leq 0.$$

Последнее возможно только в случае, когда произвольная конформно киллинговая r -форма ω обращается в нуль в каждой точке многообразия (M, g) и, следовательно, $t_r(M) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Следует особо отметить, что конформно киллинговые r -формы, изучаемые в монографии [14], при $1 < r < n$ кроме названия не имеют ничего общего с рассматриваемыми в современной литературе и, в частности, нами конформно киллинговыми r -формами. Поскольку понятие, введенное в свое время Яно как обобщение конформно киллинговых векторных полей, не получило своего развития.

5. Доказательство теоремы 4. Известно [29], что односвязное компактное конформно плоское риманово многообразие (M, g) размерности $n \geq 2$ конформно диффеоморфно гиперсфере $\mathbb{S}^n$ евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ и, следовательно, $b_1(M) = \dots = b_{n-1}(M) = 0$. Притом, что условие односвязности для компактного связного многообразия равносильно обращению в нуль его первого числа Бетти $b_1(M)$.

Теперь, учитывая конформную инвариантность чисел Тачибаны $t_r(M)$, для доказательства теоремы нам следует найти размерность пространства конформно киллинговых r -форм, заданных глобально на евклидовой n -сфере.

Здесь, во-первых, сошлемся на результаты работы [31], где вслед за Тачибаной [30] было доказано, что r -форма ω с компонентами $\omega_{a_1 \dots a_r} = A_{ba_1 \dots a_r} x^b$ для

произвольных кососимметричных постоянных $A_{ba_1\dots a_r}$ в декартовой системе координат $x^1, \dots, x^n, x^{n+1}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ является киллинговой r -формой, заданной глобальным образом на гиперсфере

$$\mathbb{S}^n: (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1.$$

Последнее, в частности, означает, что

$$k_r(\mathbb{S}^n) \geq \frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!}.$$

С другой стороны, известно из [31], что система дифференциальных уравнений, задающих киллинговую r -форму ω , будет вполне интегрируемой только в случае n -мерного риманова многообразия (M, g) постоянной кривизны при следующих начальных условиях:

$$\omega_{i_1\dots i_r}(x_0) = B_{i_1\dots i_r}, \quad (\nabla_{i_{r+1}}\omega_{i_1\dots i_r})(x_0) = C_{i_1\dots i_r i_{r+1}}$$

для произвольных точки $x_0 \in M$ и постоянных $B_{i_1\dots i_r}, C_{i_1\dots i_r i_{r+1}}$, кососимметричных по всем своим индексам. Число этих постоянных, как нетрудно подсчитать, равно $(n+1)!/((r+1)!(n-r)!)$. В итоге заключаем, что $k_r(\mathbb{S}^n) = (n+1)!/((r+1)!(n-r)!)$. Далее, используя двойственность чисел Киллинга и чисел планарности, находим

$$p_r(\mathbb{S}^n) = k_{n-r}(\mathbb{S}^n) = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}.$$

В заключение нам остается сослаться на теорему 1, чтобы сделать вывод о том, что число Тачибаны

$$t_r(\mathbb{S}^n) = k_r(\mathbb{S}^n) + p_r(\mathbb{S}^n) = \frac{(n+2)!}{(r+1)!(n-r+1)!}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, Т. 1, Наука, М., 1981.
- [2] S. Tachibana, “On conformal Killing tensor in a Riemannian space”, *Tôhoku Math. J.*, **21** (1969), 56–64.
- [3] С. Е. Степанов, “Векторное пространство конформно-киллинговых форм на римановом многообразии”, *Геометрия и топология*. 4, Зап. научн. сем. ПОМИ, **261**, ПОМИ, СПб., 1999, 240–265.
- [4] U. Semmelmann, “Conformal Killing forms on Riemannian manifolds”, *Math. Z.*, **245**:3 (2003), 503–627.
- [5] G. A. Rod, J. Šilhan, “The conformal Killing equation on forms – prolongations and applications”, *Differential Geom. Appl.*, **26**:3 (2008), 244–266.
- [6] I. M. Benn, P. Walton, “Dirac symmetry operators from conformal Killing–Yano tensors”, *Classical Quantum Gravity*, **14**:5 (1997), 1037–1042.
- [7] S. E. Stepanov, “On conformal Killing 2-form of the electromagnetic field”, *J. Geom. Phys.*, **33**:3-4 (2000), 191–209.

- [8] V. P. Frolov, A. Zelikov, *Introduction to Black Hole Physics*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2011.
- [9] T. Houri, T. Oota, Yu. Yasui, “Closed conformal Killing–Yano tensor and the uniqueness of generalized Kerr–Nut–de Sitter”, *Classical Quantum Gravity*, **26**:4 (2009), 045015.
- [10] М. Громов, *Знак и геометрический смысл кривизны*, Изд-во Удмуртского ун-та, Ижевск, 1999.
- [11] Д. В. Алексеевский, А. М. Виноградов, В. В. Лычагин, “Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии”, *Геометрия – 1*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **28**, ВИНТИ, М., 1988, 5–289.
- [12] Д. Вольф, *Пространства постоянной кривизны*, Наука, М., 1982.
- [13] С. Е. Степанов, “Кривизна и числа Тачибаны”, *Матем. сб.*, **202**:7 (2011), 135–146.
- [14] К. Яно, С. Бохнер, *Кривизна и числа Бетти*, ИЛ, М., 1957.
- [15] С. П. Новиков, “Топология”, *Топология – 1*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **12**, ВИНТИ, М., 1986, 5–252.
- [16] С. Е. Степанов, “О некоторых конформных и проективных скалярных инвариантах риманова многообразия”, *Матем. заметки*, **80**:6 (2006), 902–907.
- [17] W. Kühnel, H.-B. Rademacher, “Conformal transformations of pseudo-Riemannian manifolds”, *Recent Developments in Pseudo-Riemannian Geometry*, ESI Lect. Math. Phys., European Math. Soc., Zürich, 2008, 261–298.
- [18] Д. Крамер, Х. Штефан, М. Мак-Каллум, Э. Херльт, *Точные решения уравнений Эйнштейна*, Энергоиздат, М., 1982.
- [19] С. Е. Степанов, И. И. Цыганок, “О размерности векторного пространства конформно киллинговых форм”, *Дифференциальная геометрия многообразий фигур*, **42**, Калинингр. ун-т, Калининград, 2011, 134–140.
- [20] J. Mikeš, S. Stepanov, I. Hintreiter, “Projective mappings and dimensions of vector spaces of three types of Killing–Yano tensors on pseudo-Riemannian manifolds of constant curvature”, *AIP Conf. Proc.*, **1460** (2012), 202–205.
- [21] J.-P. Bourguignon, J.-P. Ezin, “Scalar curvature functions in a conformal class of metrics and conformal transformations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **301**:2 (1987), 723–736.
- [22] P. Petersen, *Riemannian Geometry*, Grad. Texts in Math., **171**, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [23] А. Бессе, *Многообразия Эйнштейна*, Т. 1, 2, Мир, М., 1990.
- [24] *Четырёхмерная риманова геометрия. Семинар Артура Бессе*, ред. А. Н. Тюрин, Мир, М., 1985.
- [25] С. Е. Степанов, “Новый сильный лапласиан на дифференциальных формах”, *Матем. заметки*, **76**:3 (2004), 452–458.
- [26] Y. Tashiro, “Complete Riemannian manifolds and some vector fields”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **117** (1965), 251–275.
- [27] S. Tachibana, “On the proper space of Δ for m -forms in $2m$ -dimensional conformal flat Riemannian manifolds”, *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, **29**:2 (1978), 111–115.
- [28] C. Böhm, B. Wilking, “Manifolds with positive curvature operators are space forms”, *Ann. of Math. (2)*, **167**:3 (2008), 1079–1097.
- [29] R. Schoen, S.-T. Yau, “Conformal flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature”, *Invent. Math.*, **92**:1 (1988), 47–71.
- [30] Sh. Tachibana, “On Killing tensor in a Riemannian space”, *Tôhoku Math. J. (2)*, **20** (1968), 257–264.
- [31] Sh. Tachibana, T. Kashiwada, “On the integrability of Killing–Yano’s equation”, *J. Math. Soc. Japan*, **21**:2 (1969), 259–265.

С. Е. Степанов

Финансовый университет при Правительстве РФ,
г. Москва
E-mail: s.e.stepanov@mail.ru

Поступило

04.05.2012

Исправленный вариант

11.03.2013