Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. О. Шацков, О среднем значении меры иррациональности вещественных чисел, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 2, 271–287

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9374>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:42:47

УДК 517

О среднем значении меры иррациональности вещественных чисел

Д. О. Шацков

В работе рассматривается асимптотическое поведение интеграла

$$I_\alpha(t) = \int_1^t \psi_\alpha(\xi) d\xi, \quad \text{где } \psi_\alpha(t) = \min_{1 \leq q \leq t} \|q\alpha\|$$

(здесь минимум берется по целым q и $\|\cdot\|$ обозначает расстояние до ближайшего целого).

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm9374

1. Введение и формулировки результатов. Для действительного α рассмотрим функцию

$$\psi_\alpha(t) = \min_{1 \leq q \leq t} \|q\alpha\|$$

(здесь минимум берется по целым q и $\|\cdot\|$ обозначает расстояние до ближайшего целого). Если рассмотреть разложение числа α в обыкновенную цепную дробь

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

и через

$$\frac{p_\nu}{q_\nu} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_\nu]$$

обозначать подходящие к α дроби, то при $q_\nu \leq t < q_{\nu+1}$ будет иметь место

$$\psi_\alpha(t) = \|q_\nu \alpha\| = |q_\nu \alpha - p_\nu|. \quad (1)$$

Известны многочисленные исследования (см. [1]) спектра Лагранжа

$$\mathbb{L} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \exists \alpha \liminf_{t \rightarrow +\infty} t \psi_\alpha(t) = \lambda \right\}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-05700).

и (см. [2]) спектра Дирихле

$$\mathbb{D} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \exists \alpha \limsup_{t \rightarrow +\infty} t\psi_\alpha(t) = \lambda \right\}.$$

Предметом нашего изучения будет интеграл

$$I_\alpha(t) = \int_1^t \psi_\alpha(\xi) d\xi.$$

Поскольку $0 < t\psi_\alpha(t) < 1$ для любого $t \geq 1$, то сразу видим, что $I_\alpha(t) < \ln t$.

Через $N = N(\alpha, t)$ мы обозначим величину, задаваемую условием

$$q_N \leq t < q_{N+1}. \quad (2)$$

Ясно, что $N \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

В настоящей работе мы докажем следующий метрический результат.

ТЕОРЕМА 1. *Для почти всех (в смысле меры Лебега) чисел α выполняются равенства*

$$\begin{aligned} 1) \quad & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} = \frac{1}{2}, \\ 2) \quad & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = \frac{6 \ln 2}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Помимо метрического результата мы докажем утверждение об экстремальных значениях величины $I_\alpha(t)/N(\alpha, t)$.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого иррационального $\alpha \in (0; 1)$ выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} 1) \quad & \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} \leq 1, \\ 2) \quad & \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} \geq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}. \end{aligned}$$

Оценки, приводимые в теореме 2, точны. Более того, имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Для любого $d \in [1/2 - \sqrt{5}/10; 1]$ существует α такое, что*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} = d.$$

В недавней работе [3] доказано, что для двух вещественных чисел α, β таких, что $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$, разность

$$\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t) \quad (3)$$

бесконечно много раз меняет знак при $t \rightarrow \infty$.

Из формул (14), (29) и леммы 2 настоящей статьи можно получить, что для $\tau = (\sqrt{5} - 1)/2$ выполнено

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\tau(t)}{\ln t} = \frac{1/2 - \sqrt{5}/10}{\ln((\sqrt{5} + 1)/2)}.$$

По теореме 1 п. 2) можно выбрать число β , алгебраически независимое с τ такое, что предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\beta(t)}{\ln t} = \frac{6 \ln 2}{\pi^2}$$

и, следовательно, разность $I_\tau(t) - I_\beta(t)$ стремится к бесконечности при $t \rightarrow +\infty$. Таким образом, аналог теоремы об осцилляции разности (3) для разности интегралов $I_\alpha(t) - I_\beta(t)$, вообще говоря, не имеет места. В настоящей статье мы докажем следующий результат для рассматриваемых нами интегралов.

ТЕОРЕМА 4. *Для почти всех (в смысле меры Лебега на $[0, 1]^2$) пар (α, β) верно следующее утверждение. Пусть $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ и $r_0, r_1, \dots, r_n, \dots$ суть знаменатели подходящих дробей для α и β соответственно. Тогда*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \int_1^{q_n} \psi_\alpha(\xi) d\xi - \int_1^{r_n} \psi_\beta(\xi) d\xi \right| < +\infty.$$

Сначала в пп. 2 и 3 мы приводим доказательство теоремы 2. Затем в п. 4 мы доказываем теорему 3. В п. 5 мы приводим необходимые сведения из эргодической теории, а затем в пп. 6 и 7 доказываем теоремы 1 и 4.

2. Формулы с подходящими дробями. Нам понадобится формула для погрешности приближения числа α его подходящей дробью p_n/q_n , которая имеет вид

$$\|q_\nu \alpha\| = \frac{1}{q_\nu \alpha_{\nu+1} + q_{\nu-1}}, \quad (4)$$

или

$$q_\nu \|q_\nu \alpha\| = \frac{1}{\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*}, \quad (5)$$

где

$$\alpha_{\nu+1} = [a_{\nu+1}; a_{\nu+2}, \dots], \quad \alpha_\nu^* = [0; a_\nu, a_{\nu-1}, \dots, a_1] = \frac{q_{\nu-1}}{q_\nu}.$$

Формулы (1) и (4) позволяют записать интеграл $I_\alpha(t)$ в виде

$$I_\alpha(t) = \sum_{\nu=1}^N \frac{q_\nu - q_{\nu-1}}{q_{\nu-1} \alpha_\nu + q_{\nu-2}} + \frac{t - q_N}{q_N \alpha_{N+1} + q_{N-1}}, \quad (6)$$

где N определено в (2). Эту же формулу можно записать по-другому. Введем новое обозначение для слагаемых из формулы (6) и преобразуем их:

$$\begin{aligned} S_\nu(\alpha) &= \frac{q_\nu - q_{\nu-1}}{q_{\nu-1}(a_\nu + 1/\alpha_{\nu+1}) + q_{\nu-2}} = \frac{q_\nu - q_{\nu-1}}{q_\nu + q_{\nu-1}/\alpha_{\nu+1}} \\ &= \frac{(q_\nu - q_{\nu-1})\alpha_{\nu+1}}{q_\nu \alpha_{\nu+1} + q_{\nu-1}} = \frac{(1 - \alpha_\nu^*)\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для последнего слагаемого в формуле (6) аналогично получаем

$$A_{N+1}(\alpha, t) = \frac{t - q_N}{q_N \alpha_{N+1} + q_{N-1}} = \frac{(t/q_{N+1} - \alpha_{N+1}^*)\alpha_{N+2}}{\alpha_{N+2} + \alpha_{N+1}^*}.$$

Теперь формулу (6) можно записать

$$I_\alpha(t) = G_N(\alpha) + A_{N+1}(\alpha, t), \quad (8)$$

где

$$G_N(\alpha) = \sum_{\nu=1}^N S_\nu(\alpha). \quad (9)$$

Поскольку $\alpha_\nu > 1$, $\alpha_\nu^* \in [0, 1]$, получаем неравенство

$$0 \leq S_\nu(\alpha) < 1. \quad (10)$$

Ясно, что

$$0 \leq A_{N+1}(\alpha, t) < S_{N+1}(\alpha). \quad (11)$$

Используя (9) и (10), выводим оценку сверху

$$G_N(\alpha) < N. \quad (12)$$

Из (8), (10) и (11) получаем ограничение на интеграл

$$G_N(\alpha) \leq I_\alpha(t) < G_{N+1}(\alpha), \quad (13)$$

или, иными словами,

$$I_\alpha(t) = G_N(\alpha) + O(1). \quad (14)$$

Неравенство (13) дает оценку сверху $I_\alpha(t) < N + 1$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, из чего непосредственно следует пункт 1) теоремы 2.

3. Доказательство пункта 2) теоремы 2. Для доказательства пункта 2) теоремы 2 нам понадобятся непрерывные дроби с *вещественными* неполными частными. В этом пункте и далее для записи бесконечного множества аргументов будем пользоваться обозначением $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots)$, где $x_i \in [1; +\infty)$, $i \in \mathbb{N}$. Определим функцию $\alpha(\bar{x}) = [0; x_1, x_2, \dots]$. Также определим функции $q_\nu(\bar{x})$ и $p_\nu(\bar{x})$ как континуанты

$$q_\nu(\bar{x}) = \begin{cases} \langle x_1, \dots, x_\nu \rangle, & \nu \geq 1, \\ 1, & \nu = 0, \\ 0, & \nu = -1, \end{cases} \quad p_\nu(\bar{x}) = \begin{cases} \langle x_1, \dots, x_{\nu-1} \rangle, & \nu \geq 1, \\ 0, & \nu = 0, \\ 1, & \nu = -1. \end{cases}$$

Для всех $\nu \geq 0$ выполняется (см. [4]) неравенство

$$q_\nu(\bar{x}) \geq 2^{(\nu-1)/2}. \quad (15)$$

Рассмотрим функцию

$$\psi_{\alpha(\bar{x})}(t) = |q_N(\bar{x})\alpha(\bar{x}) - p_N(\bar{x})|,$$

где N определяется аналогично (2). Рассмотрим интеграл

$$I_{\alpha(\bar{x})}(t) = \int_1^t \psi_{\alpha(\bar{x})}(\xi) d\xi$$

и функции

$$\alpha_\nu(\bar{x}) = \begin{cases} [x_\nu; x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \dots], & \nu \geq 1, \\ [0; x_1, x_2, \dots], & \nu = 0, \end{cases}$$

$$\alpha_\nu^*(\bar{x}) = \begin{cases} [0; x_\nu, x_{\nu-1}, x_{\nu-2}, \dots, x_1], & \nu \geq 1, \\ 0, & \nu = 0. \end{cases}$$

При каждом $\bar{x}$ выполняются следующие простейшие свойства:

$$\alpha_\nu(\bar{x}) > 1, \quad \nu \geq 1, \quad (16)$$

$$0 \leq \alpha_\nu^*(\bar{x}) \leq 1, \quad (17)$$

$$\alpha_\nu^*(\bar{x}) = \frac{q_{\nu-1}(\bar{x})}{q_\nu(\bar{x})}, \quad (18)$$

$$\alpha_\nu(\bar{x}) = x_\nu + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}(\bar{x})}, \quad (19)$$

$$\alpha_\nu^*(\bar{x}) = \frac{1}{x_\nu + \alpha_{\nu-1}^*(\bar{x})}, \quad (20)$$

$$\alpha(\bar{x}) - \frac{p_\nu(\bar{x})}{q_\nu(\bar{x})} = \frac{(-1)^\nu}{q^2(\bar{x})(\alpha_{\nu+1}(\bar{x}) + \alpha_\nu^*(\bar{x}))}. \quad (21)$$

По аналогии с (7) и (9) рассмотрим функции

$$S_\nu(\bar{x}) = \frac{(1 - \alpha_\nu^*(\bar{x}))\alpha_{\nu+1}(\bar{x})}{\alpha_{\nu+1}(\bar{x}) + \alpha_\nu^*(\bar{x})}, \quad G_n(\bar{x}) = \sum_{\nu=1}^n S_\nu(\bar{x}).$$

Аналогично формуле (14) можно получить равенство

$$I_\alpha(t) = G_N(\bar{x}) + O(1), \quad (22)$$

где N определено аналогично (2).

Найдем частные производные от функций $\alpha_\nu(\bar{x})$ и $\alpha_\nu^*(\bar{x})$ по переменной x_k . Для этого уточним зависимость от k -го аргумента:

$$\alpha_\nu(\bar{x}) = \begin{cases} x_\nu + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}(\bar{x})}, & \nu \leq k-1, \\ x_k + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}(\bar{x})}, & \nu = k, \\ x_\nu + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}(\bar{x})}, & \nu \geq k+1, \end{cases} \quad \alpha_\nu^*(\bar{x}) = \begin{cases} \frac{1}{x_\nu + \alpha_{\nu-1}^*(\bar{x})}, & \nu < k, \\ \frac{1}{x_k + \alpha_{\nu-1}^*(\bar{x})}, & \nu = k, \\ \frac{1}{x_\nu + \alpha_{\nu-1}^*(\bar{x})}, & \nu \geq k+1. \end{cases}$$

Теперь для производных легко получить следующие соотношения:

$$(\alpha_\nu(\bar{x}))'_{x_k} = \begin{cases} -\frac{(\alpha_{\nu+1}(\bar{x}))'_{x_k}}{(\alpha_{\nu+1}(\bar{x}))^2}, & \nu \leq k-1, \\ 1, & \nu = k, \\ 0, & \nu \geq k+1, \end{cases} \quad (23)$$

$$(\alpha_\nu^*(\bar{x}))'_{x_k} = \begin{cases} 0, & \nu < k, \\ -\frac{1}{(x_k + \alpha_{\nu-1}^*(\bar{x}))^2}, & \nu = k, \\ -\frac{(\alpha_{\nu-1}^*(\bar{x}))'_{x_k}}{(x_\nu + \alpha_{\nu-1}^*(\bar{x}))^2}, & \nu \geq k+1. \end{cases} \quad (24)$$

Пусть $l \in \mathbb{N}_0$. Из (23) получаем

$$\text{sign}(\alpha_\nu(\bar{x}))'_{x_k} = \begin{cases} 1, & \nu = k - 2l, \\ -1, & \nu = k - 1 - 2l. \end{cases} \quad (25)$$

Аналогично и для $(\alpha_\nu^*(\bar{x}))'_{x_k}$ из (24) видно, что

$$\text{sign}(\alpha_\nu^*(\bar{x}))'_{x_k} = \begin{cases} -1, & \nu = k + 2l, \\ 1, & \nu = k + 1 + 2l. \end{cases} \quad (26)$$

ЛЕММА 1. *Функция $G_n(\bar{x})$ возрастает по каждому из первых $n+1$ аргументов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $(G_n(\bar{x}))'_{x_k} > 0$ для $k \leq n+1$. Найдем производную по k -му аргументу. В этом доказательстве не будем писать аргумент $\bar{x}$. Имеем

$$(G_n(\bar{x}))'_{x_k} = \sum_{\nu=1}^n \frac{(\alpha_{\nu+1})'_{x_k} (1 - \alpha_\nu^*) \alpha_\nu^*}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)^2} + \sum_{\nu=1}^n \frac{(-\alpha_\nu^*)'_{x_k} \alpha_{\nu+1} (\alpha_{\nu+1} + 1)}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)^2}. \quad (27)$$

Исследуем первую сумму из (27) и покажем, что она неотрицательная. Воспользовавшись соотношением (23), отбросим нулевые слагаемые

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{(\alpha_{\nu+1})'_{x_k} (1 - \alpha_\nu^*) \alpha_\nu^*}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)^2} = \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{(\alpha_{\nu+1})'_{x_k} (1 - \alpha_\nu^*) \alpha_\nu^*}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)^2}.$$

В новой сумме, используя условие $\alpha_0^* = 0$, можно при необходимости сделать четное количество слагаемых, добавив слагаемое с $\nu = 0$. Сгруппируем слагаемые по два, начиная с последнего, и преобразуем сумму, воспользовавшись (19) и (23):

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{(\alpha_{\nu+1})'_{x_k} (1 - \alpha_\nu^*) \alpha_\nu^*}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)^2} \\ &= \sum_{l=0}^{[(k-2)/2]} \left(\frac{(1 - \alpha_{k-1-2l}^*) \alpha_{k-1-2l}^* (\alpha_{k-2l})'_{x_k}}{(\alpha_{k-2l} + \alpha_{k-1-2l}^*)^2} + \frac{(1 - \alpha_{k-2-2l}^*) \alpha_{k-2-2l}^* (\alpha_{k-1-2l})'_{x_k}}{(\alpha_{k-1-2l} + \alpha_{k-2-2l}^*)^2} \right) \\ &= \sum_{l=0}^{[(k-2)/2]} \left(\frac{(1 - 1/(x_{k-1-2l} + \alpha_{k-2-2l}^*)) (1/(x_{k-1-2l} + \alpha_{k-2-2l}^*)) (\alpha_{k-2l})'_{x_k}}{(\alpha_{k-2l} + 1/(x_{k-1-2l} + \alpha_{k-2-2l}^*))^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{(1 - \alpha_{k-2-2l}^*) \alpha_{k-2-2l}^*}{(x_{k-1-2l} + 1/(\alpha_{k-2l} + \alpha_{k-2-2l}^*))^2} \frac{(\alpha_{k-2l})'_{x_k}}{(\alpha_{k-2l})^2} \right) \\ &= \sum_{l=0}^{[(k-2)/2]} (\alpha_{k-2l})'_{x_k} \left(\frac{x_{k-1-2l} - 1 + (\alpha_{k-2-2l}^*)^2}{(\alpha_{k-2l} (x_{k-1-2l} + \alpha_{k-2-2l}^*) + 1)^2} \right). \end{aligned}$$

Из (25) следует, что $(\alpha_{k-2l})'_{x_k} > 0$ для всех l , а значит, и вся сумма тоже положительна.

Покажем, что вторая сумма из (27) всегда неотрицательна.

Из (24) и (26) получаем, что сумма знакопередающаяся и начинается с положительного слагаемого при $\nu = k$. Сгруппируем слагаемые по два. Если в сумме нечетное количество слагаемых, то последнее слагаемое можно отбросить, ибо оно положительно, от этого сумма только уменьшится. Воспользуемся (19), (24), (26) и оценим сумму снизу

$$\begin{aligned}
 \sum_{\nu=1}^n \frac{(1 + \alpha_{\nu+1})\alpha_{\nu+1}(-\alpha_{\nu}^*)'_{x_k}}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_{\nu}^*)^2} &= \sum_{\nu=k}^n \frac{(1 + \alpha_{\nu+1})\alpha_{\nu+1}(-\alpha_{\nu}^*)'_{x_k}}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_{\nu}^*)^2} \\
 &\geq \sum_{l=0}^{[(n-k-1)/2]} \left(-\frac{(1 + \alpha_{k+1+2l})\alpha_{k+1+2l}(\alpha_{k+2l}^*)'_{x_k}}{(\alpha_{k+1+2l} + \alpha_{k+2l}^*)^2} - \frac{(1 + \alpha_{k+2+2l})\alpha_{k+2+2l}(\alpha_{k+1+2l}^*)'_{x_k}}{(\alpha_{k+2+2l} + \alpha_{k+1+2l}^*)^2} \right) \\
 &= \sum_{l=0}^{[(n-k-1)/2]} \left(-\frac{(1 + x_{k+1+2l} + 1/(\alpha_{k+2+2l})) (x_{k+1+2l} + 1/(\alpha_{k+2+2l})) (\alpha_{k+2l}^*)'_{x_k}}{(x_{k+1+2l} + 1/(\alpha_{k+2+2l}) + \alpha_{k+2l}^*)^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(1 + \alpha_{k+2+2l})\alpha_{k+2+2l}}{(\alpha_{k+2+2l} + 1/(x_{k+1+2l} + \alpha_{k+2l}^*))^2} \frac{(-\alpha_{k+2l}^*)'_{x_k}}{(x_{k+1+2l} + \alpha_{k+2l}^*)^2} \right) \\
 &= \sum_{l=0}^{[(n-k-1)/2]} (-\alpha_{k+2l}^*)'_{x_k} \\
 &\quad \times \left(\frac{(\alpha_{k+2+2l} + x_{k+1+2l}\alpha_{k+2+2l} + 1)(x_{k+1+2l}\alpha_{k+2+2l} + 1) - (1 + \alpha_{k+2+2l})\alpha_{k+2+2l}}{(\alpha_{k+2+2l}(x_{k+1+2l} + \alpha_{k+2l}^*) + 1)^2} \right) \\
 &> 0.
 \end{aligned}$$

Получили, что производная положительна при $k \leq n+1$; значит, функция $G_n(\bar{x})$ возрастает по первым $n+1$ аргументам. Доказательство леммы 1 завершено.

Из леммы 1 сразу получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого набора $\bar{x}$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$G_n(\bar{x}) \geq G_n(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n+1}, x_{n+2}, \dots). \quad (28)$$

Возьмем вещественное число z , для него рассмотрим набор $\bar{z} = (z, z, \dots)$ и определим число

$$S(z) = \frac{(1 - \alpha(\bar{z}))(z + \alpha(\bar{z}))}{z + 2\alpha(\bar{z})}. \quad (29)$$

ЛЕММА 2. Для любого $z \in [1, +\infty)$ выполняется неравенство

$$|G_n(\bar{z}) - S(z)n| \leq 4.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\bar{z} = (z, z, \dots)$ выполняется свойство $\alpha_{\nu}^*(\bar{z}) = p_{\nu}(\bar{z})/q_{\nu}(\bar{z})$, которое позволяет записать разность (21) следующим образом:

$$\alpha(\bar{z}) - \alpha_{\nu}^*(\bar{z}) = \frac{(-1)^{\nu}}{q_{\nu}^2(\bar{z})(\alpha_{\nu+1}(\bar{z}) + \alpha_{\nu}^*(\bar{z}))}.$$

Запишем $G_n(\bar{z})$ следующим образом:

$$G_n(\bar{z}) = \sum_{\nu=1}^n S(z) + \sum_{\nu=1}^n (S_\nu(\bar{z}) - S(z)).$$

Воспользуемся (15) и покажем, что ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} (S_\nu(\bar{z}) - S(z))$ сходится абсолютно:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} |S_\nu(\bar{z}) - S(z)| &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{(1 - \alpha_\nu^*(\bar{z}))\alpha_{\nu+1}(\bar{z})}{\alpha_{\nu+1}(\bar{z}) + \alpha_\nu^*(\bar{z})} - \frac{(1 - \alpha(\bar{z}))\alpha_{\nu+1}(\bar{z})}{\alpha_{\nu+1}(\bar{z}) + \alpha(\bar{z})} \right| \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_{\nu+1}(\alpha_{\nu+1} + 1)}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)^2(\alpha_{\nu+1} + \alpha)q_\nu^2(\bar{z})} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{q_\nu^2(\bar{z})} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{4}{2^\nu} = 4, \end{aligned}$$

откуда

$$|G_n(\bar{z}) - S(z)n| \leq 4,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3. Пусть $\bar{x} = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$ и $\bar{y} = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1}, y_{n+2}, \dots)$. Тогда

$$|G_n(\bar{x}) - G_n(\bar{y})| < 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\nu \leq n+1$ для функций $\alpha_\nu^*(\bar{x})$ и $\alpha_\nu^*(\bar{y})$ выполняется равенство

$$\alpha_\nu^*(\bar{x}) = \alpha_\nu^*(\bar{y}).$$

Так как

$$\alpha_\nu(\bar{x}) = [x_\nu; x_{\nu+1}, \dots, x_{n+1}, a_{n+2}, \dots] \quad \text{и} \quad \alpha_\nu(\bar{y}) = [x_\nu; x_{\nu+1}, \dots, x_{n+1}, b_{n+2}, \dots],$$

то значения обеих функций лежат между числами

$$\frac{p_{n-\nu+1}(\bar{x})}{q_{n-\nu+1}(\bar{x})} \quad \text{и} \quad \frac{p_{n-\nu+1}(\bar{x}) + p_{n-\nu}(\bar{x})}{q_{n-\nu+1}(\bar{x}) + q_{n-\nu}(\bar{x})}$$

(см. [4]). Неравенство (15) позволяет оценить расстояние между ними:

$$|\alpha_\nu(\bar{x}) - \alpha_\nu(\bar{y})| < \frac{1}{q_{n-\nu+1}(\bar{x})(q_{n-\nu}(\bar{x}) + q_{n-\nu+1}(\bar{x}))} \leq \frac{1}{2^{n-\nu}}.$$

Оценим разность

$$\begin{aligned} |S_\nu(\bar{x}) - S_\nu(\bar{y})| &= \left| \frac{(1 - \alpha_\nu^*(\bar{x}))\alpha_{\nu+1}(\bar{x})}{\alpha_\nu^*(\bar{x}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{x})} - \frac{(1 - \alpha_\nu^*(\bar{y}))\alpha_{\nu+1}(\bar{y})}{\alpha_\nu^*(\bar{y}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{y})} \right| \\ &= (1 - \alpha_\nu^*(\bar{x})) \left| \frac{\alpha_{\nu+1}(\bar{x})\alpha_\nu^*(\bar{x}) - \alpha_{\nu+1}(\bar{y})\alpha_\nu^*(\bar{x})}{(\alpha_\nu^*(\bar{x}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{x}))(\alpha_\nu^*(\bar{x}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{y}))} \right| \\ &\leq (1 - \alpha_\nu^*(\bar{x}))\alpha_\nu^*(\bar{x}) |\alpha_{\nu+1}(\bar{x}) - \alpha_{\nu+1}(\bar{y})| \\ &\leq \frac{1}{4} |\alpha_{\nu+1}(\bar{x}) - \alpha_{\nu+1}(\bar{y})| \leq \frac{1}{2^{n-\nu+1}}. \end{aligned}$$

Далее,

$$|G_n(\bar{z}) - G_n(\bar{y})| = \left| \sum_{\nu=1}^n S_\nu(\bar{z}) - \sum_{\nu=1}^n S_\nu(\bar{y}) \right| \leq \sum_{\nu=1}^n |S_\nu(\bar{z}) - S_\nu(\bar{y})| \leq \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{2^{n-\nu+1}} < 1.$$

Доказательство леммы 3 завершено.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для $\bar{y} = (\underbrace{z, \dots, z}_{n+1}, y_{n+2}, \dots)$ из лемм 2 и 3 получаем, что

$$|G_n(\bar{y}) - S(z)n| < 5. \quad (30)$$

Теперь мы завершим доказательство пункта 2) теоремы 2. Из (14), (28), (29) и (30) получаем, что для любого набора $\bar{x}$ выполняется

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{I_{\alpha(\bar{x})}(t)}{N} &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{G_N(\bar{x})}{N} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(\bar{x})}{n} \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(1, 1, \dots, 1, y_{n+2}, \dots)}{n} = S(1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \right). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2 завершено.

4. Доказательство теоремы 3.

ЛЕММА 4. Пусть $\bar{x} = (0; x, z_2, z_3, \dots)$, $\bar{y} = (0; y, z_2, z_3, \dots)$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$|G_n(\bar{x}) - G_n(\bar{y})| < 8.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оба числа $\alpha_\nu^*(\bar{x})$ и $\alpha_\nu^*(\bar{y})$ попадают в интервал между числами

$$\frac{p_{\nu-1}(\bar{x})}{q_{\nu-1}(\bar{x})} \quad \text{и} \quad \frac{p_{\nu-1}(\bar{x}) + p_{\nu-2}(\bar{x})}{q_{\nu-1}(\bar{x}) + q_{\nu-2}(\bar{x})}$$

(см. [4]), где $p_\nu(\bar{x})/q_\nu(\bar{x})$ – подходящая дробь к $\alpha_\nu^*(\bar{x})$. Это позволяет оценить расстояние между ними:

$$|\alpha_\nu^*(\bar{x}) - \alpha_\nu^*(\bar{y})| < \frac{1}{q_{\nu-1}(\bar{x})(q_{\nu-2}(\bar{x}) + q_{n-1}(\bar{x}))} \leq \frac{1}{2^{\nu-2}}.$$

При $\nu \geq 2$ выполняется равенство

$$\alpha_\nu(\bar{x}) = \alpha_\nu(\bar{y}).$$

Оценим разность

$$\begin{aligned} |G_n(\bar{x}) - G_n(\bar{y})| &= \left| \sum_{\nu=1}^n S_\nu(\bar{x}) - \sum_{\nu=1}^n S_\nu(\bar{y}) \right| \leq \sum_{\nu=1}^n |S_\nu(\bar{x}) - S_\nu(\bar{y})| \\ &= \sum_{\nu=1}^n \left| \frac{(1 - \alpha_\nu^*(\bar{x}))\alpha_{\nu+1}(\bar{x})}{\alpha_\nu^*(\bar{x}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{x})} - \frac{(1 - \alpha_\nu^*(\bar{y}))\alpha_{\nu+1}(\bar{y})}{\alpha_\nu^*(\bar{y}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{y})} \right| \\ &= \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu+1}(\bar{x}) \left| \frac{\alpha_\nu^*(\bar{y}) - \alpha_\nu^*(\bar{x})\alpha_{\nu+1}(\bar{y}) - \alpha_\nu^*(\bar{x}) + \alpha_\nu^*(\bar{y})\alpha_{\nu+1}(\bar{x})}{(\alpha_\nu^*(\bar{x}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{x}))(\alpha_\nu^*(\bar{y}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{y}))} \right| \\ &\leq \sum_{\nu=1}^n \frac{\alpha_{\nu+1}(\bar{x})(1 + \alpha_{\nu+1}(\bar{y}))}{\alpha_{\nu+1}(\bar{x})\alpha_{\nu+1}(\bar{y})} |\alpha_\nu^*(\bar{y}) - \alpha_\nu^*(\bar{x})| \\ &\leq 2 \sum_{\nu=1}^n |\alpha_\nu^*(\bar{y}) - \alpha_\nu^*(\bar{x})| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{8}{2^\nu} = 8. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 4 завершено.

Из следствия 2 и леммы 4 получаем, что для набора

$$\bar{x} = (x_1, \underbrace{z, z, \dots, z}_n, x_{n+2}, \dots)$$

выполняется неравенство

$$|G_n(\bar{x}) - S(z)n| < 13. \quad (31)$$

Сумма $G_n(\bar{x})$ зависит от $n+1$ аргументов $(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_{n+1}(\bar{x}))$. В дальнейшем рассуждении нам удобно выделить зависимость от последнего аргумента. Для числа $\alpha = [0; a_1, a_2, \dots]$ через $G_n(\alpha, x)$ будем обозначать сумму для набора $(a_1, a_2, \dots, a_n, x)$, где $a_i \in \mathbb{N}$ и $x \in (1, +\infty)$.

Обозначим

$$G_n(\alpha, +\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} G_n(\alpha, x) \quad \text{и} \quad G_n(\alpha, 1) = \lim_{x \rightarrow 1} G_n(\alpha, x).$$

ЛЕММА 5. Для любых $x, y \in (1, +\infty)$ и любого α выполняется неравенство

$$|G_{n-1}(\alpha, x) - G_n(\alpha, y)| < 3. \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 и леммы 3 получаем

$$0 < G_n(\alpha, +\infty) - G_n(\alpha, 1) < 1.$$

Из формулы (9) можно вывести равенство

$$G_n(\alpha, +\infty) = G_{n-1}(\alpha, a_n) + (1 - \alpha_n^*).$$

Объединив эти формулы, получаем неравенство

$$|G_{n-1}(\alpha, a_n) - G_n(\alpha, 1)| < 1.$$

Применим лемму 3 для каждой из сумм и получим утверждение.

Лемма 5 доказана.

Для функции $S(z)$ выполняются следующие свойства:

- 1) она монотонно возрастает;
- 2) выполнено

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} = S(1) \leq S(z) \leq S(+\infty) = 1.$$

Для любого $d = [1/2 - \sqrt{5}/10, 1)$ можно взять натуральные числа a и b такие, что $S(a) \leq d < S(b)$.

ЛЕММА 6. Существует $t_{\min}$ такое, что для любого набора $(a_1, \dots, a_k)$ и любого $x \in (1, +\infty)$ при всех $t > t_{\min}$ выполняются следующие неравенства:

- 1) для всех чисел вида $\alpha = [0; a_1, \dots, a_k, \underbrace{a, \dots, a}_t, x]$

$$\frac{G_{k+t}(\alpha, x)}{k+t} < d;$$

- 2) для всех чисел вида $\beta = [0; a_1, \dots, a_k, \underbrace{b, \dots, b}_t, x]$

$$\frac{G_{k+t}(\beta, x)}{k+t} > d.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\alpha = [0; a_1, \dots, a_k, a, a, \dots]$ и запишем сумму $G_{k+t}(\alpha, \alpha_{k+t+1})$ следующим образом:

$$G_{k+t}(\alpha, \alpha_{k+t+1}) = G_k(\alpha, \alpha_{k+1}) + \sum_{\nu=k+1}^{k+t} S_\nu(\alpha),$$

Сумма $\sum_{\nu=k+1}^{k+t} S_\nu(\alpha)$ есть ни что иное как

$$G_t\left(\frac{1}{\alpha_{k+1}^*}, \underbrace{a, \dots, a}_{t-1}, \alpha_{k+1}\right).$$

Применим лемму 4 и получим равенство

$$\begin{aligned} G_{k+t}(\alpha, \alpha_{k+t+1}) &= G_k(\alpha, \alpha_{k+1}) + G_t\left(\frac{1}{\alpha_{k+1}^*}, \underbrace{a, \dots, a}_{t-1}, x\right) \\ &= G_k(\alpha, \alpha_{k+1}) + S(a)(t-1) + R, \end{aligned} \quad (33)$$

где $R < 13$. Найдем предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{G_{k+t}(\alpha, \alpha_{k+t+1})}{k+t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{G_k(\alpha, \alpha_{k+1}) + S(a)(t-1) + R}{k+t} = S(a).$$

По лемме 1 и лемме 3

$$0 < G_n(\alpha, +\infty) - G_n(\alpha, 1) < 1,$$

поэтому для любого x и любого t выполняется неравенство

$$|G_{k+t}(\alpha, \alpha_{k+t+1}) - G_{k+t}(\alpha, x)| < 1.$$

Получаем, что для любого x предел равен

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{G_{k+t}(\alpha, x)}{k+t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{G_{k+t}(\alpha, \alpha_{k+t+1})}{k+t} = S(a) < d,$$

откуда следует утверждение леммы. Пункт 2 доказывается аналогично.

Лемма 6 доказана.

Для последовательности натуральных чисел $\{n_\nu\}$ будем обозначать частичную сумму через $W_t = \sum_{\nu=1}^t n_\nu$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Существует последовательность натуральных чисел $\{n_\nu\}$ такая, что для числа

$$\alpha = [0; \underbrace{a, \dots, a}_{n_1}, \underbrace{b, \dots, b}_{n_2}, \underbrace{a, \dots, a}_{n_3}, \dots]$$

выполняется неравенство

$$\frac{G_{n_1}(\alpha, +\infty)}{n_1} < d;$$

для четного t выполняется

$$\frac{G_{W_t-1}(\alpha, 1)}{W_t-1} < d < \frac{G_{W_t}(\alpha, 1)}{W_t},$$

а для нечетного $t > 1$ выполняется

$$\frac{G_{W_t}(\alpha, +\infty)}{W_t} < d < \frac{G_{W_t-1}(\alpha, +\infty)}{W_t - 1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При доказательстве следствия 3 в качестве n_ν надо брать $t_{\min}$ из леммы 6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Возьмем число α из следствия 3 и покажем, что все n_{t+1} ограничены. Пусть t нечетно, тогда

$$\frac{G_{W_t}(\alpha, 1)}{W_t} < \frac{G_{W_t}(\alpha, +\infty)}{W_t} < d, \quad \frac{G_{W_{t+1}-1}(\alpha, 1)}{W_{t+1} - 1} < d.$$

Обозначим $\tilde{b} = [\underbrace{b; b, \dots, b}_{n_{t+1}-1}, 1]$. По лемме 3 получаем

$$G_{W_t}(\alpha, \tilde{b}) = G_{W_t}(\alpha, 1) + R_1,$$

где $|R_1| < 1$. Воспользуемся (33) и распишем сумму $G_{W_{t+1}-1}(\alpha, 1)$

$$\begin{aligned} G_{W_{t+1}-1}(\alpha, 1) &= G_{W_t}(\alpha, \tilde{b}) + S(b)(n_{t+1} - 1) + R \\ &= G_{W_t}(\alpha, 1) + S(b)n_{t+1} + R + R_1 - S(b), \end{aligned}$$

где $|R| < 13$.

Получаем неравенство

$$\frac{G_{W_t}(\alpha, 1) + S(b)n_{t+1} + R + R_1 - S(b)}{W_t + n_{t+1} - 1} < d.$$

Находим ограничение

$$n_{t+1} < \frac{dW_t - G_{W_t}(\alpha, 1) - d - R - R_1 + S(b)}{S(b) - d} \leq \frac{dW_t - G_{W_t}(\alpha, 1) + 15}{S(b) - d}.$$

Из леммы 5 и следствия 3 находим ограничение на разность

$$0 < dW_t - G_{W_t}(\alpha, 1) < 3.$$

Обозначим

$$M_1 = \left\lceil \frac{18}{S(b) - d} \right\rceil,$$

где символ $\lceil \cdot \rceil$ означает целую часть сверху.

Пусть t четно, тогда

$$d < \frac{G_{W_t}(\alpha, 1)}{W_t} < \frac{G_{W_t}(\alpha, +\infty)}{W_t}, \quad d < \frac{G_{W_{t+1}-1}(\alpha, +\infty)}{W_{t+1} - 1}.$$

Обозначим

$$\tilde{a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\underbrace{a; a, \dots, a}_{n_{t+1}-1}, x] = [\underbrace{a; a, \dots, a}_{n_{t+1}-1}].$$

По лемме 3 и (9) для $\tilde{a}$ получаем

$$G_{W_t}(\tilde{a}) = G_{W_t}(\alpha, 1) + R_2,$$

где $|R_2| < 1$. Подставим

$$\begin{aligned} G_{W_{t+1}-1}(\alpha, +\infty) &= G_{W_t}(\alpha, \tilde{a}) + S(a)(n_{t+1} - 1) + R \\ &= G_{W_t}(\alpha, 1) + S(a)n_{t+1} + R + R_2 - S(a), \\ d &< \frac{G_{W_{t+1}-1}(\alpha, +\infty)}{W_{t+1} - 1} = \frac{G_{W_t}(\alpha, 1) + S(a)n_{t+1} + R + R_2 - S(a)}{W_t + n_{t+1} - 1}, \\ n_{t+1} &< \frac{d + R + R_2 + S(a) + G_{W_t}(\alpha, 1) - dW_t}{d - S(a)} \leq \frac{16 + G_{W_t}(\alpha, 1) - dW_t}{d - S(a)}. \end{aligned}$$

Из леммы 5 и следствия 3 находим ограничение на разность

$$0 < G_{W_t}(\alpha, 1) - dW_t < 3.$$

Обозначим

$$M_2 = \left\lceil \frac{19}{d - S(a)} \right\rceil.$$

В обоих случаях все n_{t+1} ограничены константой $M = \max\{M_1, M_2\}$.

Для $G_n(\alpha)/n$ и $G_{n+k}(\alpha)/(n+k)$ из (9), (10) и (12) распишем разность

$$\left| \frac{G_{n+k}}{n+k} - \frac{G_n}{n} \right| = \left| \frac{G_n + \sum_{\nu=n+1}^{n+k} S_\nu}{n+k} - \frac{G_n}{n} \right| = \left| \frac{\sum_{\nu=n+1}^{n+k} S_\nu - kG_n/n}{n+k} \right|.$$

Так как $0 < \sum_{\nu=n+1}^{n+k} S_\nu < k$ и $0 < kG_n/n < k$, то $|\sum_{\nu=n+1}^{n+k} S_\nu - kG_n/n| < k$ и можно записать неравенство

$$\left| \frac{G_{n+k}}{n+k} - \frac{G_n}{n} \right| < \frac{k}{n+k}. \quad (34)$$

Для последовательности $G_n(\alpha)/n$ выполняются следующие свойства:

- 1) $|G_n/n - G_{n+1}/(n+1)| < 1/n$ из (34);
- 2) $|G_{W_t}/W_t - d| < 3/W_t$ из леммы 5 и следствия 3;
- 3) $W_{t+1} - W_t < M$ из ограниченности n_t .

Пусть $n \in [W_t; W_{t+1})$. Тогда из свойств 1, 2 и 3 получаем $|G_n/n - d| < (M+3)/W_t$.

Для $n > M$ получим, что $n - M < W_t$ и $|G_n/n - d| < (M+3)/(n-M)$.

Возьмем предел от правой и левой частей

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{G_n}{n} - d \right| < \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M+3}{n-M} = 0,$$

откуда получаем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G_n}{n} = d.$$

Случай $d = 1$ получается для числа, у которого неполные частные образуют возрастающую последовательность. Теорема 3 доказана.

5. Эргодические свойства преобразования Гаусса. Нам понадобятся некоторые сведения из эргодической теории. Основные нужные нам понятия и утверждения имеются в [5] (см. также [6], [7]).

Рассмотрим преобразование Гаусса $T: [0; 1) \rightarrow [0; 1)$, которое есть перемешивающий эндоморфизм (см. [5; с. 163, теорема 3]), задаваемый формулой

$$Tx = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{x} \right\} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Если для x известно его разложение в цепную дробь $x = [0; a_1, a_2, a_3, \dots]$, то

$$Tx = [0, a_2, a_3, \dots].$$

Инвариантная мера для преобразования Гаусса задается формулой

$$\mu(A) = \frac{1}{\ln 2} \int_A \frac{1}{1+x} dx.$$

Естественным расширением для преобразования Гаусса будет автоморфизм $\hat{T}: [0; 1)^2 \rightarrow [0; 1)^2$, определяемый как

$$\hat{T}(x, y) = \begin{cases} \left(\left\{ \frac{1}{x} \right\}, \frac{1}{[1/x] + y} \right) & \text{при } x \neq 0, \\ (0, y) & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

У естественного расширения $\hat{T}$ инвариантная мера есть

$$\mu_2(A) = \frac{1}{\ln 2} \iint_A \frac{1}{(1+xy)^2} dx dy.$$

Преобразование $\hat{T}$ обладает свойством перемешивания (см. [5; с. 198, теорема 1]). В частности, преобразование $\hat{T}$ эргодично (см. [6], [7]), и согласно теореме Биркгофа–Хинчина для любой абсолютно интегрируемой функции $f(x, y)$ асимптотическое равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu(x, y)) = \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(x, y) dx dy}{(1+xy)^2} \quad (35)$$

будет выполнено для почти всех $(x, y) \in [0, 1)^2$.

Если на точку (x, y) подействовать преобразованием $\hat{T}^\nu$, то

$$\hat{T}^\nu(x, y) = \left(T^\nu(x), \frac{q_{\nu-1} + yp_{\nu-1}}{q_\nu + yp_\nu} \right). \quad (36)$$

где p_ν/q_ν – подходящие дроби для x .

Рассмотрим преобразование $\hat{\hat{T}}: [0, 1)^2 \rightarrow [0, 1)^2$, которое определим так:

$$\hat{\hat{T}} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{T}(z_1) \\ \hat{T}(z_2) \end{pmatrix}, \quad z_1, z_2 \in [0, 1)^2.$$

Его инвариантная мера есть $\mu_2(z_1) \times \mu_2(z_2)$. Преобразование $\widehat{\widehat{T}}$ эргодично, это следует из того, что $\widehat{T}$ обладает свойством перемешивания (см. [5; с. 188, теорема 2]).

Следующая теорема доказана Халасом (см. [8]).

ТЕОРЕМА ХАЛАСА. *Для любой интегрируемой функции $\varphi(p)$ и любого эргодического преобразования T пространства R конечной меры выражение*

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi(T^\nu p) - n \int_R \varphi(p) d\mu$$

для почти всех p меняет знак бесконечное число раз в слабом смысле, т.е. эта разность не может быть постоянно положительной или отрицательной.

Применяя эту теорему к эргодическому преобразованию $\widehat{\widehat{T}}$, получим

СЛЕДСТВИЕ 4. *Для почти всех $(z_1, z_2) = (x_1, y_1, x_2, y_2) \in [0, 1)^2 \times [0, 1)^2$ и для любой μ_2 -интегрируемой функции $f(z) = f(x, y)$ разностная функция*

$$\sum_{\nu=1}^n f(\widehat{T}^\nu z_1) - \sum_{\nu=1}^n f(\widehat{T}^\nu z_2)$$

меняет знак бесконечное число раз в слабом смысле.

6. Доказательства теоремы 1. Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \frac{1-y}{1+xy}. \quad (37)$$

Поскольку

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1-y}{(1+xy)^3} dx dy = \frac{\ln 2}{2},$$

то, применяя теорему Биркгофа–Хинчина (35), приходим к равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(\widehat{T}^\nu(x, y)) = \frac{1}{2}. \quad (38)$$

Отметим, что если $(x, y) = (1/\alpha_1, 0)$, то

$$f(\widehat{T}^\nu(x, 0)) = \frac{(1 - \alpha_\nu^*)}{1 + \alpha_\nu^*/\alpha_{\nu+1}} \quad \text{и} \quad G_n(\alpha) = \sum_{\nu=1}^n f(\widehat{T}^\nu(x, 0)).$$

Далее для доказательства теоремы нам потребуется следующее утверждение, которое близко к использовавшемуся в работе [9].

ЛЕММА 7. *Для любого $(x, y) \in [0; 1)^2$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^n |f(\widehat{T}^\nu(x, y)) - f(\widehat{T}^\nu(x, 0))| < 4.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (f(\hat{T}^{\nu}(x, 0)) - f(\hat{T}^{\nu}(x, y)))$$

сходится абсолютно. Обозначим $\tilde{\alpha}_{\nu} = (q_{\nu-1} + yp_{\nu-1})/(q_{\nu} + yp_{\nu})$. Далее,

$$\sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^{\nu}(x, 0)) = \sum_{\nu}^n \frac{(1 - \alpha_{\nu}^*)\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1} + \alpha_{\nu}^*}, \quad \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^{\nu}(x, y)) = \sum_{\nu}^n \frac{(1 - \tilde{\alpha}_{\nu})\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1} + \tilde{\alpha}_{\nu}}.$$

Рассмотрим ряд

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} |f(\hat{T}^{\nu}(x, y)) - f(\hat{T}^{\nu}(x, 0))| &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{(1 - \tilde{\alpha}_{\nu})\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1} + \tilde{\alpha}_{\nu}} - \frac{(1 - \alpha_{\nu}^*)\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1} + \alpha_{\nu}^*} \right| \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu+1} \left| \frac{\tilde{\alpha}_{\nu} - \alpha_{\nu}^* + \tilde{\alpha}_{\nu}\alpha_{\nu+1} - \alpha_{\nu}^*\alpha_{\nu+1}}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_{\nu}^*)(\alpha_{\nu+1} + \tilde{\alpha}_{\nu})} \right| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 + \alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}} |\tilde{\alpha}_{\nu} - \alpha_{\nu}^*| \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2y}{q_{\nu}(q_{\nu} + yp_{\nu})} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{q_{\nu}(q_{\nu} + p_{\nu})} < 4. \end{aligned}$$

Лемма 7 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5. Для любого $y \in [0; 1]$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^{\nu}(x, y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^{\nu}(x, 0)).$$

Обозначим через R множество тех точек $(x, y) \in [0, 1]^2$, для которых выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^{\nu}(x, y)) = \frac{1}{2}.$$

Мера множества R равна 1. Рассмотрим проекцию

$$\tilde{R} = \{x \in [0, 1] : \exists y \ (x, y) \in R\}.$$

Мера множества $\tilde{R}$ тоже будет равна 1. Согласно формуле (14) и следствию 5 выполняется равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_{\alpha}(t)}{N(\alpha, t)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(\alpha)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^{\nu}(x, 0)) = \frac{1}{2}.$$

Пункт 1) теоремы 1 доказан.

Для доказательства пункта 2) теоремы 1 нам понадобится теорема Леви (см. [4]).

ТЕОРЕМА ЛЕВИ. Для почти всех $\alpha \in (0; 1)$ имеет место следующее равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln q_n}{n} = \frac{\pi^2}{12 \ln 2}.$$

Из теоремы Леви получаем, что для почти всех α выполнено равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{N(\alpha, t)} = \frac{\pi^2}{12 \ln 12}.$$

Пункт 2) теоремы 1 получается из пункта 1) теоремы 1 и последнего равенства. Теорема 2 полностью доказана.

7. Доказательство теоремы 4. Снова рассматриваем функцию f , определенную в (37). Пусть $R_1 \subset [0, 1)^2 \times [0, 1)^2$ — это множество тех точек $(z_1, z_2) = ((x_1, y_1), (x_2, y_2))$, для которых выполняется следствие 4. Его мера равняется 1. Для $(z_1, z_2) \in R_1$ рассмотрим только те значения n , для которых суммы

$$\sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu z_1) - \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu z_2), \quad \sum_{\nu=1}^{n+1} f(\hat{T}^\nu z_1) - \sum_{\nu=1}^{n+1} f(\hat{T}^\nu z_2)$$

имеют различные знаки. Тогда, поскольку каждое слагаемое в суммах не превосходит единицы, видим, что

$$\left| \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu z_1) - \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu z_2) \right| \leq 2.$$

Рассмотрим проекцию

$$\tilde{R}_1 = \{(x_1, x_2) \in [0, 1)^2 : \exists y_1 \exists y_2 (x_1, y_1, x_2, y_2) \in R_1\}.$$

Мера множества $\tilde{R}_1$ тоже равна 1. Для $(\alpha, \beta) \in \tilde{R}_1$ и рассматриваемых значений n с учетом леммы 7 получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_1^{q_n} \psi_\alpha(t) dt - \int_1^{r_n} \psi_\beta(t) dt \right| &= |G_n(\alpha) - G_n(\beta)| \\ &= \left| \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu(\alpha, 0)) - \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu(\beta, 0)) \right| \leq 10. \end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. W. Cusick, M. E. Flahive, *The Markoff and Lagrange Spectra*, Math. Surveys Monogr., **30**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
- [2] В. А. Иванов, “О рациональных приближениях действительных чисел”, *Матем. заметки*, **23**:1 (1978), 3–26.
- [3] I. D. Kan, N. G. Moshchevitin, “Approximations to two real numbers”, *Unif. Distrib. Theory*, **5**:2 (2010), 79–86.
- [4] А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, ГИФМЛ, М., 1960.
- [5] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980.
- [6] H. Nakada, “Metrical theory for a class of continued fraction transformations and their natural extensions”, *Tokyo J. Math.*, **4**:2 (1981), 399–426.
- [7] H. Nakada, Sh. Ito, S. Tanaka, “On the invariant measure for the transformation associated with some real continued fraction”, *Keio Engrg. Rep.*, **30**:13 (1977), 159–175.
- [8] G. Halász, “Remarks on the remainder in Birkhoff’s ergodic theorem”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **28**:3–4 (1976), 389–395.
- [9] K. Dajani, C. Kraaikamp, “A note on the approximation by continued fractions under an extra condition”, *New York J. Math.*, **3A** (1998), 69–80.

Д. О. Шацков

Астраханский государственный университет

E-mail: Studenthol@rambler.ru, DenisLLI@mail.ru

Поступило

07.04.2012

Исправленный вариант

01.03.2015