Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Я. Серовайский, Методы аппроксимации в задачах оптимального управления нелинейными бесконечномерными системами, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 4, 600–619

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9372>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:19:06

Методы аппроксимации в задачах оптимального управления нелинейными бесконечномерными системами

С. Я. Серовайский

Предлагаются понятия приближенного решения и аппроксимации экстремальных задач для нелинейных бесконечномерных систем. В качестве примеров рассматриваются оптимизационные задачи для нелинейных параболических уравнений с закрепленным конечным состоянием и на бесконечном интервале времени, а также для сингулярных стационарных систем с фазовыми ограничениями.

Библиография: 29 названий.

DOI: 10.4213/mzm9372

1. Приближенное решение задач оптимального управления. В теории оптимального управления используются различные формы приближенного решения (см., например, [1]). Наиболее естественно под приближенным решением задачи понимать допустимое управление, достаточное близко к оптимальному. Однако на практике крайне сложно обеспечить выполнение этого условия и часто применяется более слабая форма. При этом под приближенным решением задачи понимают такое допустимое управление, значение минимизируемого функционала на котором достаточно близко к его нижней грани. Если задача корректна по Тихонову, указанные формы эквивалентны. В общем случае вторая форма слабее, но применима для более широкого класса задач, поскольку подавляющее большинство оптимизационных задач оказываются некорректными (см., например, [2]).

Поиск приближенного решения в сильном смысле при отсутствии корректности по Тихонову является чрезвычайно сложной задачей. Однако наши возможности существенно расширяются, если пользоваться слабой формой приближенного решения. Она вполне оправдана с практической точки зрения, позволяя минимизировать функционал с желаемой степенью точности. Сильное приближенное решение заведомо бессмысленно, если нижняя грань функционала не достигается в виду отсутствия оптимального управления. Слабая форма оперирует с нижней гранью функционала и не требует существования оптимального управления, вследствие чего именно сюда выводят методы расширения экстремальных задач (см., например, [3]). Однако на практике зачастую возникают существенные сложности и с нахождением слабого приближенного решения, и появляется необходимость в его дальнейшем ослаблении.

В [3] Варга предлагает более слабую форму приближенного решения. Здесь отмечается, что при поиске приближенного решения задачи можно допускать не точное, а лишь приближенное выполнение ограничений, налагаемых на систему. Эти конструкции, разработанные изначально для систем с сосредоточенными параметрами, были распространены на системы с распределенными параметрами [4]. Указанное направление было стимулировано необходимостью анализа экстремальных задач в условиях недостижимости нижней грани минимизируемого функционала. При этом если в [3] таким образом осуществляется расширение задачи, то в [4] осуществляется поиск приближенных минимизирующих последовательностей с использованием принципа Экланда [5]. Отметим, однако, что указанные методы направлены непосредственно на преодоление трудностей, обусловленных возможной неразрешимостью экстремальной задачи. Однако это далеко не единственный возможный источник трудностей.

В [3], [4] при решении оптимизационных задач допускается малая погрешность в определении оптимального управления, минимума функционала и реализации ограничений, налагаемых на систему. При этом считается обязательным, чтобы уравнение состояния системы выполнялось абсолютно точно, поскольку его нарушение *“является в буквальном смысле вне этого мира”* (см. [3; с. 270]). Однако, во-первых, математическая модель процесса неизменно строится на основе некоторых гипотез, достоверность которых абсолютной не является. Во-вторых, параметры модели на практике определяются из эксперимента, а значит, приближенно. Поэтому, допуская малую погрешность по управлению, критерию оптимальности и налагаемым ограничениям, мы могли бы считать, что и уравнение состояния выполнено не точно, а лишь с некоторой достаточно малой погрешностью.

В пользу указанной точки зрения говорит и то обстоятельство, что уравнение состояния и ограничения на систему зачастую рассматривают с единых позиций. Так, для решения оптимизационных задач, характеризуемых, главным образом, некорректными задачами математической физики, Фурсиков вводит понятие допустимой пары – такой пары “управление-состояние”, которая удовлетворяет уравнению состояния [6]. При этом критерий оптимальности минимизируется на множестве допустимых пар, т.е. уравнение состояния интерпретируется как ограничение в форме равенства. Тем самым удается преодолеть трудности, обусловленные отсутствием однозначной разрешимости рассматриваемых краевых задач на произвольном допустимом управлении. Желаемый результат (необходимые условия оптимальности) здесь получаются за счет принципа Лагранжа. Для решения аналогичных задач Лионс применяет метод штрафа [7]. На промежуточной стадии исследования при этом получают условия оптимальности для аппроксимационной задачи, включающие в себя “возмущенное” уравнение состояния. В силу сходимости метода штрафа указанные соотношения можно понимать как приближенные условия оптимальности для исходной задачи, в которых уравнение состояния выполнены не точно, а с некоторой малой погрешностью. Отметим, что на приближенные условия оптимальности выводит и принцип Экланда [5]. Таким образом, имеет смысл под приближенным решением задачи оптимального управления понимать такую пару “управление-состояние”, достаточно близкую к множеству допустимых пар как в смысле налагаемых ограничений, так и в смысле выполнения уравнения состояния, значение минимизируемого функционала на котором достаточно близко к его нижней грани на множестве всех допустимых пар. Эта форма приближенного

решения слабее известных, но может быть определена для более широкого класса оптимизационных задач. Подобная идея была реализована в [8], [9] для некоторых задач оптимального управления сингулярными системами, не допускающими, по-видимому, анализа известными методами [6], [7].

В настоящей работе дается определение приближенного решения экстремальных задач, обобщающее аналогичное определение из [8], [9] и пригодное для анализа задач с различными типами сложности помимо сингулярности уравнения состояния. Таким способом рассматривается ряд неисследованных оптимизационных задач.

Пусть заданы множество V , функционал I на нем и его подмножество U . Ставится задача минимизации функционала I на множестве U . Точку $u \in V$ назовем (τ, O, ε) -приближенным решением задачи, где τ – топология на V , O – малая окрестность в смысле τ множества U , ε – малое положительное число, если справедливо включение $u \in O$ и неравенство $I(u) \leq \inf I(U) + \varepsilon$. Это приближенное решение задачи достаточно близко к какой-либо допустимой точке (включение в U выполнено с большой точностью), а значение функционала на нем достаточно близко к его нижней грани на заданном множестве (превышение нижней грани – не более чем на малую величину).

Приближенное решение задачи ищется на основе алгоритма, генерирующего некоторую последовательность элементов из V . Последовательность $\{u_k\}$ из V назовем τ -приближенной минимизирующей последовательностью, если из нее можно выделить такую подпоследовательность, которая сходится в смысле τ к элементу из U , а соответствующая последовательность значений функционала сходится к $\inf I(U)$. Если $\{u_k\}$ – τ -приближенная минимизирующая последовательность, то для любой сколь угодно малой окрестности O множества U и сколь угодно малого числа ε номер k можно выбрать столь большим, чтобы u_k оказалось (τ, O, ε) -приближенным решением. Тем самым исследование задачи сводится к построению ее приближенных минимизирующих последовательностей. Последние определяются как решения некоторых вспомогательных экстремальных задач.

Последовательность $\{(U_k, I_k, u_k)\}$ назовем τ -аппроксимацией задачи, где U_k – подмножество V , I_k – функционал на U_k , а u_k – его точка минимума на указанном множестве, если $\{u_k\}$ – τ -приближенная минимизирующая последовательность для этой задачи. Если $\{u_k\}$ – обычная минимизирующая последовательность, то $\{(U_k, I_k, u_k)\}$ назовем аппроксимацией задачи. Решение исходной задачи сводится к поиску ее τ -аппроксимации. Чтобы получаемые результаты были содержательными, топология τ не должна быть слишком слабой, а аппроксимация задачи должна быть сравнительно простой, чтобы для ее анализа оказались применимы известные методы.

Следует отметить, что сама по себе идея нахождения приближенного решения задачи за счет переноса центра исследования от оптимального управления к минимизирующей последовательности далеко не нова. Этой концепции придерживался, к примеру, Варга в [3]. Кротов подчеркивает (см. [10]), что в условиях неразрешимости экстремальной задачи имеет смысл перейти от поиска отсутствующего оптимального управления к нахождению существующих минимизирующих последовательностей. Сумин, отталкивающийся от конструкций Варги, применяет подобный аппарат (субоптимальное управление) для анализа ряда оптимизационных задач для систем с распределенными параметрами (см., например, [4]). Однако работы указанного направления обусловлены возможной недостижимостью нижней грани

минимизируемого функционала и восходят к поставленной еще Гильбертом проблеме расширения экстремальных задач, решенной в простейшем случае Л. Янгом и Е. Мак-Шейном. Однако, как отмечает Сумин, характеризующий свои работы, “необходимые условия минимизирующего приближенного решения: превращаются в пределе в обычный принцип максимума Понтрягина в случае существования оптимального управления” [4]. Таким образом, в случае разрешимости оптимизационной задачи подобные результаты сводятся к стандартным. Не исключая возможности применения предлагаемых понятий для указанного класса задач, мы применим их для случая, когда оптимальное управление существует, а трудности носят качественно иной характер.

В качестве иллюстрации описываемого подхода мы рассмотрим три качественно разные оптимизационные задачи. Сложность первой из них обусловлена, во-первых, наличием закрепленного конечного состояния, вследствие чего не ясно, как следует варьировать управление, чтобы остаться в пределах множества допустимых управлений, а, во-вторых, наличием негладких членов в уравнении состояния и критерии оптимальности, что не позволяет явным образом дифференцировать функционал с целью получения условий оптимальности. Для преодоления первой трудности мы регуляризуем функционал в соответствии с методом штрафа, а вторая трудность преодолевается за счет гладкой аппроксимации уравнения состояния и минимизируемого функционала. Во втором примере рассматривается оптимизационная задача на бесконечном интервале времени. Она аппроксимируется аналогичной задачей на конечном интервале времени. Наконец, в третьем примере не реализуется однозначная разрешимость уравнений состояния на произвольном управлении и присутствуют фазовые ограничения в форме включения. В этой связи рассматриваемая оптимизационная задача аппроксимируется задачей минимизации соответствующего функционала штрафа на множестве допустимых пар “управление-состояния”. Во всех трех случаях достаточно сложная исходная задача тем или иным способом аппроксимируется экстремальными задачами, допускающими анализ с помощью известных методов. А обоснование соответствующей формы сходимости метода аппроксимации, подтверждающее, что мы действительно имеем дело с τ -аппроксимацией, гарантирует, что в процессе анализа преобразованной задачи получается приближенное решение поставленной задачи. Тем самым, несмотря на столь сильное различие между рассмотренными примерами, решаются они в рамках одного и того же единого подхода.

2. Негладкая параболическая система с закрепленным конечным состоянием. Дана открытая ограниченная область Ω пространства $\mathbb{R}^n$ с границей Γ , $T > 0$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Рассматривается уравнение

$$y'(s) - \Delta y(s) + a(s, y(s)) = v(s) \quad (1)$$

с однородными граничными условиями на Σ и при $t = 0$, где $s = (x, t)$, $y' = \partial y / \partial t$. Функция a принадлежит множеству A функций Каратеодори таких, что

$$|a(s, \varphi)| \leq a_0(s) + b|\varphi|^{q-1}, \quad a(s, \varphi)\varphi \geq c|\varphi|^{q-1}, \quad [a(s, \varphi) - a(s, \psi)](\varphi - \psi) \geq 0$$

для всех $\varphi, \psi \in \mathbb{R}^n$ п.в. на Q , где $a_0 \in L_{q'}(Q)$, $b > 0$, $c > 0$, $q > 1$, $1/q + 1/q' = 1$.

Определим

$$X = L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L_q(Q)$$

и сопряженное к нему пространство

$$X' = L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)) + L_{q'}(Q).$$

Из теоремы 1.1 (см. [11; с. 239]) следует, что для любого $v \in X'$ краевая задача для уравнения (1) имеет единственное решение $y = y[v]$ из $Y = \{y \mid y \in X, y' \in X'\}$, причем отображение $y[\cdot]: X' \rightarrow Y$ слабо непрерывно. Управление v выбирается из выпуклого замкнутого подмножества V из X' . Конечное состояние системы предполагается известным, т.е. выполнено условие $y|_{t=T} = w$, где $w \in L_2(\Omega)$. Совокупность управлений из V , на которых решение системы удовлетворяет этому условию, обозначим через U . Предположим, что это множество не пусто, т.е. оптимизационная задача не тривиальна. Задается функционал

$$I(v) = \int_Q f(s, y(s), \nabla y(s)) ds + \frac{\gamma}{2} \int_Q v(s)^2 ds,$$

где $y = y[v]$, $\gamma > 0$, f принадлежит классу F функций Каратеодори на $Q \times \mathbb{R}^{n+1}$, удовлетворяющих неравенству $f(s, \varphi) \geq d|\varphi|^2$ п.в. на Q для всех $\varphi \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, что функция $f(s, \psi, \cdot)$ выпукла почти для всех $s \in Q$ и $\psi \in \mathbb{R}$, где $d > 0$.

ЗАДАЧА 1 состоит в минимизации функционала I на множестве U .

Она отличается от известных оптимизационных задач для нелинейных уравнений параболического типа (см., например, [6], [7], [12]–[15]) тем, что конечное состояние системы фиксировано, функции a и f в уравнении состояния допускаются негладкими, а ограничение на скорость роста показателя нелинейности q отсутствует.

ЛЕММА 1. *Задача 1 разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность $\{v_n\}$ является минимизирующей. В силу коэрцитивности функционала она ограничена в пространстве $L_2(Q)$, и после выделения подпоследовательности имеем $v_n \rightarrow v$ слабо в $L_2(Q)$, причем $v \in V$. Тогда $y[v_n] \rightarrow y[v]$ слабо в Y , а в силу теоремы 1.17 (см. [11; с. 177]) $y[v_n]|_{t=T} \rightarrow y[v]|_{t=T}$ слабо в $L_2(\Omega)$. Тогда справедливо равенство $y[v]|_{t=T} = w$, а значит, $v \in U$. Пользуясь теоремой 2.1 о полунепрерывности снизу интегрального функционала (см. [16; с. 242]), установим, что $I(v) \leq \liminf I(v_n)$, а значит, управление v оптимально.

Сложность задачи 1 связана с наличием фиксированного конечного состояния системы, вследствие чего непонятно, каким способом следует варьировать управление в процессе получения условий оптимальности, чтобы остаться в пределах выполнения заданного фазового ограничения. А отсутствие гладкости оператора состояния и критерия оптимальности не позволяет дифференцировать минимизируемый функционал, как это делается при построении условий оптимальности стандартными методами. В этой связи мы воспользуемся методом штрафа для аппроксимации фазового ограничения с гладкой аппроксимацией оператора состояния и данного функционала.

Рассмотрим последовательности функций $\{a_k\}$ класса A и $\{f_k\}$ класса F , удовлетворяющих включениям $a_k(s, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$, $f_k(s, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$ при выполнении условий $a_k(s, \varphi) \rightarrow a(s, \varphi)$ равномерно по $\varphi \in \mathbb{R}$ п.в. на Q , а также

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in Y} \int_Q |f_k(s, y(s), \nabla y(s)) - f(s, y(s), \nabla y(s))| ds = 0.$$

В области Q задается однородная краевая задача для уравнения

$$y'_k - \Delta y_k + a_k(s, y_k) = v. \quad (2)$$

Для любого $v \in X'$ она имеет единственное решение $y_k = y_k[v]$ из Y . Определим функционал

$$I_k(v) = \int_Q f_k(s, y_k(s), \nabla y_k(s)) ds + \frac{\gamma}{2} \int_Q v^2 ds + \frac{1}{2\varepsilon_k} \|y_k|_{t=T} - w\|_{H^{-1}(\Omega)}^2,$$

где $\varepsilon_k > 0$ и $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Последнее слагаемое вводится согласно методу штрафа. Аналогичная методика использовалась в [17] для учета стандартных фазовых ограничений для систем, описываемых уравнениями эллиптического типа, а в [18] – для решения задачи с закрепленным конечным состоянием для одной сингулярной системы. Однако в отличие от последней работы норма выбирается в классе $H^{-1}(\Omega)$, поскольку для используемого обычно пространства функций, интегрируемых с квадратом, не хватит запаса функциональных свойств для дифференцируемости функционала. Особенностью данной работы является также сочетание метода штрафа с гладкой аппроксимацией уравнения состояния и критерия оптимальности. Для уравнения (2) устанавливаются те же свойства, что исходного уравнения (1), в частности, слабая непрерывность решения краевой задачи относительно управления. Тогда, учитывая непрерывность вложения пространства Y в $C(0, T; H^{-1}(\Omega))$ (см. лемма 1.11 из [11], с. 173), установим слабую непрерывность отображения $y[\cdot]|_{t=T}: X' \rightarrow H^{-1}(\Omega)$. Тогда устанавливается слабая полунепрерывность снизу функционала I_k . Повторяя доказательство леммы 1, установим, что задача его минимизации на множестве V имеет некоторое решение u_k . Покажем, что мы действительно имеем дело с τ -аппроксимацией поставленной задачи.

ТЕОРЕМА 1. *Последовательность $\{(V, I_k, u_k)\}$ является τ -аппроксимацией задачи 1, где τ – слабая топология на X' .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} I_k(u_k) = \min I_k(V) &\leq I_k(u) \leq I(u) + \int_Q |f_k(s, y_k, \nabla y_k) - f(s, y_k, \nabla y_k)| ds \\ &\leq \min I(U) + \sup_{y \in Y} \int_Q |f_k(s, y_k, \nabla y_k) - f(s, y_k, \nabla y_k)| ds, \end{aligned}$$

где u – решение задачи 1, $y_k = y_k[u_k]$. Переходя к пределу, имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} I_k(u_k) \leq \min I(U)$. Учитывая неотрицательность функционалов, заключаем, что последовательность $\{I_k(u_k)\}$ ограничена. Тогда $\{u_k\}$ ограничена, причем

$$y_k|_{t=T} = w + \xi_k, \quad (3)$$

где ξ_k удовлетворяет оценке $\|\xi_k\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\sqrt{\varepsilon_k}$ с некоторой константой $c > 0$.

Умножая (2) на y_k и интегрируя по области Q , установим ограниченность $\{y_k\}$ в X . Выражая из (2) производную от y_k , установим ее ограниченность в X' . Тогда последовательность $\{y_k\}$ ограничена в Y . После выделения подпоследовательностей установим $u_k \rightarrow u^*$ слабо в X' , $y_k \rightarrow y^*$ слабо в Y и $\xi_k \rightarrow 0$ слабо в $H^{-1}(\Omega)$, причем справедливо включение $u^* \in V$ в силу выпуклости V . Очевидно, $\{a_k\}$ ограничена

в $L_{q'}(\Omega)$, где $a_k = a_k(s, y_k)$. Учитывая компактность вложения Y в $L_2(Q)$ (см. [19; с. 70, теорема 5.1]), после извлечения подпоследовательности получим $y_k \rightarrow y^*$ сильно в $L_2(\Omega)$ и п.в. на Q . Отсюда следует, что $a_k(s, y_k) \rightarrow a(s, y^*)$ почти для всех $s \in Q$. Справедливы соотношения

$$|a_k(s, y_k(s)) - a(s, y^*(s))| \leq |a(s, y_k(s)) - a(s, y^*(s))| + \sup_{\varphi \in \mathbb{R}} |a_k(s, \varphi) - a(s, \varphi)|.$$

Переходя к пределу, заключаем, что $a_k \rightarrow a^*$ п.в. на Q , где $a^* = a(s, y^*)$. В результате получим $a_k \rightarrow a^*$ слабо в $L_{q'}(Q)$. Переходя к пределу в (2), установим, что $y^* = y[u^*]$. Тогда из (3) с учетом сходимости $y_k|_{t=T} \rightarrow y^*|_{t=T}$ слабо в $L_2(\Omega)$ имеем $y^*|_{t=T} = w$, а значит, $u^* \in U$. Отсюда и из $\lim_{k \rightarrow \infty} I_k(u_k) \leq \min I(U)$ следуют утверждения теоремы.

Итак, для нахождения приближенного решения задачи 1 следует найти решение ее аппроксимации при достаточно больших значениях k . В последней отсутствует ограничение на состояние системы в конечный момент времени и негладкие члены. Для получения условий оптимальности предположим, что производная $a_{ky}(s, y)$ от a_k по третьему аргументу удовлетворяет неравенству

$$|a_{ky}(s, \varphi)| \leq a'(s) + b'|\varphi|^{q-2}$$

для всех $\varphi \in \mathbb{R}$ и п.в. на Q , где $a' \in L_{q/(q-2)}(Q)$. Тогда соответствующий оператор Немыцкого, действующий из $L_q(Q)$ в $L_{q'}(Q)$, будет дифференцируемым по Фреше (см. [20; с. 312]). К сожалению, даже в этих условиях, пользуясь методикой, описанной в [21], можно показать, что при достаточно больших значениях параметров q и n отображение $y[\cdot]: X' \rightarrow Y$ для уравнения (6) не дифференцируемо по Гато. Тогда мы не сможем воспользоваться стандартными условиями оптимальности (например, теоремой 1.3, [22; с. 18]), а известные методы оптимизации для нелинейных параболических уравнений [6], [7], [12]–[15] оказываются непригодными, так как они используют ограничения на показатель нелинейности q и размерность области n (см., например, [6; с. 137, теорема 8.1]; [7; с. 35, теорема 3.2]; [13; с. 184, теорема 2.6]).

Для преодоления этих трудностей воспользуемся особой формой операторной производной [21]. Пусть задан оператор $A: Z \rightarrow Y$, где Y, Z – банаховы пространства. Оператор A назовем $(Z_0, Y_0; Z_1, Y_1)$ -расширенно дифференцируемым в точке $x \in X$, если существуют такие банаховы пространства Z_0, Y_0, Z_1, Y_1 , удовлетворяющие непрерывным вложениям $Z_1 \subset Z_0 \subset Z, Y \subset Y_0 \subset Y$, и линейный непрерывный оператор $D: Z_0 \rightarrow Y_0$, что при $\sigma \rightarrow 0$ имеет место сходимость $[A(x + \sigma h) - Ax]/\sigma \rightarrow Dh$ в Y_1 для любого $h \in Z_1$. Очевидно, $(Z, Y; Z, Y)$ -расширенная производная оператора совпадает с его производной Гато, а $(Z, Y; Z_1, Y)$ -расширенная производная – с производной по подпространству (см. [23]) Z_1 .

Для любой точки $v_0 \in X'$ определим пространство $Y_1 = L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ и его пересечение Y_0 с множеством X_0 функций, измеримых на Q и интегрируемых с квадратом с весом $g_0 = g_0(s) = \sqrt{a_{ky}(s, y_0(s))}$, где $y_0 = y[v_0]$. Пространство X_0 гильбертово (см., [20; с. 180]), а значит, Y_0 также будет гильбертовым пространством. Сопряженным к Y_0 будет сумма сопряженных пространств $Z_1 = Y_1'$ и X_0' (см. [11; с. 25, теорема 5.13]). Тогда $Z_0 = Y_0'$ с точностью до изоморфизма будет состоять из всевозможных функций вида $g_0\eta$ с $\eta \in L_2(Q)$, откуда следует представление сопряженного

пространства $Z_0 = \{\mu + g_0\eta \mid \mu \in Z_1, \eta \in L_2(Q)\}$. Ниже при записи решения (2) мы для краткости опускаем индекс k .

ЛЕММА 2. *Отображение $y[\cdot]: X' \rightarrow Y$ для уравнения (2) в точке v_0 имеет $(Z_0, Y_0; Z_1, Y_1)$ -расширенную производную D , характеризуемую соотношением*

$$\int_Q \mu D h \, ds = \int_Q p_\mu h \, ds \quad \forall h \in Z_0, \quad \mu \in Y'_0, \quad (4)$$

где p_μ – равное нулю на поверхности Σ и при $t = T$ решение уравнения

$$-p'_\mu - \Delta p_\mu + a_{ky}(s, y_0)p_\mu = \mu. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из монотонности функции a_k по третьему аргументу следует неотрицательность ее производной. Тогда из (2) на управлениях v_0 и $v_0 + \sigma h$ для любых $h \in X'$ и $\sigma > 0$ в силу теоремы о среднем (см. [23; теорема 1.8]) следует соотношение

$$z' - \Delta z + g(\sigma)^2 z = \sigma h, \quad (6)$$

где $g(\sigma)^2 = a_{ky}(s, y_0 + \delta\{y[v_0 + \sigma h] - y_0\})$, $\delta > 0$. Рассмотрим уравнение

$$-p' - \Delta p + g(\sigma)^2 p = \mu \quad (7)$$

с однородными условиями на Σ и при $t = T$. При $\sigma = 0$ оно сводится к (4). Определим

$$Y_\sigma = \{p \mid p \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega)), g(\sigma)p \in L_2(Q)\}$$

и сопряженное пространство

$$Y'_\sigma = \{\xi + g(\sigma)\eta \mid \xi \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \eta \in L_2(Q)\}.$$

Зададим

$$X_\sigma = \{p \mid p \in Y_\sigma, p' \in Y'_\sigma\}.$$

Умножая (7) на p и интегрируя по Q , установим, что соответствующая краевая задача для любого $\mu \in Y'_\sigma$ имеет априорную оценку решения в X_σ . Тогда получается априорная оценка для p' в Y'_σ , а значит, уравнение допускает априорную оценку решения в X_σ . Из теоремы 1.2 (см. [22; с. 110]) следует, что для всех $\sigma > 0$, $\mu \in Y'_\sigma$ краевая задача для уравнения (7) имеет единственное решение $p = p_\mu(\sigma)$ из X_σ . Так, для любого $\mu \in Y'_0$ однородная краевая задача для (5) однозначно разрешима в X_0 , а значит, и в Y_0 . Тем самым, для любых $h \in Z_0$, $\mu \in Y'_0$ интеграл в правой части (4) имеет смысл, и это равенство определяет линейный непрерывный оператор $D: X_0 \rightarrow Y_0$.

Умножаем (6) на $p_\mu(\sigma)$ и интегрируем результат по Q . Все интегралы в соответствующем выражении имеют смысл. После деления на σ устанавливаем равенство

$$\int_Q \frac{\mu(y[v_0 + \sigma h] - y_0)}{\sigma} \, ds = \int_Q p_\mu h \, ds \quad \forall h \in X', \quad \mu \in Y'_\sigma.$$

Определив $M = \{\mu \in Z_1 \mid \|\mu\|_{Z_1} = 1\}$, отсюда и из (4) выводим равенство

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{y[v_0 + \sigma h] - y_0}{\sigma} - Dh \right\|_{Y_1} \\ &= \sup_{\mu \in M} \int_Q \mu \left\{ \frac{y[v_0 + \sigma h] - y_0}{\sigma} - Dh \right\} \, ds = \int_Q [p_\mu(\sigma) - p_\mu] h \, ds \quad \forall h \in Z_1. \end{aligned} \quad (8)$$

При $\sigma \rightarrow 0$ имеем $v_0 + \sigma h \rightarrow v_0$ в X' , а значит, $y[v_0 + \sigma h] \rightarrow y_0$ слабо в Y . Тогда семейство $\{y[v_0 + \sigma h]\}$ ограничено в Y , а следовательно, и в $L_q(Q)$. Отсюда следует ограниченность $\{g(\sigma)\}$ в $L_{2q/(q-2)}(Q)$. Умножая (7) на функцию $p = p_\mu(\sigma)$ и интегрируя по Q , установим

$$\int_Q \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial p_\mu(\sigma)}{\partial x_i} \right]^2 ds + \int_Q [g(\sigma)p_\mu(\sigma)]^2 ds \leq \int_Q \mu p_\mu(\sigma) ds.$$

Отсюда следуют оценки

$$\sup_{\mu \in M} \|p_\mu(\sigma)\|_{Y_1} \leq 1, \quad \sup_{\mu \in M} \|g(\sigma)p_\mu(\sigma)\|_{L_2(Q)} \leq 1.$$

Тогда, выражая из (7) производную от рассматриваемой функции, установим ее равномерную по $\mu \in M$ ограниченность в Y_1 . Тогда семейство $\{p_\mu(\sigma)\}$ ограничено в $P = \{p \mid p \in Y_1, p' \in Y_1'\}$ равномерно по $\mu \in M$. Отметим следующую из неравенства Гёльдера оценку

$$\sup_{\mu \in M} \|g(\sigma)^2 p_\mu(\sigma)\|_{L_{q'}(Q)} \leq \|g(\sigma)\|_{L_{2q/(q-2)}(Q)} \sup_{\mu \in M} \|g(\sigma)p_\mu(\sigma)\|_{L_2(Q)}.$$

Тем самым, $\{g(\sigma)^2 p_\mu(\sigma)\}$ ограничено в $L_{q'}(Q)$ равномерно по $\mu \in M$.

Пользуясь теоремой Банаха–Алаоглу, установим, что $p_\mu(\sigma) \rightarrow r_\mu$ слабо в P и $g(\sigma)^2 p_\mu(\sigma) \rightarrow s_\mu$ слабо в $L_{q'}(Q)$ равномерно по $\mu \in M$. Учитывая компактность вложения пространств Y и P в $L_2(Q)$ (см. [19; с. 70, теорема 5.1]), установим, что $y[v_0 + \sigma h] \rightarrow y_0$ и $p_\mu(\sigma) \rightarrow r_\mu$ сильно в $L_2(Q)$ и п.в. на Q , откуда следует, что $g(\sigma)^2 p_\mu(\sigma) \rightarrow a_{ky}^0 r_\mu$ п.в. на Q равномерно по $\mu \in M$, где $a_{ky}^0 = a_{ky}(s, y_0(s))$. Пользуясь леммой 1.3 (см. [19; с. 25]), установим, что $g(\sigma)^2 p_\mu(\sigma) \rightarrow a_{ky}^0 r_\mu$ слабо в $L_{q'}(Q)$ равномерно по $\mu \in M$, а значит, $s_\mu = a_{ky}^0 r_\mu$. В результате перехода к пределу в (7) получаем, что $r_\mu = p_\mu$. Тогда из (8) следует, что D является расширенной производной соответствующего отображения.

Будем полагать далее, что функции $f_k = f_k(s, y, \nabla y)$ и их производные f_{ky} и $f_{k\nabla y}$ по второму и третьему аргументам удовлетворяют неравенствам

$$|f_k(s, \varphi, \psi)| \leq \alpha(s) + \beta(|\varphi|^q + |\psi|^2),$$

$$|f_{ky}(s, \varphi, \psi)| \leq \alpha'(s) + \beta'(|\varphi|^{q/q'} + |\psi|^{2/q'}), \quad |f_{k\nabla y}(s, \varphi, \psi)| \leq \alpha''(s) + \beta''(|\varphi|^{q/2} + |\psi|)$$

для любых значений $\varphi \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathbb{R}^n$ и п.в. на Q , где $1/q + 1/q' = 1$ при $n > 1$, $q' = 1$ при $n = 1$, $\alpha \in L_1(Q)$, $\alpha' \in L_{q'}(Q)$, $\alpha'' \in L_2(Q)$, $\beta > 0$, $\beta' > 0$, $\beta'' > 0$. Тогда (см. [20; с. 312]) функционал

$$L_k = L_k(y) = \int_Q f_k(s, y(s), \nabla y(s)) ds$$

дифференцируем по Фреше в пространстве Y , причем

$$L'_k(y)h = \int_Q [f_{ky}(s, y, \nabla y)h + f_{k\nabla y}(s, y, \nabla y)\nabla h] ds \quad \forall h \in X'.$$

ЛЕММА 3. Функционал I_k в точке u_k имеет производную $I'_k(u_k) = \gamma u_k + p_k$ по подпространству Z_1 , где p_k – решение системы

$$-p'_k - \Delta p_k + a_{ky} p_k = f_{ky} - \operatorname{div} f_{k\nabla y}, \quad s \in Q, \quad (9)$$

$$p_k = 0, \quad s \in \Sigma, \quad p_k|_{t=T} = \frac{\Lambda(y[v_k]|_{t=T} - w)}{\varepsilon_k}, \quad x \in \Omega, \quad (10)$$

Λ – канонический изоморфизм из $H^{-1}(\Omega)$ в $H_0^1(\Omega)$, а аргументами производных f_k являются значения s , y_k , ∇y_k , причем y_k – решения краевой задачи для уравнения (2) при $v = u_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Задача (9), (10) однозначно разрешима в X_0 при $v_0 = u_k$. Имеем

$$I_k(v) = L_k(y[v]) + \frac{\gamma}{2} \int_Q v^2 ds + R_k(y[v]_T),$$

где

$$R_k(\varphi) = (2\varepsilon_k)^{-1} \|\varphi - w\|_{H^{-1}(\Omega)}^2,$$

через $y[v]$ обозначено решение краевой задачи для уравнения (2), а через $y[v]_T$ – его значение при $t = T$. Из леммы 2 следует, что при $\sigma \rightarrow 0$ для всех $h \in Z_1$ имеем $(y[u_k + \sigma h] - y[u_k])/\sigma \rightarrow Dh$ в $L_2(Q)$ и $(\nabla y[u_k + \sigma h] - \nabla y[u_k])/\sigma \rightarrow \nabla Dh$ в $L_2(Q)^n$. Пользуясь теоремой о дифференцируемости сложной функции и леммой 3, имеем

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{L_k(y[u_k + \sigma h] - y[u_k])}{\sigma} = \int_Q (f_{ky} Dh + f_{k\nabla y} \nabla Dh) ds = \int_Q (f_{ky} - \operatorname{div} f_{k\nabla y}) Dh ds.$$

Учитывая соотношение (5), установим равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{L_k(y[u_k + \sigma h] - y[u_k])}{\sigma} = \int_Q l_k h ds,$$

где l_k удовлетворяет уравнению $-l'_k - \Delta l_k + a_{ky} l_k = f_{ky} - \operatorname{div} f_{k\nabla y}$ и обращается в нуль на поверхности Σ и при $t = T$.

Установим дифференцируемость функционала R_k . Очевидно, леммы 2 не достаточно для обоснования дифференцируемости по управлению решения уравнения (2) в конечный момент времени. Для получения недостающих свойств умножим (6) при $v_0 = u_k$ на функцию $z = y[u_k + \sigma h] - y[u_k]$ и проинтегрируем результат по Q . Уравнение относительно z/σ получается путем деления равенства (6) на число σ и является сопряженным к исследованному в лемме 2 уравнению (7). Для него могут быть произведены те же рассуждения, что и при анализе краевой задачи для (7). Тогда, пользуясь описанной при доказательстве леммы 2 методикой, установим ограниченность отношения z/σ в пространстве Y_σ , а значит, и в P . Тогда после выделения подпоследовательности установим $(y[u_k + \sigma h] - y[u_k])/\sigma \rightarrow \theta$ слабо в P . Учитывая лемму 3, получим $\theta = Dh$. Пользуясь непрерывностью вложения пространства P в $C([0, T]; L_2(\Omega))$, заключаем, что $(y[u_k + \sigma h] - y[u_k])_T/\sigma \rightarrow Dh_T$ слабо в $L_2(\Omega)$ и сильно в $H^{-1}(\Omega)$ в силу компактности вложения $L_2(\Omega)$ пространства в $H^{-1}(\Omega)$. Тогда

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{R_k(y[u_k + \sigma h])_T - R_k(y[u_k]_T)}{\sigma} = \frac{1}{\varepsilon_k} (y[u_k]_T - w, (Dh)_T),$$

где скалярное произведение берется в $H^{-1}(\Omega)$. Пользуясь теоремой Рисса, получаем

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{R_k(y[u_k + \sigma h]_T) - R_k(y[u_k]_T)}{\sigma} = \frac{1}{\varepsilon_k} \int_{\Omega} \Lambda(y[u_k]_T - w)(Dh)_T dx.$$

После деления равенства (6) при $v_0 = u_k$ на σ и перехода к пределу установим $(Dh)' - \Delta Dh + a_{ky} Dh = h$. После умножения на произвольную функцию $\eta \in X_0$ и интегрирования по Q будем иметь

$$\int_{\Omega} (Dh\eta)_T dx + \int_Q (-\eta' - \Delta\eta + a_{ky}\eta) Dh ds = \int_Q \eta h ds.$$

Выбирая в качестве η решение уравнения $-r'_k - \Delta r_k + a_{ky} r_k = 0$, равное нулю на Σ и значению $\Lambda(y[u_k]_T - w)/\varepsilon_k$ при $t = T$, приходим к соотношению

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{R_k(y[u_k + \sigma h]_T) - R_k(y[u_k]_T)}{\sigma} = \int_Q r_k h ds.$$

На основе полученных результатов будем иметь

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{I_k(u_k + \sigma h) - I_k(u_k)}{\sigma} = \int_Q (\gamma u_k + l_k + r_k) h ds.$$

Отсюда в силу равенства $p_k = l_k + r_k$ следуют утверждения теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Функция u_k удовлетворяет вариационному неравенству*

$$\int_Q (\gamma u_k + p_k)(v - u_k) ds \geq 0 \quad \forall v \in [U \cap (u_k + Z_1)].$$

Для доказательства достаточно неравенство $I_k(u_k + \sigma(v - u_k)) - I_k(u_k) \geq 0$ разделить на σ и перейти к пределу с учетом леммы 3. Итак, для нахождения решения аппроксимационной задачи получается система, включающая в себя краевую задачу уравнения (2) при $v = u_k$, сопряженную задачу (9), (10) и полученное вариационное неравенство. Согласно теореме 1 при достаточно больших значениях параметра k оно оказывается приближенным решением исходной задачи в указанном ранее смысле.

3. Параболическая система на бесконечном интервале времени. Дана открытая ограниченная область Ω из $\mathbb{R}^n$ с границей Γ , $Q = \Omega \times (0, \infty)$, $\Sigma = \Gamma \times (0, \infty)$. Рассматривается краевая задача

$$y(s)' - \Delta y(s) + a(s, y(s)) = v(s) + f(s), \quad s \in Q, \quad (11)$$

$$y(s) = 0, \quad s \in \Sigma, \quad y(x, 0) = y_0, \quad x \in \Omega. \quad (12)$$

Здесь функция a принадлежит описанному ранее множеству A с параметром $q > 2$. Определим пространства

$$W = L_2(0, \infty; H_0^1(\Omega)), \quad W' = L_2(0, \infty; H^{-1}(\Omega)), \\ X = W \cap L_q(Q), \quad X' = W' + L_{q'}(Q), \quad Y = \{y \mid y \in X, y' \in X'\}.$$

Пусть выполняются включения $y_0 \in L_2(\Omega)$, $f \in W'$. Управление v выбирается из пространства $V = L_2(Q)$. Будем полагать, что входящая в (11) функция a удовлетворяет тем же ограничениям на скорость роста, коэрцитивность и монотонность, что и соответствующая функция в уравнении (1). Отметим, что наличие в правой части (11) дополнительной по сравнению с (1) известной функции f из указанного пространства, принадлежность управления более узкому классу функций, рассмотрение уравнения на бесконечном интервале времени и наличие неоднородного начального условия (12) с правой частью из указанного пространства не меняют функциональные свойства решения краевой задачи. Таким образом, для любого $v \in V$ задача (11), (12) имеет единственное решение $y = y[v]$ из Y , причем отображение $y[\cdot]: V \rightarrow Y$ слабо непрерывно. Потребуем, чтобы функция $a(s; \cdot)$ почти для всех $s \in Q$ обладала производной $a_y(s; \varphi)$ для всех φ , являющейся функцией Каратеодори и удовлетворяющей неравенству $|a_y(s; \varphi)| \leq a_1(s) + b_1|\varphi|^{q-2}$, где $a_1 \in L_{q/(q-2)}(\Omega)$, $b_1 > 0$. задается множество

$$U = \{v \in V \mid v(x, t) \in G(x), (x, t) \in Q\},$$

где $G(x)$ есть выпуклое замкнутое ограниченное множество, включающее нуль, $x \in \Omega$. Рассматривается функционал

$$I(v) = \frac{\alpha}{2} \|v\|_V^2 + \frac{1}{2} \|y[v] - y_d\|_W^2,$$

где $\alpha > 0$, $y_d \in W$ – известная функция.

ЗАДАЧА 2 состоит в минимизации функционала I на U .

Задачи оптимального управления системами для нелинейных параболических уравнений на конечном интервале времени достаточно хорошо исследованы (см., например, [6], [7], [12]–[15]). В [22] для решения экстремальной задачи на бесконечном интервале времени для линейного параболического уравнения в отсутствие ограничений на управление предлагается ее аппроксимация соответствующей системой на конечном интервале времени. При этом существенным образом использовалось то обстоятельство, что условия оптимальности для аппроксимационной задачи являются необходимыми и достаточными, что позволило потом перейти к пределу при неограниченном возрастании времени и получить соответствующее уравнение Риккати. В нелинейном случае и при наличии ограничений на управление этот прием уже не будет работать. В [24], [25] для анализа задач оптимального управления на бесконечном интервале времени используются уравнения Гамильтона–Якоби. Однако здесь также отсутствуют ограничения на управления, и не понятно, как воспользоваться этими результатами для практического нахождения решения.

Поскольку специфической особенностью данной задачи является бесконечность временного интервала, ее исследование мы будем проводить путем перехода к соответствующей задаче на конечном интервале времени, что соответствует, как мы далее покажем, описанной ранее идее τ -аппроксимации.

Для исследования задачи 2 воспользуемся описанным в [22] методом аппроксимации. Учитывая слабую полунепрерывность снизу степеней норм в пространствах интегрируемых функций и слабую непрерывность зависимости решения краевой задачи от управления, по аналогии с леммой 1 установим, что задача 2 имеет некоторое решение u . Рассмотрим такую возрастающую последовательность положительных чисел T_k , что $T_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Обозначим $Q_k = \Omega \times (0, T_k)$, $\Sigma_k = \Gamma \times (0, T_k)$.

Определим пространство $V_k = L_2(Q_k)$ и множество

$$U_k = \{v \in V \mid v(x, t) \in G(x), (x, t) \in Q_k\}.$$

Для любого $v \in V_k$ обозначим через $\bar{v}$ функцию, совпадающую с v на интервале $(0, T_k)$ и равную нулю на множестве (T_k, ∞) . Рассматривается функционал

$$I_k(v) = \frac{\alpha}{2} \|v\|_{V_k}^2 + \frac{1}{2} \|y_k[v] - y_d\|_{W_k}^2,$$

где $W_k = L_2(0, T_k; H_0^1(\Omega))$, а $y_k[v]$ есть решение данной системы на множестве Q_k с управлением v , являющееся сужением функции $y[\bar{v}]$ на это множество. Ставится задача минимизации функционала I_k на U_k . Функционал I_k отличается от исходного функционала лишь тем, что рассматривается он на конечном интервале времени, вследствие чего он также оказывается слабо полунепрерывным снизу. Тогда полученная аппроксимационная задача имеет некоторое решение u_k . Рассмотрим множество $\bar{U}_k = \{\bar{v} \mid v \in U_k\}$ и функционал $\bar{I}_k$ на $\bar{U}_k$ такой, что $\bar{I}_k(\bar{v}) = I_k(v)$. Тогда $\bar{u}_k$ минимизирует функционал $\bar{I}_k$ на $\bar{U}_k$.

Покажем, что в данном случае мы действительно имеем дело с τ -аппроксимацией задачи 2.

ТЕОРЕМА 3. *Последовательность $\{\bar{U}_k, \bar{I}_k, \bar{u}_k\}$ является τ -аппроксимацией задачи 2, где τ есть слабая топология пространства V .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку последовательность $\{\bar{u}_k\}$ принадлежит множеству U , которое является слабо компактным в V , достаточно показать, что эта последовательность является минимизирующей для задачи 2. Имеем

$$I(u) = \min I(U), \quad I_k(u_k) = \min I_k(U_k).$$

Тогда получим $I_k(u_k) \leq I_k(u) \leq I(u)$. Выполняются соотношения

$$\begin{aligned} I(u) &\leq I(\bar{u}_k) = \frac{\alpha}{2} \|\bar{u}_k\|_V^2 + \frac{1}{2} \|y_k[\bar{u}_k] - y_d\|_W^2 \\ &= \frac{\alpha}{2} \|u_k\|_{V_k}^2 + \frac{1}{2} \|y_k[\bar{u}_k] - y_d\|_{W_k}^2 + \frac{1}{2} \|y_k[\bar{u}_k] - y_d\|_{L_2(T_k, \infty; H_0^1(\Omega))}^2 \\ &= I_k(u_k) + \frac{1}{2} \|y_k[\bar{u}_k] - y_d\|_{L_2(T_k, \infty; H_0^1(\Omega))}^2 \\ &\leq I(u) + \frac{1}{2} \int_{T_k}^{\infty} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial(y[\bar{u}_k] - y_d)}{\partial x_i} \right|^2 ds. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, заключаем, что $I_k(u_k) \rightarrow I(u)$.

В [22] в силу линейности системы исходный функционал оказывается сильно выпуклым, вследствие чего оптимизационная задача корректна в смысле Тихонова [1]. Установив сходимость функционалов к его минимуму, можно показать, что последовательность решений аппроксимационной задачи сильно сходится к решению исходной задачи (см. [22; с. 181]). Необходимые условия оптимальности в силу выпуклости функционала оказываются достаточными. Имея сильную сходимость последовательности управлений, можно перейти к пределу в условиях оптимальности для аппроксимационной задачи и установить аналогичный результат для исходной задачи. В нашем случае такой анализ неприменим, так как в силу нелинейности

уравнения состояния нет оснований считать функционал выпуклым. Тогда мы не получим ни единственность оптимального управления, ни достаточность условий оптимальности, ни корректность решения экстремальной задачи. Сильная сходимость решений аппроксимационной задачи к оптимальному управлению исходной задачи не устанавливается, и нельзя найти решение, как это делалось [22]. Однако можно определить приближенное решение задачи в указанном ранее смысле, которое оказывается даже аппроксимацией, а не только τ -аппроксимацией рассматриваемой задачи.

Ввиду того, что мы не налагаем каких-либо ограничений на размерность области и скорость роста нелинейности, для исследования аппроксимационной задачи не удастся применить известные методы оптимизации. Однако можно воспользоваться описанной ранее методикой. Для произвольной точки $v_0 \in V_k$ определим

$$X_k = \{y \in W_k \mid g_k y \in L_2(Q_k)\}, \quad \text{где } g_k(s)^2 = a_y(s, y_k[v_0](s)).$$

По аналогии с леммой 1 доказывается

ЛЕММА 4. *Отображение $y_k[\cdot]: V_k \rightarrow Y_k$ в произвольной точке $v_0 \in V_k$ имеет $(V_k, Y_k; V_k, W_k)$ -расширенную производную D_k , удовлетворяющую соотношению*

$$\int_{Q_k} \mu D_k h \, ds = \int_{Q_k} p_{k\mu} h \, ds \quad \forall h \in V_k, \mu \in X'_k, \quad (13)$$

где $p_{k\mu}$ – равно нулю при $t = T$ и на Σ_k решение уравнения

$$-p'_{k\mu} - \Delta p_{k\mu} + g_k^2 p_{k\mu} = \mu, \quad s \in Q_k. \quad (14)$$

ТЕОРЕМА 4. *Решение u_k задачи минимизации I_k на U_k определяется по формуле*

$$u_k = \Pi_k(\alpha^{-1} p_k), \quad (15)$$

где Π_k – проектор на U_k , а p_k – решение однородной краевой задачи для

$$-p'_k - \Delta p_k + a_y(s, y_k[u_k]) p_k = \Delta y_k[u_k] - \Delta y_d. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливо неравенство

$$I[u_k + \sigma(v - u_k)] - I(u_k) \geq 0 \quad \forall v \in U_k, \quad \sigma \in (0, 1).$$

Разделив это соотношение на σ и переходя к пределу при $\sigma \rightarrow 0$ с учетом леммы 3, теоремы о сложной функции (см. [26; с. 637]) и формулы Грина, получаем

$$\int_{Q_k} \alpha u_k (v - u_k) \, ds - \int_{Q_k} (\Delta y_k[u_k] - \Delta y_d) D_k (v - u_k) \, ds \geq 0 \quad \forall v \in U_k.$$

Определив в (14) $v_0 = u_k$, $\mu = \Delta y_k[u_k] - \Delta y_d$, приходим к (16). Тогда, учитывая (13), приводим последнее неравенство к виду

$$\int_{Q_k} (\alpha u_k - p_k)(v - u_k) \, ds \geq 0 \quad \forall v \in U_k.$$

Для получения формулы (15) остается воспользоваться представлением проектора на выпуклое подмножество гильбертова пространства (см., например, [22; с. 15]).

Для нахождения решения аппроксимационной задачи получена система, включающая в себя краевую задачу на конечном интервале времени, сопряженное уравнение (16) и формулу (15). Продолжение $\bar{u}_k$ при больших значениях k может быть выбрано в качестве приближенного решения исходной задачи.

4. Стационарные сингулярные системы с фазовыми ограничениями. Рассматривается управляемая система, описываемая операторным уравнением

$$Ay + By = v, \quad (17)$$

где $A: Y \rightarrow W$ – линейный непрерывный оператор, $B: Z \rightarrow W$ – нелинейный непрерывный оператор, Y – банахово пространство, Z – рефлексивное банахово пространство, W – гильбертово пространство. Определены непустые выпуклые замкнутые подмножества W_d и Y_d пространств W и Y . Множеством допустимых пар U назовем совокупность таких пар (v, y) из $V = W_d \times Y_d$, которые удовлетворяют этому равенству. Задается функционал

$$I(v, y) = \frac{\nu}{2} \|v\|^2 + J(y),$$

где $\nu > 0$, норма понимается в смысле W , а J – ограниченный снизу коэрцитивный непрерывный функционал на Z .

ЗАДАЧА 3 состоит в минимизации функционала I на U .

Если оператор A обратим, оператор B ограничен, вложение пространства Y в Z компактно, то функционал I оказывается слабо полунепрерывным снизу на произведении $V \times Y$. Тогда в том случае, когда множество U не пусто, существует оптимальная пара для задачи 3 в силу предложения 1.2 (см. [7; с. 44]).

Данная задача имеет два типа сложности. С одной стороны, мы не гарантируем однозначную разрешимость уравнения состояния на любом допустимом управлении, а с другой, присутствуют фазовые ограничения типа включения. Оба эти обстоятельства не позволяют использовать классический метод вариаций для получения условий оптимальности, так как мы не знаем, как следует варьировать управление, чтобы по ходу этого варьирования, во-первых, уравнение состояния оставалось бы разрешимым, а, во-вторых, чтобы сохранялось фазовое ограничение. Обе эти трудности преодолевается за счет аппроксимации задачи в соответствии с методом штрафа. Получаемая при этом задача минимизации функционала штрафа на множестве допустимых пар “управление-состояние”, как мы покажем в дальнейшем, оказывается τ -аппроксимацией задачи 3.

Определим функционал

$$I_k(v, y) = I(v, y) + \frac{1}{2\varepsilon_k} \|Ay + By - v\|^2,$$

где $\varepsilon_k > 0$ и $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Рассмотрим задачу минимизации функционала I_k на V . При сделанных предположениях введенный функционал также является слабо полунепрерывным снизу. Тогда эта задача имеет некоторое решение $u_k = (v_k, y_k)$. Обозначим через $u = (v, y)$ решение задачи 3.

ТЕОРЕМА 5. *Последовательность $\{(V, I_k, u_k)\}$ есть τ -аппроксимация задачи 3, где τ – сильная топология $W \times Z$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливо неравенство

$$I_k(u_k) = \min I_k(V) \leq I_k(u) = I(u). \quad (18)$$

Отсюда следует ограниченность последовательностей $\{v_k\}$ и $\{J(y_k)\}$, а также существование такого ограниченного в W семейства $\{f_k\}$, что

$$Ay_k = -By_k + v_k + \sqrt{\varepsilon_k} f_k. \quad (19)$$

Пользуясь коэрцитивностью J , установим, что последовательность $\{y_k\}$ ограничена в Z . Тогда $\{By_k\}$ ограничена в пространстве W . Таким образом, выражение, стоящее в правой части (19) ограничено в W , откуда следует ограниченность $\{y_k\}$ в Y . Выделяя подпоследовательности с сохранением прежнего обозначения, заключаем, что имеет место сходимость $f_k \rightarrow f$ слабо в V , $v_k \rightarrow v_*$ слабо в W и $y_k \rightarrow y_*$ слабо в Y и сильно в Z , причем $(v_*, y_*) \in V$. Переходя к пределу в (19) с учетом непрерывности операторов A и B , установим справедливость равенства (17), а значит, точка $u_* = (v_*, y_*)$ принадлежит U . Из $I_k(u_k) \geq I(u_k)$ и свойств функционала I следует $\liminf I_k(u_k) \geq I(u_*)$. Отсюда и из (18) получим, что $I(u_*) \leq I(u)$, а значит, u_* есть решение задачи 3. Для этого решения будем использовать обозначение u . С другой стороны, из (18) получаем $\overline{\lim} I_k(u_k) \leq I(u)$. Тогда имеет место сходимость $I_k(u_k) \rightarrow I(u)$, причем без выделения подпоследовательностей в силу совпадения нижнего и верхнего пределов. Далее, из $I_k(u_k) \geq I(u_k)$ следует

$$\overline{\lim} I(u_k) \leq \overline{\lim} I_k(u_k) = I(u).$$

Отсюда в силу $\lim I(u_k) \leq I(u)$ получаем, что $I(u_k) \rightarrow I(u)$. Учитывая определение I и сходимость $J(y_k) \rightarrow J(y)$, имеем $\|v_k\| \rightarrow \|v\|$. Применяя теорему 5.9 (см. [19; с. 21]), установим, что $v_k \rightarrow v$ в W , а значит, $u_k \rightarrow u$ в $W \times Z$.

ТЕОРЕМА 6. *Если при выполнении условий теоремы 5 оператор B и функционал J непрерывно дифференцируемы, то пара (v_k, y_k) характеризуется соотношениями*

$$\langle \nu v_k - p_k, h - v_k \rangle \geq 0 \quad \forall h \in W_d, \quad (20)$$

$$\langle J'(y_k) + A^*p_k + B'(y_k)^*p_k, g - y_k \rangle \geq 0 \quad \forall g \in Y_d, \quad (21)$$

$$Ay_k + By_k - v_k = \varepsilon_k p_k, \quad (22)$$

где $\langle v, h \rangle$ – значение линейного непрерывного функционала v в точке h . Если $\{p_k\}$ ограничена в W , то решение (v, y) задачи 3 удовлетворяет условиям

$$\langle \nu v - p, h - v \rangle \geq 0 \quad \forall h \in W_d, \quad (23)$$

$$\langle J'(y) + A^*p + B'(y)^*p, g - y \rangle \geq 0 \quad \forall g \in Y_d, \quad (24)$$

$$Ay + By = v. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимым условием минимума в точке ξ гладкого функционала K на выпуклом множестве Ψ является вариационное неравенство

$$\langle K'(\xi), \psi - \xi \rangle \geq 0 \quad \forall \psi \in \Psi.$$

Находим частные производные I_k в точке u_k из условий

$$\langle I_{kv}(u_k), h \rangle = \langle \nu v_k, h \rangle - \frac{1}{\varepsilon_k} \langle Ay_k + By_k - v_k, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in W,$$

$$\langle I_{ky}(u_k), g \rangle = \langle J'(y_k), g \rangle + \frac{1}{\varepsilon_k} \langle Ay_k + By_k - v_k, Ag + B'(y_k)g \rangle \geq 0 \quad \forall g \in Z.$$

Определив $p_k = (Ay_k + By_k - v_k)/\varepsilon_k$, установим соотношение (22) и равенства

$$I_{kv}(u_k) = \nu v_k - p_k, \quad I_{ky}(u_k) = J'(y_k) + A^*p_k + B'(y_k)^*p_k.$$

Подставляя эти значения в соответствующее вариационное неравенство, получаем условия (20), (21).

Если последовательность $\{p_k\}$ ограничена в W , то из нее можно извлечь такую подпоследовательность с сохранением прежнего обозначения, что имеет место сходимость $p_k \rightarrow p$ слабо в W . Из теоремы 5 следует, что $v_k \rightarrow v$ в W и $y_k \rightarrow y$ в Z . Тогда, переходя к пределу в (20), получаем соотношение (23). Учитывая свойства операторов A и B и функционала J , установим сходимость $J'(y_k) \rightarrow J'(y)$ в Z' , $A^*p_k \rightarrow A^*p$ слабо в Y' , $B'(y_k)z \rightarrow B'(y)z$ в W для любого $z \in Z$, $B_k \rightarrow By$ в W . Тогда последовательность $\{f_k\}$, где $f_k = v_kBy_k + \varepsilon_kp_k$, ограничена в W . Из вытекающего из (22) равенства $Ay_k = f_k$ в силу свойств A следует ограниченность $\{y_k\}$ в пространстве Y . После выделения подпоследовательности установим, что $y_k \rightarrow y$ слабо в Y , а значит, $Ay_k \rightarrow Ay$ слабо в W . Переходя к пределу в (22), получаем соотношение (25). Из неравенства

$$\|B'(y_k)y_k - B'(y)y\|_W \leq \|B'(y_k)\|\|y_k - y\|_Z + \|B'(y_k)y - B'(y)y\|_W$$

следует, что $B'(y_k)y_k \rightarrow B'(y)y$ в W . Переходя к пределу в (21), получаем (24).

Итак, для нахождения приближенного решения задачи получается система (20)–(22), а при дополнительных ограничениях – соотношения (23)–(25). Покажем, что теоремами 5 и 6 можно воспользоваться для исследования конкретной оптимизационной задачи для нелинейного сингулярного уравнения эллиптического типа с фазовыми ограничениями. В открытой ограниченной n -мерной области Ω рассмотрим уравнение

$$-\Delta y - y^3 = v \quad (26)$$

с однородным граничным условием (задача Дирихле). Если бы перед нелинейным членом стоял знак плюс, то с помощью теории монотонных операторов [19] можно было бы установить однозначную разрешимость задачи в соответствующих пространствах. Однако здесь задача может иметь неединственное решение (см. [7; с. 262]).

Определим пространства

$$W = L_2(\Omega), \quad Y = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad Z = L_6(\Omega), \quad V = W \times Y,$$

а также операторы A и B согласно равенствам $Ay = -\Delta y$ и $By = -y^4$. Согласно теореме Соболева при $n \leq 3$ справедливо вложение $H^2(\Omega) \subset L_6(\Omega)$. Таким образом, мы имеем дело с операторами $A: Y \rightarrow W$ и $B: Z \rightarrow W$. Следовательно, уравнение (26) приводится к виду (17). Задаются

$$W_d = \{v \in W \mid v(x) \geq 0, x \in \Omega\}, \quad Y_d = \{y \in Y \mid \alpha \leq y(x) \leq \beta, x \in \Omega\}, \quad \alpha < \beta.$$

Определяем

$$I(v, y) = \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} v^2 dx + \frac{1}{6} \int_{\Omega} (y - y_d)^6 dx,$$

где $y_d \in L_6(\Omega)$, $\nu > 0$. Ставится

ЗАДАЧА 3' минимизации функционала I на соответствующем множестве U допустимых пар системы (26).

Задачи оптимального управления для систем нелинейных сингулярных эллиптических уравнений без фазовых ограничений рассматриваются в [6], [7], [27]. В [4] исследуется задача, отличающаяся от данной только отсутствием ограничений, задаваемых множеством Y_d . В [28] для аналогичных задач допускаются фазовые ограничения, но не поточечные. Последние рассматриваются в [29], но для регулярных уравнений. Тем самым, задача 3', по-видимому, остается неисследованной.

Множество W_d соответствует справедливости гипотезы II (см. [7; с. 266]), согласно которой (см. там же) существует такая пара (v_*, y_*) из пространства $W \times Y$, что выполняются уравнение (26) и включение $v_* \in W_d$. Предполагается, что множество Y_d является столь большим, чтобы выполнялось условие $y_* \in Y_d$. Это предположение не связано с методами оптимизации и гарантирует непустоту множества U .

ЛЕММА 5. Для задачи 3' выполнены условия теоремы 6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех $v \in W$ уравнение $Ay = v$ имеет единственное решение (см., например, [7; с. 261]), а значит, A является биекцией. Ограниченность оператора B очевидна. Компактность вложения Y в Z при $n \leq 3$ следует из теоремы Реллиха–Кондрашова. Задавая

$$J(y) = \frac{1}{6} \int_{\Omega} (y - y_d)^6 dx \quad \forall y \in Z,$$

приведем функционал I к необходимой форме. Наконец, ограниченность соответствующей последовательности $\{p_k\}$ реализуется в силу леммы 2.1 (см. [7; с. 269]).

В соответствии с методом штрафа введем функционал

$$I_k(v, y) = \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} v^2 dx + \frac{1}{6} \int_{\Omega} (y - y_d)^6 dx + \frac{1}{2\varepsilon_k} \int_{\Omega} (\Delta y + y^3 + v)^2 dx,$$

где $\varepsilon_k > 0$ и $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Пусть $u = (v, y)$ есть решение задачи 3', а $u_k = (v_k, y_k)$ – решение задачи минимизации функционала I_k на V . Из теоремы 6, леммы 4 и стандартной схемы перехода к поточечным вариационным неравенствам (см. [22; с. 67]) выводится

СЛЕДСТВИЕ. Последовательность $\{(V, I_k, u_k)\}$ есть τ -аппроксимация задачи 3', где τ – сильная топология V . Решение задачи минимизации I_k на V определяется из системы

$$\begin{aligned} \Delta y_k + (y_k)^3 + v_k &= -\varepsilon_k p_k, & v_k(x) &= \begin{cases} \nu^{-1} p_k(x), & p_k(x) \geq 0, \\ 0, & p_k(x) < 0, \end{cases} \\ \{[y_k(x) - y_d(x)]^5 - \Delta p_k(x) + 3[y_k(x)]^3 p_k\} [g - y_k(x)] &\geq 0 & \forall g \in [\alpha, \beta]. \end{aligned}$$

Решение задачи 3' характеризуется соотношениями

$$\begin{aligned} -\Delta y - y^3 &= v, & v(x) &= \begin{cases} \nu^{-1} p(x), & p(x) \geq 0, \\ 0, & p(x) < 0, \end{cases} \\ \{[y(x) - y_d(x)]^5 - \Delta p(x) + 3[y(x)]^3 p\} [g - y(x)] &\geq 0 & \forall g \in [\alpha, \beta]. \end{aligned}$$

Итак, для рассмотренного примера мы имеем систему условий оптимальности. Кроме того, для приближенного решения задачи 3' можно перейти к решению соответствующей аппроксимацией задачи, причем сходимость метода аппроксимации гарантирована.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. П. Васильев, *Методы оптимизации*, Факториал, М., 2002.
- [2] T. Zolezzi, "A characterizations of well-posed optimal control systems", *SIAM J. Control Optim.*, **19**:5 (1981), 604–616.
- [3] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1987.
- [4] М. И. Сумин, "Субоптимальное управление полулинейными эллиптическими уравнениями с фазовыми ограничениями, I: принцип максимума для минимизирующих последовательностей, нормальность", *Изв. вузов. Матем.*, 2000, № 6, 33–44.
- [5] I. Ekeland, "The ε -variational principle", *Methods of Nonconvex Analysis*, Lecture Notes in Math., **1446**, Springer-Verlag, Berlin, 1990, 1–15.
- [6] А. В. Фурсиков, *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения*, Университетская серия, **5**, Научная книга, Новосибирск, 1999.
- [7] Ж.-Л. Лионс, *Управление сингулярными распределенными системами*, Наука, М., 1987.
- [8] С. Я. Серовайский, "Приближенное решение оптимизационных задач для сингулярных бесконечномерных систем", *Сиб. матем. журн.*, **44**:3 (2003), 660–673.
- [9] С. Я. Серовайский, "Приближенное решение задачи оптимального управления для сингулярного уравнения эллиптического типа с негладкой нелинейностью", *Изв. вузов. Матем.*, 2004, № 1, 80–86.
- [10] В. Ф. Кротов, В. И. Гурман, *Методы и задачи оптимального управления*, Наука, М., 1973.
- [11] Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978.
- [12] V. Barbu, *Analysis and Control of Nonlinear Infinite Dimensional Systems*, Math. Sci. Engng., **190**, Academic Press, Boston, MA, 1993.
- [13] P. Neittaanmäki, D. Tiba, *Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems. Theory, Algorithms, and Applications*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **179**, Marcel Dekker, New York, 1994.
- [14] E. Casas, "Pontryagin's principle for state-constrained boundary control problems of semilinear parabolic equations", *SIAM J. Control Optim.*, **35**:4 (1997), 1297–1327.
- [15] J. P. Raymond, H. Zidani, "Pontryagin's principle for state-constrained control problems governed by parabolic equations with unbounded controls", *SIAM J. Control Optim.*, **36**:6 (1998), 1853–1879.
- [16] И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979.
- [17] M. Bergounioux, "A penalization method for optimal control of elliptic problems with state constraints", *SIAM J. Control Optim.*, **30**:2 (1992), 305–323.
- [18] С. Я. Серовайский, "Оптимальное управление для сингулярного эволюционного уравнения с негладким оператором и закрепленным конечным состоянием", *Дифференц. уравнения*, **43**:2 (2007), 251–258.
- [19] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.
- [20] *Функциональный анализ*, ред. С. Г. Крейн, Наука, М., 1972.
- [21] S. Ya. Serovajsky, "Calculation of functional gradients and extended differentiation of operators", *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **13**:4 (2005), 383–396.

- [22] Ж.-Л. Лионс, *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*, Мир, М., 1972.
- [23] В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, “Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах”, *УМН*, **22**:6(138) (1967), 201–260.
- [24] V. Barbu, “Optimal feedback controls for a class of nonlinear distributed parameter systems”, *SIAM J. Control Optim.*, **21**:6 (1983), 871–894.
- [25] P. Cannarsa, G. Da Prato, “Nonlinear optimal control with infinite horizon for distributed parameter systems and stationary Hamilton–Jacobi equations”, *SIAM J. Control Optim.*, **27**:4 (1989), 861–875.
- [26] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977.
- [27] J. F. Bonnans, E. Casas, “Optimal control of semilinear multistate systems with state constraints”, *SIAM J. Control Optim.*, **27**:2 (1989), 446–455.
- [28] E. Casas, F. Tröltzsch, A. Unger, “Second order sufficient optimality conditions for some state-constrained control problems of semilinear elliptic equations”, *SIAM J. Control Optim.*, **38**:5 (2000), 1369–1391.
- [29] A. Rösch, F. Tröltzsch, “On regularity of solutions and Lagrange multipliers of optimal control problems for semilinear equations with mixed pointwise control-state constraints”, *SIAM J. Control Optim.*, **46**:3 (2007), 1098–1115.

С. Я. Серовайский

Казахский национальный университет

им. аль-Фараби

E-mail: serovajskys@mail.ru

Поступило

10.01.2012

Исправленный вариант

21.12.2012