Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. О. Тонков, Добавление к теореме Поповичу о приближении многочленами Бернштейна, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 3, 416–425

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9377>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 18:31:48

Добавление к теореме Поповичу о приближении многочленами Бернштейна

В. О. Тонков

Получена асимптотическая оценка приближений функции многочленами Бернштейна, учитывающая положение точки на отрезке.

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm9377

Пусть $f(x)$ – ограниченная на $[0, 1]$ функция и

$$B_n(f, x) := \sum_{\nu=0}^n f\left(\frac{\nu}{n}\right) \rho_{n,\nu}(x), \quad \rho_{n,\nu}(x) := \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu},$$

– многочлены Бернштейна функции f . Обычно многочлены Бернштейна вводят для непрерывных функций, но в вопросах, которые рассматриваются в настоящей работе, естественно предполагать непрерывность f только в исследуемой точке.

Согласно теореме Поповичу [1] для приближений непрерывных на $[0, 1]$ функций многочленами Бернштейна при всех x справедлива оценка

$$|f(x) - B_n(f, x)| \leq K \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (1)$$

где $\omega(f, \delta)$ – модуль непрерывности функции f и $K = 3/2$.

В [2; с. 174] приведено другое доказательство оценки (1) также с $K = 3/2$. В [3; с. 20] оценка (1) доказана с $K = 5/4$.

Сиккема [4] установил, что наименьшее значение множителя K в оценке (1) равно

$$\chi = \frac{4306 + 837\sqrt{6}}{5832} = 1.089887\dots, \quad (2)$$

и это значение K достигается при $n = 6$, а для остальных n значение K меньше.

Для непрерывных неравных константе функций f изучалась также задача о наименьшем значении величины

$$C = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} \frac{|f(x) - B_n(f, x)|}{\omega(f, 1/\sqrt{n})}. \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00417).

Из результатов работы [1] следует, что $C \leq 1 + 1/\sqrt{2\pi} = 1.398942 \dots$. Сиккема [5] получил оценку $C \leq 1 + 1/(e^2\sqrt{2\pi}) = 1.053991 \dots$. Эссен [6] доказал, что ¹

$$C = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + 1)(\Phi(2\nu + 2) - \Phi(2\nu)) = 1.045564 \dots, \quad (4)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt, \quad (5)$$

и это значение C не может быть уменьшено. Именно, для каждого $\varepsilon > 0$ существуют число n и функция f_n такие, что

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \frac{|f_n(x) - B_n(f_n, x)|}{\omega(f_n, 1/\sqrt{n})} > C - \varepsilon. \quad (6)$$

Помимо вопроса о наименьшем значении множителя K в оценке (1) теорема Поповичу уточнялась в следующем направлении. В [7; с. 316] для приближений непрерывных функций f в точке x получена оценка

$$|f(x) - B_n(f, x)| \leq \frac{5}{2} \omega\left(f, \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right). \quad (7)$$

В [8] и [9] оценка (7) приведена с множителем 2 вместо 5/2.

В [9] отмечено, что оценку (1) можно заменить на

$$|f(x) - B_n(f, x)| \leq (1 + x(1-x))\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (8)$$

предполагая при этом вместо непрерывности f на отрезке $[0, 1]$ только, что для точки x и всех t таких, что точки $x + t$ принадлежат $[0, 1]$, справедлива оценка

$$|f(x) - f(x + t)| \leq \omega(|t|), \quad (9)$$

где ω – некоторый модуль непрерывности.

Из (8) вытекает оценка (1) с множителем 5/4.

Оценка (7) с множителем 2 получена в [9] также при условии (9) на функцию f .

Таким образом, для справедливости оценок вида (1) и (7) нет необходимости предполагать непрерывность f во всех точках отрезка $[0, 1]$.

В работах Сиккемы [4] и Эссена [6] рассматривались приближения в равномерной норме, поэтому в оценках там естественно участвовал модуль непрерывности функции.

Отметим, что если говорить не о максимуме модуля при $x \in [0, 1]$, а о значении разности $f(x) - B_n(f, x)$ в отдельной точке x , то если имеет место оценка (9), в (3) в знаменателе $\omega(f, 1/\sqrt{n})$ можно заменить на $\omega(1/\sqrt{n})$.

В самом деле, согласно теореме 2 работы [6] и оценке (26) из [6] для x , удовлетворяющих условию

$$n^{-5/6} \leq x \leq 1 - n^{-5/6}, \quad (10)$$

¹В оценке (7) работы [5] и в оценке (5) работы [6] формулы для C приведены с опечатками.

справедлива оценка

$$|f(x) - B_n(f, x)| \leq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \varepsilon(n)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (11)$$

где величина C определена в (3) и $\varepsilon(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. В [6] при доказательстве этой оценки использовалось только условие (9) на функцию ω . Из (11) следует, что для всех $x \in [0, 1]$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(x) - B_n(f, x)|}{\omega(1/\sqrt{n})} \leq C. \quad (12)$$

Приведенные в [6] рассуждения показывают также, что для каждого $\varepsilon > 0$ существуют число n и функция f_n , для которой выполняется условие (9), такие, что

$$\max_{x \in [0, 1]} \frac{|f_n(x) - B_n(f_n, x)|}{\omega(1/\sqrt{n})} \geq C - \varepsilon. \quad (13)$$

Таким образом, значение C в (12) не может быть уменьшено.

В настоящей работе рассматривается величина

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(x) - B_n(f, x)|}{\omega(\sqrt{x(1-x)}/n)}, \quad (14)$$

связанная с оценкой (7) так же, как предел (3) связан с (1).

Будем использовать следующие известные результаты.

ТЕОРЕМА А [3; теорема 1.5.3]. Если $x \in (0, 1)$ и

$$0 \leq z \leq \frac{3}{2}\sqrt{nx(1-x)}, \quad (15)$$

то

$$\sum_{\nu} \rho_{n,\nu}(x) \leq 2e^{-z^2}, \quad (16)$$

где суммирование ведется по ν таким, что

$$|\nu - nx| \geq 2z\sqrt{nx(1-x)}. \quad (17)$$

ЛЕММА А ([6; лемма 3]). Для $n > 2$, $n^{-5/6} \leq x \leq 1 - n^{-5/6}$ и $\nu = nx + t\sqrt{nx(1-x)}$, где $-2\sqrt{\log n} \leq t \leq 2\sqrt{\log n}$, справедливо представление

$$\rho_{n,\nu}(x) = \frac{1 + \varepsilon(n)}{\sqrt{2\pi nx(1-x)}} e^{-(\nu - nx)^2 / (2nx(1-x))}, \quad (18)$$

где $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

В дальнейшем через $\varepsilon(n)$ будем обозначать величины, вообще говоря, различные, стремящиеся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА. Если функция f в точке $x \in (0, 1)$ удовлетворяет условию (9), где ω – некоторый модуль непрерывности, то для приближений f в этой точке многочленами Бернштейна имеет место оценка

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(x) - B_n(f, x)|}{\omega(\sqrt{x(1-x)}/n)} \leq K,$$

где

$$K = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)(\Phi(\nu+1) - \Phi(\nu)) = 1.365574 \dots, \quad (19)$$

$\Phi(x)$ – интеграл вероятностей (5). Это значение K не может быть уменьшено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем опираться на оценку

$$|f(x) - B_n(f, x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2\sqrt{\log n}}^{2\sqrt{\log n}} \omega\left(|t| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) e^{-t^2/2} dt + \varepsilon(n) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (20)$$

установленную в [6] для x , удовлетворяющих условию (10), и модуля непрерывности функции f . В [6] при доказательстве этой оценки использовалось только условие (9). Поэтому модуль непрерывности функции f заменен в ней на модуль непрерывности из оценки (9).

Функция ω из (9) задана на конечном отрезке. Продолжим ее на положительную полуось так, чтобы она оставалась модулем непрерывности. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2\sqrt{\log n}}^{2\sqrt{\log n}} \omega\left(|t| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) e^{-t^2/2} dt &\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \omega\left(|t| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) e^{-t^2/2} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^1 \omega\left(|t| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) e^{-t^2/2} dt + \int_1^2 \omega\left(|t| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) e^{-t^2/2} dt + \dots \right] \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \omega\left(\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) \left[\int_0^1 e^{-t^2/2} dt + 2 \int_1^2 e^{-t^2/2} dt + \dots \right] \\ &= 2\omega\left(\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) [\Phi(1) - \Phi(0) + 2(\Phi(2) - \Phi(1)) + \dots] \\ &= 2\omega\left(\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)(\Phi(\nu+1) - \Phi(\nu)). \end{aligned} \quad (21)$$

Из (21) и (20) получаем оценку для x , удовлетворяющих условию (10):

$$|f_n(x) - B_n(f_n, x)| \leq K\omega\left(\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) + o(\omega(n^{-1/2})), \quad n \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Для каждой точки $x \in (0, 1)$ условие (10) выполняется, начиная с некоторого n . Поэтому из (22) следует оценка

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(x) - B_n(f, x)|}{\omega(\sqrt{x(1-x)/n})} \leq K. \quad (23)$$

Докажем неулучшаемость значения K в (23). Именно, покажем, что для каждого $x \in (0, 1)$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие n , удовлетворяющее условию (10), и функции f_n , для которых выполнено условие (9), что справедлива оценка

$$\frac{|f_n(x) - B_n(f_n, x)|}{\omega(\sqrt{x(1-x)/n})} \geq K - \varepsilon. \quad (24)$$

В качестве f_n можно взять функцию, аналогичную той, с помощью которой в [6] была установлена оценка (6). Пусть

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t = x, \\ \text{линейна} & \text{при } x \leq t \leq x + 1/(4n^2), \\ a & \text{при } x + 1/(4n^2) \leq t \leq x + \sqrt{x(1-x)/n}, \end{cases}$$

где a – некоторая положительная константа. На отрезке $[x + \sqrt{x(1-x)/n}, 1]$ определим функцию f_n формулой

$$f_n\left(t + \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) = a + f_n(t), \quad x + k\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} < t \leq x + (k+1)\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}, \quad (25)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$ и т.д., пока соответствующие точки не выходят за точку 1.

На отрезок $[0, x]$ функцию f_n продолжим так, чтобы ее график был симметричен относительно прямой $t = x$.

В определении функции $f_n(t)$ неявно использовалось, что $1/(4n^2) < \sqrt{x(1-x)/n}$. Это неравенство вытекает из того, что при условии (10) на x минимум значений корня $\sqrt{x(1-x)/n}$ достигается при $x = n^{-5/6}$ и $1 - n^{-5/6}$ и равен $\sqrt{1 - n^{-5/6}}/n^{11/12}$, т.е. при $n > 1$ превосходит $1/(4n^2)$.

Для модуля непрерывности функции f_n справедливо равенство

$$\omega\left(f_n, \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) = a. \quad (26)$$

Поскольку нас интересует верхний предел величины из левой части (24), для каждого x можно рассматривать только достаточно большие числа n вида $n = [m/x]$, где m – натуральные числа такие, что $\zeta_1 = [\sqrt{m/x}x(1-x)] > 1$.

Рассмотрим точки ν/n , лежащие справа от x . Пусть p – наибольшее значение k , при котором промежутки

$$\left(x + k\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}, x + (k+1)\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right), \quad (27)$$

см. (25), целиком укладываются в отрезок $[x, 1]$.

При каждом k выберем точки ν/n , принадлежащие промежутку (27), для которых выполняется неравенство $|\nu - nx| \leq 2\sqrt{\log n}\sqrt{nx(1-x)}$. Для таких ν согласно лемме А справедлива оценка

$$\rho_{n,\nu}(x) \leq \frac{1 + \varepsilon(n)}{\sqrt{2\pi nx(1-x)}}. \quad (28)$$

Рассмотрим теперь ν , для которых точки ν/n принадлежат промежутку (27) и неравенство $|\nu - nx| \leq 2\sqrt{\log n}\sqrt{nx(1-x)}$ не выполняется. Для этих ν с помощью теоремы А при $z = \sqrt{\log n}$ получаем оценку

$$\sum_{\nu} \rho_{n,\nu}(x) \leq \frac{2}{n}. \quad (29)$$

В точке x , для которой строилась функция f_n , имеем

$$|f_n(x) - B_n(f_n, x)| = B_n(f_n, x) = \sum_{\nu=0}^n f_n\left(\frac{\nu}{n}\right) \rho_{n,\nu}(x). \quad (30)$$

Обозначим через R сумму по всем k ошибкам, которые получатся при замене $f_n(\nu/n)$ в формуле (30), соответствующим точкам ν/n , принадлежащим отрезкам

$$\left[x + k\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}, x + k\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} + \frac{1}{4n^2} \right],$$

на ka .

Пусть $\zeta_k = [k\sqrt{[m/x]x(1-x)}]$ и $\nu_k = m + \zeta_k + 1$. Покажем, что при каждом фиксированном k вклад в R могут давать только слагаемые из (30) с ν , равными ν_k и $\nu_k - 1$.

Слагаемое с $\nu = \nu_k + 1$ в силу оценки

$$\frac{\nu_k + 1}{[m/x]} = \frac{m + \zeta_k + 2}{[m/x]} > \frac{m + k\sqrt{[m/x]x(1-x)} + 1}{[m/x]} > k\sqrt{\frac{x(1-x)}{[m/x]}} + x + \frac{1}{4n^2}$$

не участвует в R . Далее, слагаемое с $\nu = \nu_k - 2$ в силу оценки

$$\begin{aligned} \frac{\nu_k - 2}{[m/x]} &= \frac{m - 1 + \zeta_k}{[m/x]} \leq \frac{m - 1}{[m/x]} + \frac{k\sqrt{[m/x]x(1-x)}}{[m/x]} \\ &= \frac{1}{[m/x]} \left(x \left(\frac{m}{x} - \left[\frac{m}{x} \right] \right) - 1 \right) + x + k\sqrt{\frac{x(1-x)}{[m/x]}} \\ &\leq \frac{x - 1}{[m/x]} + x + k\sqrt{\frac{x(1-x)}{[m/x]}} < x + k\sqrt{\frac{x(1-x)}{[m/x]}} \end{aligned}$$

также не участвует в R .

С помощью оценки (28) при $k < 2\sqrt{\log n}$ получаем, что слагаемые с ν , равными ν_k , $\nu_k - 1$, которые могут дать вклад в R , не превосходят $a(1 + \varepsilon(n))/\sqrt{2\pi nx(1-x)}$. Из оценки (29) при всех k , больших $2\sqrt{\log n}$, следует, что сумма слагаемых с ν , которые могут дать вклад в R , не превосходит $a\varepsilon(n)$. Таким образом, для R справедлива оценка

$$R \leq 2a \cdot 2\sqrt{\log n} \frac{1 + \varepsilon(n)}{\sqrt{2\pi nx(1-x)}} + a\varepsilon(n). \quad (31)$$

Величина $\sqrt{\log n}(1 + \varepsilon(n))/\sqrt{2\pi nx(1-x)}$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, поэтому из (31) получаем

$$R \leq \varepsilon \left(\left[\frac{m}{x} \right] \right) a. \quad (32)$$

Аналогично проводятся рассуждения для точек ν/n , лежащих слева от точки x .

Оценим сумму из (30) снизу, оставив в ней только те слагаемые, которые соответствуют точкам ν/n , содержащимся в промежутках (27) при всех k .

Для $n = [m/x]$ имеем

$$\begin{aligned}
 B_n(f_n, x) &= B_{[m/x]}(f_{[m/x]}, x) \\
 &\geq a \left(\sum_{\nu=m+1}^{m+\zeta_1} \rho_{[m/x],\nu}(x) + 2 \sum_{\nu=m+\zeta_1+1}^{m+\zeta_2} \rho_{[m/x],\nu}(x) \right. \\
 &\quad \left. + 3 \sum_{\nu=m+\zeta_2+1}^{m+\zeta_3} \rho_{[m/x],\nu}(x) + \dots + k \sum_{\nu=m+\zeta_k+1}^{m+\zeta_{k-1}} \rho_{[m/x],\nu}(x) + \dots \right) \\
 &\quad - R + \sum_{\nu=0}^{m-1} f_n \left(\frac{\nu}{n} \right) \rho_{n,\nu}(x). \tag{33}
 \end{aligned}$$

Подставим в (33) при $0 < k < 2 \log n$ вместо $\rho_{[m/x],\nu}(x)$ представление (18) из леммы А. Получим

$$\begin{aligned}
 B_n(f_n, x) &\geq a \frac{1 + \varepsilon(n)}{\sqrt{2\pi n x(1-x)}} \left(\sum_{\nu=m+1}^{m+\zeta_1} e^{-(\nu-nx)^2/(2nx(1-x))} + 2 \sum_{\nu=m+\zeta_1+1}^{m+\zeta_2} e^{-(\nu-nx)^2/(2nx(1-x))} \right. \\
 &\quad \left. + 3 \sum_{\nu=m+\zeta_2+1}^{m+\zeta_3} e^{-(\nu-nx)^2/(2nx(1-x))} + \dots \right) \\
 &\quad + a \cdot 2 \log n \sum_{\nu=m+\zeta_2 \log n+1}^n \rho_{[m/x],\nu}(x) - R + \sum_{\nu=0}^{m-1} f_n \left(\frac{\nu}{n} \right) \rho_{n,\nu}(x). \tag{34}
 \end{aligned}$$

С помощью теоремы А получаем, что

$$\sum_{\nu=m+\zeta_2 \log n+1}^n \rho_{[m/x],\nu}(x) \leq \frac{2}{n^2}.$$

Величина $2a \log n \cdot 2/n^2$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, поэтому из (34) следует

$$\begin{aligned}
 B_n(f_n, x) &\geq a \frac{1 + \varepsilon(n)}{\sqrt{2\pi n x(1-x)}} \left(\sum_{\nu=m+1}^{m+\zeta_1} e^{-(\nu-nx)^2/(2nx(1-x))} + 2 \sum_{\nu=m+\zeta_1+1}^{m+\zeta_2} e^{-(\nu-nx)^2/(2nx(1-x))} \right. \\
 &\quad \left. + 3 \sum_{\nu=m+\zeta_2+1}^{m+\zeta_3} e^{-(\nu-nx)^2/(2nx(1-x))} \right) \\
 &\quad - R + \sum_{\nu=0}^{m-1} f_n \left(\frac{\nu}{n} \right) \rho_{n,\nu}(x). \tag{35}
 \end{aligned}$$

Преобразуем выражение

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{2\pi n x(1-x)}} e^{-(\nu-nx)^2/(2nx(1-x))} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n x(1-x)}} e^{-(\nu/n-x)^2 n/(2x(1-x))} \\
 &= (1 + \varepsilon(n)) \left(\frac{n}{2\pi x(1-x)} \right)^{1/2} \int_{\nu/n}^{(\nu+1)/n} e^{-(u-x)^2 n/(2x(1-x))} du.
 \end{aligned}$$

Сделаем замену переменной $\tau = (u - x)\sqrt{n/(x(1-x))}$ в этом интеграле. Тогда получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi nx(1-x)}} e^{-(\nu-nx)^2/(2nx(1-x))} \\ &= (1 + \varepsilon(n)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\nu/n-x)\sqrt{n/(x(1-x))}}^{((\nu+1)/n-x)\sqrt{n/(x(1-x))}} e^{-\tau^2/2} d\tau. \end{aligned} \quad (36)$$

Покажем, что при ν , изменяющихся от $m + \zeta_k + 1$ до $m + \zeta_{k+1}$, пределы интеграла из (36) пробегает значения от $k + \varepsilon(n)$ до $k + 1 + \varepsilon(n)$. Для этого подставим $\nu = m + \zeta_k + 1$ в выражение нижнего предела интеграла из (36):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\nu}{n} - x\right) \sqrt{\frac{n}{x(1-x)}} \\ &= \left(\frac{m + \zeta_k + 1}{n} - x\right) \sqrt{\frac{n}{x(1-x)}} = \left(\frac{m}{n} - x + \frac{\zeta_k}{n} + \frac{1}{n}\right) \sqrt{\frac{n}{x(1-x)}} \\ &= \left(\frac{m}{n} - x + \frac{\zeta_k - k\sqrt{nx(1-x)} + 1}{n} + \frac{k\sqrt{nx(1-x)}}{n}\right) \sqrt{\frac{n}{x(1-x)}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Справедливы оценки для следующих величин из правой части (37):

$$\left|\frac{m}{n} - x\right| = \frac{x}{n} \left\{\frac{m}{x}\right\} \leq \frac{x}{n} \quad \text{и} \quad \frac{\zeta_k - k\sqrt{nx(1-x)} + 1}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Поэтому эти величины, умноженные на $\sqrt{n}$, стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, из (37) получаем при $\nu = m + \zeta_k + 1$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\nu}{n} - x\right) \sqrt{\frac{n}{x(1-x)}} \\ &= \left(\frac{m}{n} - x\right) \sqrt{\frac{n}{x(1-x)}} + \frac{\zeta_k - k\sqrt{nx(1-x)} + 1}{n} \sqrt{\frac{n}{x(1-x)}} + k = k + \varepsilon(n). \end{aligned}$$

При $\nu = m + \zeta_{k+1}$, рассуждая аналогично, получим

$$\left(\frac{\nu}{n} - x\right) \sqrt{\frac{n}{x(1-x)}} = k + 1 + \varepsilon(n).$$

Используя (36), видим, что при $n \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi nx(1-x)}} \sum_{\nu=m+\zeta_k+1}^{m+\zeta_{k+1}} e^{-(\nu-nx)^2/(2nx(1-x))} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_k^{k+1} e^{-\tau^2/2} d\tau, \quad n \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Имеем из оценок (38), (35)

$$\begin{aligned} & B_{[m/x]}(f_{[m/x]}, x) - f_{[m/x]}(x) \\ & \geq a \left(\sum_{k=0}^p (k+1)(\Phi(k+1) - \Phi(k)) - \varepsilon \left(\left\lceil \frac{m}{x} \right\rceil \right) \right) - R + \sum_{\nu=0}^{m-1} f_n \left(\frac{\nu}{n} \right) \rho_{n,\nu}(x). \end{aligned} \quad (39)$$

При $n \rightarrow \infty$ ряд из правой части (39) сходится. Тогда из (39) следует оценка

$$B_{[m/x]}(f_{[m/x]}, x) - f_{[m/x]}(x) \geq a \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(\Phi(k+1) - \Phi(k)) - \varepsilon \left(\left\lceil \frac{m}{x} \right\rceil \right) \right) - R + \sum_{\nu=0}^{m-1} f_n \left(\frac{\nu}{n} \right) \rho_{n,\nu}(x). \quad (40)$$

Аналогичным образом проводятся рассуждения для точек ν/n , лежащих слева от точки x . Поэтому из (40) получаем

$$B_{[m/x]}(f_{[m/x]}, x) - f_{[m/x]}(x) \geq 2a \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(\Phi(k+1) - \Phi(k)) - \varepsilon \left(\left\lceil \frac{m}{x} \right\rceil \right) \right) - R. \quad (41)$$

Из (41) в силу (32) следует неуллучшаемость величины K в оценке (23).

Теорема доказана.

В заключение покажем, что при малых n множитель перед модулем непрерывности в оценке вида (7) может быть больше величины K в оценке (19).

Пусть $n = 3$, $x = 0.3$. Тогда

$$\delta = \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} = \sqrt{0.07} < 0.27.$$

Для кусочно-линейной функции $g(x)$, принимающей в концах отрезков линейности значения

$$\begin{aligned} g(0) &= 1, & g(0.02) &= g(0.29) = 0, & g(0.3) &= -1, \\ g\left(\frac{1}{3}\right) &= 0, & g\left(\frac{2}{3}\right) &= g(0.94) = 1, & g(1) &= 2, \end{aligned}$$

имеем $\omega(\delta) = 1$.

При $x = 0.3$ справедливо равенство

$$|g(x) - B_3(g, x)| = \left| -1 - \binom{3}{0}(1-x)^3 - \binom{3}{2}x^2(1-x) - 2\binom{3}{3}x^3 \right| = 1.586. \quad (42)$$

Таким образом, при $n = 3$ и $x = 0.3$ справедливо равенство

$$|g(x) - B_n(g, x)| = 1.586 \cdot \omega \left(\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \right). \quad (43)$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. Popoviciu, "Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur", *Mathematica Cluj*, **10** (1935), 49–54.
- [2] И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1949.
- [3] G. G. Lorentz, *Bernstein Polynomials*, Chelsea Publ., New York, 1986.
- [4] P. C. Sikkema, "Der Wert einiger Konstanten in der Theorie der Approximation mit Bernstein-Polynomen", *Numer. Math.*, **3** (1961), 107–116.
- [5] P. C. Sikkema, "Über den Grad der Approximation mit Bernstein-Polynomen", *Numer. Math.*, **1** (1959), 221–239.

- [6] C. G. Esseen, “Über die asymptotisch beste Approximation stetiger Funktionen mit Hilfe von Bernstein-Polynomen”, *Numer. Math.*, **2** (1960), 206–213.
- [7] В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, Наука, М., 1977.
- [8] M. Weba, “An optimal bound for the Bernstein approximation of multivariate Lipschitz-continuous functions”, *East J. Approx.*, **12**:4 (2006), 397–405.
- [9] С. А. Теляковский, “О скорости приближения функций многочленами Бернштейна”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **14**, 2008, 162–169.

В. О. Тонков

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: votonkov@mail.ru

Поступило

15.04.2012

Исправленный вариант

25.09.2012