Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Камынин, Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 2, 207–217

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9370>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 08:45:15

Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения

В. Л. Камынин

Получены теоремы существования и единственности решения обратной задачи определения младшего коэффициента в многомерном параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения. Дана оценка максимума модуля неизвестного коэффициента с константой, явно выписанной через входные данные задачи.

Библиография: 17 названий.

DOI: 10.4213/mzm9370

1. Введение. Постановка обратной задачи. В работе изучаются вопросы существования и единственности решения $\{u(t, x), \gamma(x)\}$ обратной задачи

$$\rho(t, x)u_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} + d(t, x)u + \gamma(x)u = f(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (1.1)$$

$$u(t, x) = \Psi(t, x), \quad (t, x) \in \Gamma \equiv \{0\} \times \bar{\Omega} \cup [0, T] \times \partial\Omega, \quad (1.2)$$

$$\int_0^T u(t, x)\chi(t) dt = \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (1.3)$$

В соотношениях (1.1)–(1.3) $Q = [0, T] \times \bar{\Omega}$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$; $\rho(t, x)$, $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $d(t, x)$, $f(t, x)$, $\Psi(t, x)$, $\chi(t)$, $\varphi(x)$ – заданные функции.

Близкая обратная задача при других предположениях на входные данные и другими методами изучалась ранее в [1]–[5] и др.

В настоящей работе установлены достаточные условия, при которых решение обратной задачи (1.1)–(1.3) существует и единственно. Для случая $n = 1$ близкие результаты были получены в [6].

Работа выполнена при поддержке АБЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/11278) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (проект П268).

Используемые в работе пространства Лебега, Соболева и Гёльдера с соответствующими нормами будем понимать в общепринятом смысле (см., например, [7], [8]). Введем множества

$$L_{\infty}^{+}(\Omega) = \{\gamma(x) \in L_{\infty}(\Omega) : \gamma(x) \geq 0\}, \quad B_R = \{\gamma(x) \in L_{\infty}(\Omega) : 0 \leq \gamma(x) \leq R\},$$

$R = \text{const} > 0$.

Во всех дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что функции, входящие в исходные данные задачи (1.1)–(1.3), измеримы и удовлетворяют следующим условиям:

$$0 < \rho_1 \leq \rho(t, x) \leq \rho_2, \quad |\rho_t| \leq K_{\rho}, \quad (t, x) \in Q,$$

$$a_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq a_2 |\xi|^2, \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (\text{A})$$

$$\xi \equiv (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi| \equiv \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^{1/2};$$

$$|b_i(x)| \leq K_b, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \bar{\Omega},$$

$$-d_1 \leq d(t, x) \leq d_2, \quad |f(t, x)| \leq K_f, \quad (t, x) \in Q; \quad (\text{B})$$

$$\chi(t) \in W_1^1([0, T]), \quad \|\chi\|_{L_1([0, T])} \leq K_{\chi}, \quad \|\chi'\|_{L_1([0, T])} \leq K_{\chi}^*; \quad (\text{C})$$

$$\varphi(x) \in W_{\infty}^2(\Omega), \quad \varphi(x) \geq \varphi_0 > 0, \quad |\varphi_{x_i}(x)| \leq K_{\varphi}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (\text{D})$$

$$\Psi(t, x) \in W_q^{1,2}(Q), \quad q \geq n+1, \quad |\Psi(t, x)| \leq M_0, \quad (t, x) \in \bar{Q}; \quad (\text{E})$$

$$\int_0^T \Psi(t, x) \chi(t) dt = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega; \quad (\text{F})$$

здесь $\rho_1, \rho_2, a_1, a_2, \varphi_0, K_{\chi}, M_0 = \text{const} > 0$; $K_{\varphi}, d_1, d_2, K_b, K_d, K_f, K_{\chi}^* = \text{const} \geq 0$.

Положим

$$K_d = \max\{d_1, d_2\}, \quad (1.4)$$

$$\varphi_1 = \text{ess inf}_{\bar{\Omega}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \varphi_{x_i x_j}(x), \quad \varphi_2 = \text{ess sup}_{\bar{\Omega}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \varphi_{x_i x_j}(x), \quad (1.5)$$

$$F(x) = \int_0^T f(t, x) \chi(t) dt, \quad F_1 = \text{ess inf}_{\bar{\Omega}} F(x), \quad F_2 = \text{ess sup}_{\bar{\Omega}} F(x); \quad (1.6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) будем называть пару функций

$$\{u(t, x), \gamma(x)\}, \quad u(t, x) \in L_2(Q) \cap C^{0,\alpha}(Q), \quad \alpha = \text{const} \in (0, 1), \quad \gamma(x) \in L_{\infty}^{+}(\Omega),$$

такую, что эта пара удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду в Q , а функция $u(t, x)$ удовлетворяет условиям (1.2), (1.3).

Хорошо известно, что при выполнении только условий (A), (B), (E) (и при $\gamma(x) \in B_R$) при $n > 1$ невозможно получить априорную оценку в $L_2(Q)$ старших производных решения $u(t, x)$ прямой задачи (1.1), (1.2) и, соответственно, доказать разрешимость прямой задачи в пространстве $L_2(Q)$. Требуется наложить те или иные дополнительные требования на старшие коэффициенты уравнения (1.1), например,

условие непрерывности (см., например, [8]) или условие типа Кордеса (см., например, [9]).

Предположив, что выполнено одно из указанных дополнительных условий на старшие коэффициенты уравнения (1.1), мы в последующих двух пунктах устанавливаем теоремы существования и единственности решения обратной задачи (1.1)–(1.3).

2. Существование решения обратной задачи (1.1)–(1.3). Предположим сначала, что при $n > 1$ дополнительно к условиям (A)–(F) выполнено еще условие

$$a_{ij}(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad \rho(t, x) \in C(Q). \quad (A')$$

Рассмотрим прямую задачу (1.1), (1.2) с $\gamma(x) \in B_R$ при некотором $R > 0$. Тогда в силу условий (A), (A'), (B), (E) можно применить результаты из [8; гл. IV, § 9], согласно которым существует единственное решение $u(t, x) \in W_2^{1,2}(Q)$ прямой задачи (1.1), (1.2), причем справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^{1,2}(Q)} \leq c_1(R). \quad (2.1)$$

Кроме того, из тех же результатов вытекает, что $u(t, x) \in W_q^{1,2}(Q)$ (где q из условия (E)), причем

$$\|u\|_{W_q^{1,2}(Q)} \leq c_2(R). \quad (2.2)$$

Поскольку для q в (E) выполнено условие $q \geq n + 1$, то в силу известных теорем вложения (см., например, [8; гл. II, § 3]) $u(t, x) \in C^{0,\alpha}(Q)$ при некотором $\alpha \in (0, 1)$ и справедлива оценка

$$|u|_{C^{0,\alpha}(Q)} \leq c_3(R). \quad (2.3)$$

В оценках (2.1)–(2.3) $c_1(R)$, $c_2(R)$ – положительные константы, зависящие от входных данных задачи (1.1), (1.2), а также от R .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. При выполнении условия (A') для числа q из (E) достаточно выполнения неравенства $q > (n + 2)/2$. В этом случае решение $u(t, x)$ прямой задачи (1.1), (1.2) по-прежнему будет принадлежать пространству $C^{0,\alpha}(Q)$ (при некотором, возможно, меньшем α , зависящем в том числе и от q), и будет выполнена оценка (2.3).

Кроме того, в силу принципа максимума (см., например, [7; гл. II, § 3] или [10; раздел 3]) для этого решения справедлива также оценка

$$|u(t, x)| \leq M, \quad (t, x) \in Q, \quad (2.4)$$

где $M = \text{const} > 0$ может быть выбрана не зависящей от R . Например, в [7]

$$M = \left(M_0 + (e^{\lambda l} - 1) \frac{K_f}{\rho_1} \right) e^{(d_1 T)/\rho_1}, \quad (2.5)$$

где l – размер области Ω в направлении оси x_1 , а $\lambda = \text{const} > 0$, для которой

$$\frac{a_{11}(x)}{\rho(t, x)} \lambda^2 + \frac{b_1(x)}{\rho(t, x)} \lambda \geq 1, \quad (2.6)$$

или в [10]

$$M = \left(M_0 + \frac{K_f}{\rho_1} T \right) e^{(d_1 T)/\rho_1}. \quad (2.7)$$

Предположим теперь, что при $n > 1$ вместо условия (A') дополнительно к (A)–(F) выполнено условие

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i,j=1}^n \operatorname{ess\,sup}_Q \left(\frac{a_{ij}(x)}{\rho(t,x)} \right)^2 + 1 \right) / \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{ess\,inf}_Q \frac{a_{ii}(x)}{\rho(t,x)} + 1 \right)^2 &\leq \frac{1}{n + \varepsilon}, \\ \left(\sum_{i,j=1}^n \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} a_{ij}^2(x) \right) / \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{ess\,inf}_{\Omega} a_{ii}(x) \right)^2 &\leq \frac{1}{n - 1 + \varepsilon} \end{aligned} \quad (A'')$$

при некотором $\varepsilon \in (0, 1)$ (см. [9], [11], [12]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Неравенства, входящие в (A''), являются условиями типа Кордеса, характеризующими близость главной части уравнения (1.1) к оператору теплопроводности $u_t - \Delta u$.

Рассмотрим снова прямую задачу (1.1), (1.2) с $\gamma(x) \in B_R$ при некотором $R > 0$. Тогда в силу результатов работы [9] с учетом п. 4 из работы [13] существует единственное решение $u(t, x)$ задачи (1.1), (1.2) из пространства $W_2^{1,2}(Q)$, причем для него справедлива оценка (2.1).

Поскольку в условии (E) $q \geq n + 1$, то из результатов [14; гл. IV, §§ 2, 4] следует, что $u \in C^{0,\alpha}(Q)$ при некотором $\alpha \in (0, 1)$ и справедлива оценка (2.3). Заметим, что для формального применения результатов из [14] требуется, чтобы $u(t, x) \in W_q^{1,2}(Q)$ при $q \geq n + 1$. Однако это требование легко обойти. Именно, сгладим коэффициенты уравнения (1.1) с помощью средних функций. Нетрудно проверить, что условие (A'') типа Кордеса останется справедливым и для “сглаженного” уравнения. Получим оценки (2.1) и (2.3) для решения $u^h(t, x)$ “сглаженного” уравнения (они не будут зависеть от параметра сглаживания h). Затем перейдем к пределу при $h \rightarrow 0$ и воспользуемся единственностью решения $u(t, x)$ из пространства $W_2^{1,2}(Q)$ исходной задачи (1.1), (1.2) (см. [9]).

Как и выше, для решения $u(t, x)$ задачи (1.1), (1.2) будет также справедлива оценка (2.4) с константой M , которая не зависит от R и может быть вычислена либо по формуле (2.5), либо по формуле (2.7).

В дальнейшем при $n > 1$ будем предполагать выполненным одно из условий (A') или (A''), так что прямая задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима при всех $\gamma(x) \in L_{\infty}^+(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. При $n = 1$ однозначная разрешимость прямой задачи (1.1), (1.2) без условий (A') или (A'') следует из [15].

Рассмотрим обратную задачу (1.1)–(1.3) и выведем операторное уравнение для коэффициента $\gamma(x)$. Итак, пусть $\gamma(x)$ – произвольная функция из $L_{\infty}^+(\Omega)$. Умножим уравнение (1.1) на $\chi(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0, T]$. Учитывая условия (1.2),

(1.3) и предположения (A), (C), (D), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \gamma(x) = \frac{1}{\varphi(x)} & \left\{ F(x) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \varphi_{x_i x_j}(x) - \sum_{i=1}^n b_i(x) \varphi_{x_i}(x) \right. \\ & - \rho(T, x) \chi(T) u(T, x) + \rho(0, x) \chi(0) \Psi(0, x) \\ & \left. + \int_0^T [\rho_t(t, x) \chi(t) + \rho(t, x) \chi'(t) - d(t, x) \chi(t)] u(t, x) dt \right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Введем нелинейный оператор $\mathcal{A}: L_\infty^+(\Omega) \rightarrow L_\infty(\Omega)$ по формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\gamma) = \frac{1}{\varphi(x)} & \left\{ F(x) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \varphi_{x_i x_j}(x) - \sum_{i=1}^n b_i(x) \varphi_{x_i}(x) \right. \\ & - \rho(T, x) \chi(T) u(T, x) + \rho(0, x) \chi(0) \Psi(0, x) \\ & \left. + \int_0^T [\rho_t(t, x) \chi(t) + \rho(t, x) \chi'(t) - d(t, x) \chi(t)] u(t, x) dt \right\}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $u(t, x)$ – обобщенное решение прямой задачи (1.1), (1.2) с коэффициентом $\gamma(x) \in L_\infty^+(\Omega)$ в уравнении (1.1).

В силу условий (A)–(F), а также (A') или (A'') (если $n > 1$) оператор $\mathcal{A}$ действует из $L_\infty^+(\Omega)$ в $L_\infty(\Omega)$, а соотношение (2.8) можно переписать в виде

$$\gamma = \mathcal{A}(\gamma). \quad (2.10)$$

ЛЕММА 2.1. Пусть выполнены условия (A)–(F), а также (A') или (A''), если $n > 1$. Тогда для того, чтобы пара $\{u(t, x), \gamma(x)\}$ была обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3), необходимо и достаточно, чтобы эта пара удовлетворяла соотношениям (1.1), (1.2), (2.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость доказана выше при выводе (2.10).

Докажем достаточность. Пусть $\gamma^*(x) \in L_\infty^+(\Omega)$ является решением уравнения (2.10). Рассмотрим функцию $u^*(t, x)$ как единственное обобщенное решение прямой задачи (1.1), (1.2) с выбранным коэффициентом $\gamma(x) = \gamma^*(x)$ в уравнении (1.1). Положим

$$\varphi^*(x) = \int_0^T u^*(t, x) \chi(t) dt. \quad (2.11)$$

Тогда $\varphi^*(x) \in W_2^2(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$. Повторяя рассуждения, приведенные выше при выводе (2.8) (в этих рассуждениях достаточно, чтобы $\varphi^*(x) \in W_2^2(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \gamma^*(x) \varphi^*(x) = F(x) & + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \varphi_{x_i x_j}^*(x) - \sum_{i=1}^n b_i(x) \varphi_{x_i}^*(x) \\ & - \rho(T, x) \chi(T) u^*(T, x) + \rho(0, x) \chi(0) \Psi(0, x) \\ & + \int_0^T [\rho_t(t, x) \chi(t) + \rho(t, x) \chi'(t) - d(t, x) \chi(t)] u^*(t, x) dt. \end{aligned} \quad (2.12)$$

С другой стороны, $\gamma^*(x)$ является решением уравнения (2.10), поэтому учитывая определение оператора $\mathcal{A}$ в (2.9), имеем

$$\begin{aligned} \gamma^*(x)\varphi(x) &= F(x) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\varphi_{x_i x_j}(x) - \sum_{i=1}^n b_i(x)\varphi_{x_i}(x) \\ &\quad - \rho(T, x)\chi(T)u^*(T, x) + \rho(0, x)\chi(0)\Psi(0, x) \\ &\quad + \int_0^T [\rho_t(t, x)\chi(t) + \rho(t, x)\chi'(t) - d(t, x)\chi(t)]u^*(t, x) dt. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Заметим, что из определения $\varphi^*(x)$ в (2.11) и условия (F) вытекает, что при $x \in \partial\Omega$

$$\varphi^*(x) = \int_0^T \Psi(t, x)\chi(t) dt = \varphi(x). \quad (2.14)$$

Положим $z(x) = \varphi(x) - \varphi^*(x)$. Тогда вычитая (2.13) из (2.12) и учитывая (2.14), получаем, что $z(x) \in W_2^2(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ является в $\bar{\Omega}$ обобщенным решением краевой задачи

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)z_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)z_{x_i} + \gamma^*(x)z &= 0, \\ z(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Напомним, что $\gamma^*(x) \geq 0$. Поэтому $z(x) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$: при выполнении условия (A') это следует из [16; раздел 9.6] при выполнении условия (A'') – из [12], а при $n = 1$ – из [16; раздел 8.1].

Таким образом, $\varphi(x) \equiv \varphi^*(x)$ в $\bar{\Omega}$, а следовательно, пара $\{u^*(t, x), \gamma^*(x)\}$ является обобщенным решением обратной задачи (1.1)–(1.3). Лемма 2.1 доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть выполнены условия (A)–(F), а также (A') или (A''), если $n > 1$. Пусть M – константа из оценки (2.4), не зависящая от R (например, определена формулами (2.4) или (2.7)). Предположим, что выполнено неравенство

$$F_1 + \varphi_1 \geq \rho_2(M|\chi(T)| + M_0|\chi(0)|) + nK_b K_\varphi + M(K_\rho K_\chi + K_d K_\chi + \rho_2 K_\chi^*), \quad (2.15)$$

где K_d из (1.4), φ_1 из (1.5), F_1 из (1.6). Тогда

$$\text{для всех } \gamma(x) \in L_\infty^+(\Omega) \quad \mathcal{A}(\gamma) \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.15) с учетом (1.4) и оценки (2.4) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} F(x) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\varphi_{x_i x_j}(x) - \sum_{i=1}^n b_i(x)\varphi_{x_i}(x) - \rho(T, x)\chi(T)u(T, x) + \rho(0, x)\chi(0)\Psi(0, x) \\ + \int_0^T (\rho_t(t, x)\chi(t) + \rho(t, x)\chi'(t) - d(t, x)\chi(t))u(t, x) dt \geq 0, \end{aligned}$$

из которого в силу определения оператора $\mathcal{A}$ следует утверждение леммы.

ЛЕММА 2.3. Пусть выполнены условия (A)–(F), (2.15), а также (A') или (A''), если $n > 1$. Пусть M – константа из оценки (2.4), не зависящая от R , K_d из (1.4), φ_2 из (1.5), F_2 из (1.6). Тогда для всех $\gamma(x) \in L_\infty^+(\Omega)$ справедлива оценка

$$\mathcal{A}(\gamma) \leq R_0, \quad (2.16)$$

где

$$R_0 = \frac{1}{\varphi_0} [F_2 + \varphi_2 + \rho_2(M|\chi(T)| + M_0|\chi(0)|) + nK_bK_\varphi + M(K_\rho K_\chi + K_dK_\chi + \rho_2K_\chi^*)]. \quad (2.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (2.16) есть непосредственное следствие определения оператора $\mathcal{A}$, условий (A)–(F) и оценки (2.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Если выполнено неравенство (2.15), то константы F_1 и φ_1 заведомо удовлетворяют условию $F_1 + \varphi_1 \geq 0$. Но тогда и $F_2 + \varphi_2 \geq 0$ (см. (1.5) и (1.6)), а следовательно, в (2.17) $R_0 \geq 0$.

ЛЕММА 2.4. Пусть выполнены условия (A)–(F), неравенство (2.15) с M из (2.4), а также (A') или (A''), если $n > 1$. Тогда оператор $\mathcal{A}$ отображает множество $L_\infty^+(\Omega)$ в B_{R_0} , где R_0 из (2.17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы 2.4 есть немедленное следствие лемм 2.2 и 2.3.

ЛЕММА 2.5. Пусть выполнены условия (A)–(F), а также (A') или (A''), если $n > 1$. Тогда оператор $\mathcal{A}$ непрерывен на множестве B_R при всех $R > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma^{(1)}(x), \gamma^{(2)}(x) \in B_R$, а $u^{(1)}(t, x)$ и $u^{(2)}(t, x)$ – соответствующие обобщенные решения прямой задачи (1.1), (1.2). Положим

$$\hat{u}(t, x) = u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x), \quad \hat{\gamma}(x) = \gamma^{(1)}(x) - \gamma^{(2)}(x).$$

Для данных функций выполняются соотношения

$$\rho(t, x)\hat{u}_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\hat{u}_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)\hat{u}_{x_i} + d(t, x)u + \gamma^{(1)}(x)\hat{u} = -\hat{\gamma}(x)u^{(2)}(t, x), \quad (t, x) \in Q;$$

$$\hat{u}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Gamma.$$

В силу [10; раздел 3] имеем

$$|\hat{u}(t, x)| \leq \frac{M}{\rho_1} T e^{(d_1 T)/\rho_1} \|\hat{\gamma}\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad (t, x) \in Q. \quad (2.18)$$

С другой стороны, учитывая определение оператора $\mathcal{A}$ в (2.9), имеем

$$\|\mathcal{A}(\gamma^{(1)}) - \mathcal{A}(\gamma^{(2)})\|_{L_\infty(\Omega)} \leq c_4 \|\hat{u}(T, \cdot)\|_{L_\infty(\Omega)} + c_5 \|\hat{u}\|_{L_\infty(Q)}. \quad (2.19)$$

Из (2.18) и (2.19) следует, что

$$\|\mathcal{A}(\gamma^{(1)}) - \mathcal{A}(\gamma^{(2)})\|_{L_\infty(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{L_\infty(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.6. Пусть выполнены условия (A)–(F), а также (A') или (A''), если $n > 1$. Пусть $R > 0$ произвольно. Тогда оператор $\mathcal{A}$ является вполне непрерывным оператором на множестве B_R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы есть прямое следствие оценки (2.3), компактности вложения пространства $C^{0,\alpha}(Q)$ в $C(Q)$, определения оператора $\mathcal{A}$ и леммы 2.5.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены условия (A)–(F), неравенство (2.15), а также условие (A') или (A''), если $n > 1$. Тогда существует обобщенное решение $\{u(t, x), \gamma(x)\}$ обратной задачи (1.1)–(1.3), причем для $\gamma(x)$ справедлива оценка

$$0 \leq \gamma(x) \leq R_0, \quad (2.20)$$

где R_0 из (2.17), а для $u(t, x)$ справедливы оценки (2.1), (2.3) при $R = R_0$, а также оценка (2.4). Если выполнено условие (A'), то $u(t, x) \in W_q^{1,2}(Q)$ (где q из условия (E)) и справедлива оценка (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 2.2–2.6 оператор $\mathcal{A}$ является вполне непрерывным оператором, переводящим множество B_{R_0} в себя. Поэтому по теореме Шаудера о неподвижной точке (см. [17; гл. 5, § 3]) существует решение $\gamma(x)$ уравнения (2.10), принадлежащее множеству B_{R_0} , так что для $\gamma(x)$ выполнена оценка (2.20).

Пусть $u(t, x)$ – решение прямой задачи (1.1), (1.2) с данным $\gamma(x)$ в уравнении (1.1), которое существует, поскольку при $n > 1$ выполнено одно из условий (A') или (A''). Тогда для $u(t, x)$ справедливы оценки (2.1), (2.3) с $R = R_0$ и оценка (2.4), а в силу леммы 2.1 пара $\{u(t, x), \gamma(x)\}$ является обобщенным решением обратной задачи (1.1)–(1.3).

Если при $n > 1$ выполнено условие (A'), то, как указано выше, из [8; гл. IV, § 9] следует, что $u(t, x) \in W_q^{1,2}(Q)$, где q из условия (E), и выполнена оценка (2.2) при $R = R_0$. Отметим также, что в силу замечания 2.1 можно считать, что в этом случае число q из условия (E) удовлетворяет неравенству $q > (n + 2)/2$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Константа R_0 в оценке (2.20) явно выписывается через входные данные задачи (1.1)–(1.3) (см. (2.17)), что является весьма важным для приложений. Отметим, что для константы F_2 , входящей в определение R_0 в (2.17), выполнена, очевидно, оценка $F_2 \leq K_f K_\chi$, а константа M может быть задана формулами (2.5) или (2.7).

3. Единственность решения обратной задачи (1.1)–(1.3).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены условия (A)–(F), а также (A') или (A''), если $n > 1$. Пусть M – константа из оценки (2.4) (определенная, например, формулами (2.5) или (2.7)). Предположим, что

$$(e^{\lambda l} - 1) \frac{1}{\rho_1 \varphi_0} M e^{(d_1 T)/\rho_1} [K_\rho K_\chi + K_d K_\chi + \rho_2 K_\chi^* + \rho_2 |\chi(T)|] < 1, \quad (3.1)$$

где l – размер области Ω в направлении оси x_1 , λ – положительная константа, для которой выполнено условие (2.6). Тогда обратная задача (1.1)–(1.3) не может иметь более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует два различных решения обратной задачи (1.1)–(1.3), а именно пары $\{u^{(1)}(t, x), \gamma^{(1)}(x)\}$ и $\{u^{(2)}(t, x), \gamma^{(2)}(x)\}$. Тогда обязательно

$$\gamma^{(1)}(x) \neq \gamma^{(2)}(x), \quad (3.2)$$

иначе $u^{(1)}(t, x) \equiv u^{(2)}(t, x)$ в силу единственности решения прямой задачи (1.1), (1.2) (при $n > 1$ см. [8; гл. IV, § 9] в случае выполнения (A') или [9] в случае выполнения (A''), а при $n = 1$ – см. [15]).

Заметим, что в силу предположений теоремы 3.1 для функций $u^{(1)}(t, x)$ и $u^{(2)}(t, x)$ справедлива оценка (2.4) с константой M , удовлетворяющей условию (3.1). Положим

$$z(t, x) = u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x), \quad \sigma(x) = \gamma^{(1)}(x) - \gamma^{(2)}(x).$$

Тогда данная пара функций удовлетворяет соотношениям

$$\rho(t, x)z_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)z_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)z_{x_i} + d(t, x)z + \gamma^{(1)}(x)z = -\sigma(x)u^{(2)}(t, x), \quad (3.3)$$

$$(t, x) \in Q,$$

$$z(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Gamma, \quad (3.4)$$

$$\int_0^T z(t, x)\chi(t) dt = 0, \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (3.5)$$

Умножая (3.3) на $\chi(t)$ и интегрируя по t в пределах от 0 до T , приходим к соотношению

$$\sigma(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \left[\int_0^T (\rho(t, x)_t \chi(t) - d(t, x)\chi(t) + \rho(t, x)\chi'(t))z(t, x) dt - \rho(T, x)\chi(T)z(T, x) \right]. \quad (3.6)$$

Положим

$$M^* = \max_Q |z(t, x)|.$$

Тогда из результатов [7; гл. II, § 3], примененных к задаче (3.3), (3.4), с учетом (2.4) следует, что

$$M^* \leq (e^{\lambda l} - 1) \frac{1}{\rho_1} M e^{(d_1 T)/\rho_1} \|\sigma\|_{L_\infty(\Omega)}. \quad (3.7)$$

С другой стороны, из (3.6) вытекает неравенство

$$\|\sigma\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \frac{M^*}{\varphi_0} [K_\rho K_\chi + K_d K_\chi + \rho_2 K_\chi^* + \rho_2 |\chi(T)|]. \quad (3.8)$$

Из (3.7) и (3.8) с учетом предположения (3.1) следует, что $M^* = 0$, т.е. $z(t, x) \equiv 0$ в Q . Но тогда в силу (3.6) и $\sigma(x) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$, что противоречит (3.2).

Теорема доказана.

4. Некоторые примеры. Приведем примеры обратных задач, для которых справедливы доказанные в работе теоремы существования и единственности.

ПРИМЕР 4.1. Рассмотрим в $Q = [0, T] \times [0, l]$, $n = 1$, $\Omega = (0, l)$, обратную задачу

$$\left(2 + \sin \frac{xt}{T}\right) u_t - u_{xx} + \gamma(x)u = 0, \quad (t, x) \in Q, \quad (4.1)$$

$$u(t, x) = 1, \quad (t, x) \in \Gamma, \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T u(t, x) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{(x - l/2)^2}{(l/2)^2} + 1 \right], \quad x \in [0, l]. \quad (4.3)$$

Заметим, что условие (4.3) имеет простой физический смысл: это взятие среднего по времени от функции $u(t, x)$.

Очевидно, для задачи (4.1)–(4.3) выполнены условия (A)–(F). В качестве константы M в (2.4) можно выбрать $M = 1$ (см. (2.5)), константа R_0 из (2.17) равна $8/l^2 + 2(l+6)/T$. Как нетрудно вычислить, неравенство (2.15) для задачи (4.1)–(4.3) запишется в виде

$$\frac{T}{l^2} \geq \frac{l+6}{4}, \quad (4.4)$$

а неравенство (3.1) – в виде

$$\frac{2(l+3)(e^{\sqrt{3}l} - 1)}{T} < 1. \quad (4.5)$$

Соотношения (4.4) и (4.5), очевидно, будут выполнены либо при малых l (T фиксировано), либо при больших T (l фиксировано). Таким образом, при малых l (и фиксированном T) или при больших T (и фиксированном l) для задачи (4.1)–(4.3) будут выполнены условия теорем 2.1 и 3.1, а следовательно, в этих случаях решение $\{u(t, x), \gamma(x)\}$ данной обратной задачи существует и единственно. При этом будут справедливы оценки

$$|u(t, x)| \leq 1, \quad (t, x) \in Q, \quad 0 \leq \gamma(x) \leq \frac{8}{l^2} + \frac{2(l+6)}{T}, \quad x \in [0, l].$$

ПРИМЕР 4.2. Рассмотрим в $Q = [0, T] \times [0, l]$, $n = 1$, $\Omega = (0, l)$, обратную задачу для уравнения (4.1) с краевыми условиями (4.2), но с дополнительным условием

$$\int_0^T u(t, x)t(T-t) dt = \frac{T^3}{12} \left[\frac{(x - l/2)^2}{(l/2)^2} + 1 \right], \quad x \in [0, l]. \quad (4.6)$$

Как нетрудно видеть, для задачи (4.1), (4.2), (4.6) выполнены условия (A)–(F). Как и в примере 4.1, в качестве константы M в (2.4) можно выбрать $M = 1$, константа R_0 из (2.17) в данном случае равна $8/l^2 + 2(l+9)/T$. Неравенство (2.15) для задачи (4.1), (4.2), (4.6) запишется в виде

$$\frac{T}{l^2} \geq \frac{l+9}{4}, \quad (4.7)$$

а неравенство (3.1) – в виде

$$\frac{2(l+9)(e^{\sqrt{3}l} - 1)}{T} < 1. \quad (4.8)$$

Как и в примере 4.1, неравенства (4.7), (4.8) будут выполнены либо при малых l (и фиксированном T), либо при больших T (и фиксированном l). Следовательно,

в указанных случаях для задачи (4.1), (4.2), (4.6) будут выполнены условия теорем 2.1 и 3.1 и будет существовать единственное решение $\{u(t, x), \gamma(x)\}$ этой задачи. При этом будут справедливы оценки

$$|u(t, x)| \leq 1, \quad (t, x) \in Q, \quad 0 \leq \gamma(x) \leq \frac{8}{l^2} + \frac{2(l+9)}{T}, \quad x \in [0, l].$$

Автор благодарит А. И. Прилепко, А. Б. Костина, Д. Г. Орловского, В. В. Соловьева за полезное обсуждение данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. И. Прилепко, А. Б. Костин, “Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. I”, *Сиб. матем. журн.*, **33**:3 (1992), 146–155.
- [2] А. И. Прилепко, А. Б. Костин, “Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. II”, *Сиб. матем. журн.*, **34**:5 (1993), 147–162.
- [3] А. И. Прилепко, И. В. Тихонов, “Принцип позитивности решения в линейной обратной задаче и его применение к коэффициентной задаче теплопроводности”, *ДАН*, **394**:1 (1999), 21–23.
- [4] А. И. Кожанов, “Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче”, *Матем. заметки*, **76**:6 (2004), 840–853.
- [5] В. Л. Камынин, А. Б. Костин, “Две обратные задачи определения коэффициента в параболическом уравнении”, *Дифференц. уравнения*, **46**:3 (2010), 372–383.
- [6] В. Л. Камынин, Т. И. Бухарова, “Обратная задача определения коэффициента поглощения в параболическом уравнении на плоскости”, *Вестн. РУДН. Сер. Матем., физ., информ.*, 2011, № 2, 5–15.
- [7] А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа*, М., Наука, 1968.
- [8] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967.
- [9] O. Arena, “Sopra una classe di equazioni paraboliche”, *Boll. Un. Mat. Ital.* (4), **2**:1 (1969), 9–24.
- [10] С. Н. Кружков, *Нелинейные уравнения с частными производными*, Ч. 1, Изд-во Моск. ун-та, М., 1969.
- [11] G. Talenti, “Sopra una classe di equazioni ellittiche a coefficienti misurabili”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **69** (1969), 285–304.
- [12] M. Chicco, “Principio di massimo per soluzioni di equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo Cordes”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **100** (1974), 239–258.
- [13] O. Arena, A. Maugeri, “Perturbazioni di operatori parabolici di ordine $2n$ con termini di ordine inferiore”, *Boll. Un. Mat. Ital.* (4), **9** (1974), 169–184.
- [14] Н. В. Крылов, *Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка*, Наука, М., 1985.
- [15] С. Н. Кружков, “Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **5** (1979), 217–272.
- [16] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.
- [17] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Краткий курс функционального анализа*, Высшая школа, М., 1982.

В. Л. Камынин

Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, г. Москва
E-mail: vlkamynin2008@yandex.ru

Поступило

26.01.2012