Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Чехлов, Слабо транзитивные E -энгелевы абелевы группы без кручения, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 4, 620–627

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9378>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:51:33

Слабо транзитивные E -энгелевы абелевы группы без кручения

А. Р. Чехлов

Доказано, что если у редуцированной слабо транзитивной абелевой группы без кручения все эндоморфизмы являются ограниченными право-нильпотентными, то ее кольцо эндоморфизмов коммутативно. Коммутативно кольцо эндоморфизмов и у абелевой группы без кручения с периодической группой автоморфизмов и энгелевым кольцом эндоморфизмов.

Библиография: 18 названий.

DOI: 10.4213/mzm9378

Все группы в статье предполагаются абелевыми. Через $E(A)$ обозначается кольцо эндоморфизмов группы A , через $\text{Aut } A$ – группа ее автоморфизмов; 1_A – ее тождественный автоморфизм, A_p – p -компонента, $T(A)$ – периодическая часть. Если A – группа без кручения, то $\chi_A(a)$ – характеристика, $t_A(a)$ – тип, а $h_p^A(a)$ – p -высота ее элемента a ; индекс A иногда убирается. Далее, Z_{p^∞} – квазициклическая p -группа, $\mathbb{Q}$ – аддитивная группа рациональных чисел, $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $Z(R)$ – центр кольца R . Подгруппа H группы A называется *вполне инвариантной*, если $fH \subseteq H$ для каждого $f \in E(A)$. Группа без кручения называется *квазиоднородной*, если типы любых ее двух ненулевых элементов имеют символ ∞ на одних и тех же местах.

Напомним, что если R – кольцо и $a, b \in R$, то элемент $[a, b] = ab - ba$ называется *коммутатором* элементов a и b ; для $a_1, \dots, a_n \in R$ полагаем $[a_1, \dots, a_n] = [[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n]$. Обозначим для краткости $[b, \underbrace{a, \dots, a}_n] = [b, na]$. Кольцо с центральными идемпотентами называется *нормальным* [1]. Неделитель нуля в кольце

называем его *регулярным* элементом.

Напомним следующие понятия (см., например, [2], [3]). Кольцо R называется *энгелевым ступени n* , если $[b, na] = 0$ для любых $b, a \in R$ и фиксированного n , причем n – наименьшее натуральное с таким свойством (говорят еще, что R – кольцо с условием E_n). Если $[b, na] = 0$ для любых $b, a \in R$ при некотором n , зависящем от b и a , то кольцо называется *энгелевым*. Элемент a кольца R называется *энгелевым*, если для каждого $b \in R$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $[b, na] = 0$ (если при этом n не зависит от b , то элемент a называется *ограниченным энгелевым*). Если равенство $[b, na] = 0$ выполняется для любого $a \in R$ при фиксированном $b \in R$, то элемент b называется *право-энгелевым* (если при этом n не зависит

от a , то элемент b называется *ограниченным право-энгелевым*). Элемент b кольца R называется *ограниченным право-нильпотентным*, если найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $[b, a_1, \dots, a_n] = 0$ для всех $a_1, \dots, a_n \in R$ (наименьшее такое n называется *степенью* право-нильпотентного элемента b).

Группу A будем называть E_n -энгелевой, если $E(A)$ является кольцом с условием E_n ; E -энгелевой, если $E(A)$ является энгелевым кольцом; E -нильпотентной, если для любой последовательности $\alpha_i \in E(A)$, $i = 1, 2, \dots$, найдется такое n , что $[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = 0$.

E -нильпотентные и близкие к ним группы изучались в [4]–[9].

В [4; предложение 1.2] показано, что E -энгелевы группы имеют нормальное кольцо эндоморфизмов. В таких группах все прямые слагаемые вполне инвариантны [1; предложение 3.15]. Поэтому несложно показать, что делимая группа $D = T(D) \oplus D_0$ имеет нормальное кольцо эндоморфизмов тогда и только тогда, когда либо $T(D) = 0$, а $D_0 \cong \mathbb{Q}$, либо $D_0 = 0$, а $D_p \cong Z_{p^\infty}$ для каждого p с условием $D_p \neq 0$. Редуцированная группа $A = D \oplus B$ с делимой частью D имеет нормальное кольцо эндоморфизмов тогда и только тогда, когда B – периодическая группа, каждая p -компонента которой является циклической группой, а $D \cong \mathbb{Q}$, либо D – периодическая группа, каждая ненулевая p -компонента которой изоморфна квазициклической p -группе, причем $B_p = 0$ при $D_p \neq 0$ [5; абзац после предложения 2]. Кольца эндоморфизмов вышеупомянутых групп D и A будут коммутативными. Поэтому в дальнейшем будем считать, что все группы в статье редуцированные.

В [10] (см. также [3], [11]) доказано, что всякая алгебра Ли с условием E_n над полем нулевой характеристики является nilпотентной некоторой степени m . Поэтому каждая E_n -энгелева группа без кручения будет E -нильпотентной некоторой степени m .

Существуют E -энгелевы группы, не являющиеся E -нильпотентными (напомним, что в [12], [13] построены примеры алгебр Ли с условием E_n , не являющихся nilпотентными, а в [14] – примеры энгелевых алгебр Ли, не являющихся локально nilпотентными).

ПРИМЕР. Пусть $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ – кольцо целых гауссовых чисел. Рассмотрим кольцо $K = (\mathbb{Z}[i])[x_1, \dots, x_j, \dots; -]$ комплексно-косых многочленов от переменных $x_1, \dots, x_j, \dots$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}[i]$, для которых выполняются равенства $x_j c = \bar{c} x_j$, где $\bar{c}$ – комплексное число, сопряженное с c . Пусть S – подкольцо в K , состоящее из многочленов со свободными коэффициентами из $\mathbb{Z}$. Пусть теперь $R = S/J$, где J – идеал, порожденный элементами $x_1^n, \dots, x_j^n, \dots$, а n – фиксированное натуральное число > 1 . Тогда если $f, g \in R$, то $[f, mg] = 0$ для некоторого m , зависящего от f, g . Аддитивная группа кольца R является счетной редуцированной группой без кручения, поэтому по теореме Корнера [15; теорема 110.1] существует группа A , кольцо эндоморфизмов которой изоморфно R . Тогда A – E -энгелева группа. Поскольку

$$[x_1, ix_2, \dots, ix_k] = \begin{cases} 2^{2s} x_1 x_2 \cdots x_k & \text{при } k = 2s + 1, \\ -2^{2s} ix_1 x_2 \cdots x_k & \text{при } k = 2s \end{cases}$$

для каждого k , то A не является E -нильпотентной группой.

Непосредственно проверяется, что

$$[b, na] = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k a^k b a^{n-k}, \quad \text{где } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(эта формула упоминается, например, в [3; формула 1.5] и в [16]).

Приведем несколько простых свойств, на которые будем ссылаться в дальнейшем.

СВОЙСТВО 1. Для элементов a, b кольца R равносильны следующие условия:

- а) $[b, a, a] = 0$;
- б) $[b, a^m, a^n] = 0$ для любых $m, n \in \mathbb{N}$;
- в) $2a^n b a^n = a^{2n} b + b a^{2n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) $\Rightarrow$ б). Если $[b, a, a] = 0$, то $[b, a, a^m] = 0$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Из $0 = [b, a, a^m] = [b, a^m, a]$ следует, что $[b, a^m, a^n] = 0$.

Условие в) получается из б) при $m = n$.

Условие а) вытекает из в) при $n = 1$.

СВОЙСТВО 2. Пусть для элементов a, b кольца R справедливо $[b, a, a] = 0$. Тогда

$$b a^{2m+1} - a^{2m+1} b = (2m+1) a^m (b a - a b) a^m$$

для каждого $m \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по m . Если $m = 1$, то из $[b, 3a] = 0$ получаем

$$b a^3 - a^3 b = 3a(b a - a b) a.$$

Далее, учитывая равенство $2aba = ba^2 + a^2b$ и перестановочность $[b, a]$ с a , имеем

$$\begin{aligned} b a^{2m+3} - a^{2m+3} b &= (2m+1) a^m (b a - a b) a^{m+2} + a^{2m+1} b a^2 - a^{2m+3} b \\ &= (2m+1) a^{m+1} (b a - a b) a^{m+1} + a^{2m+1} (b a^2 - a^2 b) \\ &= (2m+1) a^{m+1} (b a - a b) a^{m+1} + a^{2m+1} (2aba - 2a^2 b) \\ &= (2m+3) a^{m+1} (b a - a b) a^{m+1}. \end{aligned}$$

СВОЙСТВО 3. Пусть для элементов a, b кольца R и для натурального $n \geq 2$ справедливо равенство $[b, na] = 0$, аддитивная группа R^+ кольца R является группой без кручения и a – регулярный элемент в R . Тогда если $[b, a^k] = 0$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, то и $[b, a] = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = 2$. Если $k = 2m$, то

$$[b, a^m, a^m] = b a^{2m} + a^{2m} b - 2a^m b a^m = 0.$$

Откуда $2a^m(a^m b - b a^m) = 0$. Значит, $a^m b - b a^m = 0$, т.е. $[b, a^m] = 0$. Ссылка на свойство 2 заканчивает этот этап доказательства.

Пусть теперь $n > 2$ и $x = [b, (n-2)a]$. Тогда $[x, a, a] = 0$ и $[x, a^k] = 0$. По доказанному $[x, a] = [b, (n-1)a] = 0$. Индукция завершает доказательство.

СВОЙСТВО 4. Пусть для элементов $a, b \neq 0$ кольца R с 1 выполняется равенство $[b, na] = 0$. Тогда

- а) условие $ab = 1$ (соответственно $ba = 1$) влечет $ba = 1$ (соответственно $ab = 1$);
- б) правая регулярность элемента a влечет $ba \neq 0$, а левая регулярность элемента a влечет $ab \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Если $ab = 1$, то из равенства

$$[b, na] = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k a^k b a^{n-k} = 0$$

получаем

$$ba^n + (-1)^n a^{n-1} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} C_n^k \right) a^{n-1}.$$

Поскольку $\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} C_n^k = 1 + (-1)^n$, то $(ba - 1)a^{n-1} = 0$ и, значит, $ba = 1$. Симметричное утверждение доказывается аналогично.

б) Действительно, если $ba = 0$, то $[b, na] = (-1)^n a^n b = 0$, что противоречит правой регулярности элемента a . Аналогично, если $ab = 0$, то $[b, na] = ba^n = 0$, что противоречит левой регулярности элемента a .

СВОЙСТВО 5. Пусть R – энгелево кольцо и M – левый модуль над R . Тогда периодическая часть $T(M)$ модуля M является его сингулярным подмодулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $rx = ty = 0$ для $x, y \in T(M)$ и регулярных элементов $r, t \in R$. Если $[r, nt] = 0$ для некоторого n , то

$$t^n rx = 0 \quad \text{и} \quad t^n ry = (-1)^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k t^k r t^{n-k} \right) y = 0.$$

Если теперь $sx \neq 0$ для некоторого $s \in R$, то, как показано, $r^m sx = 0$, где m такое, что $[s, mr] = 0$ и r^m – регулярный элемент. Итак, $T(M)$ – подмодуль в M .

Если же r – произвольный ненулевой элемент из R , а t , как и ранее, – регулярный элемент из $\text{Ann } y$, то, как и выше, получаем $0 \neq t^n r \in Rr \cap \text{Ann } y$; этого достаточно для сингулярности $T(M)$. Ясно, что $T(M/T(M)) = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть A – Е-энгелева группа без кручения. Тогда

- 1) если α – регулярный элемент кольца $E(A)$ и $\alpha^k \in Z(E(A))$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, то $\alpha \in Z(E(A))$;
- 2) периодическая часть группы $\text{Aut } A$ является ее подгруппой, содержащейся в $Z(E(A))$. В частности, если группа $\text{Aut } A$ периодична, то кольцо $E(A)$ коммутативно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) вытекает из свойства 3, а 2) есть следствие 1).

Напомним, что группа без кручения A называется слабо транзитивной (вполне транзитивной), если для любых ее элементов $a, b \neq 0$ со свойством $\chi(a) = \chi(b)$ (соответственно $\chi(a) \leq \chi(b)$) существует такой $\alpha \in E(A)$, что $\alpha a = b$.

ЛЕММА 1 [17; лемма 1.2]. Пусть A – редуцированная группа без кручения, $f \in E(A)$ и $0 \neq b \in \ker f$. Тогда

$$\text{если } h_p(b) \geq h_p(fa), \quad \text{то } h_p(a+b) = h_p(a).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если A – редуцированная слабо транзитивная группа без кручения, то каково бы ни было $n \in \mathbb{N}$ для любого $0 \neq \alpha \in E(A)$ найдется такой $\beta \in E(A)$, что $\alpha(\beta\alpha)^n \neq 0$. В частности, $\alpha\beta\alpha \neq 0$ и, значит, кольцо $E(A)$ полупервично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что нашлось n со свойством $\alpha(\beta\alpha)^n = 0$ для каждого $\beta \in E(A)$. В частности, α – нильпотентный элемент. Можно считать, что $\alpha^2 = 0$. Если $\alpha a \neq 0$ для $a \in A$, то в силу редуцированности группы A p -высота элемента αa конечна для некоторого простого p , $h_p(\alpha a) = s$; причем a можно выбрать так, чтобы $a \in A \setminus pA$. Так как $\alpha a \in \ker \alpha$, то из леммы 1 следует, что

$$\chi(p^m a + \alpha a) = \chi(p^s a), \quad \text{где } m \geq (n+2)s.$$

Если $p^m \beta a + \beta \alpha a = p^s a$ для $\beta \in E(A)$, то в силу выбора m имеем

$$h_p(\alpha \beta \alpha a) = h_p(p^s \alpha a) = 2s.$$

Поэтому $\alpha \beta \alpha a \neq 0$ и, значит, $n > 1$. Далее, если $k = 1, \dots, n$, то из равенства

$$p^m \alpha(\beta\alpha)^{k-1} \beta a + \alpha(\beta\alpha)^k a = p^s \alpha(\beta\alpha)^{k-1} a$$

по индукции получаем, что $h_p(\alpha(\beta\alpha)^k a) = (k+1)s$. В частности, $\alpha(\beta\alpha)^n a \neq 0$. Противоречие.

Условимся, что $[b, 0] = b$. Будем говорить, что элемент b кольца R обладает свойством $(*)$, если для некоторого натурального $n \geq 2$ найдутся такие элементы $a_0, \dots, a_{n-2}, a \in R$, что $a_0 = 0$, $d = [c, a] \neq 0$ и $[c, a, a] = 0$, $[c^2, a, a] = 0$, где $c = [b, a_0, \dots, a_{n-2}]$.

Элемент $a_0 = 0$ нужен, чтобы учесть случай $n = 2$. Поскольку $[c, ca + ac, a] = [c^2, a, a]$, то всякий право-нильпотентный элемент ступени $n \geq 2$ обладает свойством $(*)$.

СВОЙСТВО 6. Если аддитивная группа кольца R не имеет элементов порядка 2 и $d = [c, a]$ – элемент из вышеприведенного определения, то $d^2 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $[c, a, a] = 0$, то

$$d^2 = [c, a]^2 = c(ca - ac)a - ac(ca - ac) = (ca - ac)ca - a(ca - ac)c.$$

Откуда $2(ac)^2 - 2(ca)^2 = a^2 c^2 - c^2 a^2$. Следовательно,

$$2[c, a]^2 = c^2 a^2 - 2ac^2 a + a^2 c^2 = (c^2 a - ac^2)a - a(c^2 a - ac^2) = [c^2, a, a] = 0.$$

Таким образом, $d^2 = 0$.

ТЕОРЕМА. Пусть A – группа без кручения. Тогда если группа ее автоморфизмов периодична или A – редуцированная слабо транзитивная группа, то кольцо $E(A)$ не содержит элементов со свойством $(*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа без кручения с периодической группой автоморфизмов не имеет ненулевых нильпотентных эндоморфизмов [15; §116, свойство а)], поэтому в этом случае теорема вытекает из свойства 6. Если теперь $\alpha^2 = 0$ для некоторого $\alpha \in E(A)$, то $[\alpha, n\beta\alpha] = \alpha(\beta\alpha)^n$ для каждого $\beta \in E(A)$. Ссылка на предложение 2 завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть A – редуцированная слабо транзитивная группа без кручения. Тогда множество нильпотентных эндоморфизмов группы A не содержится в множестве ограниченных право-энгелевых эндоморфизмов. Кроме того, если любой элемент из $E(A)$ является ограниченным право-нильпотентным, то кольцо $E(A)$ коммутативно.

Перейдем к вполне транзитивным группам. Согласно лемме 1.3 из [18] у квазиоднородной вполне транзитивной группы без кручения A ядра ее ненулевых эндоморфизмов не содержат нетривиальных вполне инвариантных подгрупп; из этого следует, что всякий ненулевой эндоморфизм группы A с ненулевым ядром не содержится в центре кольца ее эндоморфизмов; в частности, ненулевые центральные элементы кольца $E(A)$ состоят из мономорфизмов и, значит, если кольцо $E(A)$ коммутативно, то все ненулевые эндоморфизмы группы A являются мономорфизмами.

Будем говорить, что группа A удовлетворяет условию n -максимальности на ядра эндоморфизмов (n – фиксированное натуральное число), если для любого $\alpha \in E(A)$ выполнено $\ker \alpha^n = \ker \alpha^{n+1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть A – редуцированная квазиоднородная E -энгелева вполне транзитивная группа без кручения. Тогда

- 1) для любого $\alpha \in E(A)$ с условием $\ker \alpha \neq 0$ выполнено либо $\alpha^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, либо $\ker \alpha^m \neq \ker \alpha^{m+1}$ для каждого $m \in \mathbb{N}$;
- 2) всякий нильпотентный элемент кольца $E(A)$ с ненулевым ядром является неограниченным энгелевым;
- 3) если в $E(A)$ нет ненулевых нильпотентных элементов и любой элемент является ограниченным энгелевым, то все ненулевые эндоморфизмы группы A являются мономорфизмами;
- 4) если в A выполняется условие n -максимальности на ядра эндоморфизмов для некоторого n , то все ненулевые эндоморфизмы группы A являются мономорфизмами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Допустим, что нашелся $m \in \mathbb{N}$ со свойством $\ker \alpha^m = \ker \alpha^{m+1}$, причем $\alpha^t \neq 0$ для любого $t \in \mathbb{N}$. Пусть теперь $\alpha^n b \neq 0$ и $\alpha a = 0$, где $a \neq 0$ и $n > m$. В силу квазиоднородности группы A элементы a и b можно выбрать так, чтобы $a, b \in A \setminus pA$ для некоторого простого числа p . Пусть, далее, $s > h_p(\alpha^n b)$. Из равенства $\alpha(p^s b + a) = p^s \alpha b$ следует, что $\chi(p^s b + a) \leq \chi(\alpha b)$. Поэтому найдется $\beta \in E(A)$ со свойством $\beta(p^s b + a) = \alpha b$. Так как $s > h_p(\alpha^n b)$, то $\alpha^{n-1} \beta a \neq 0$. С другой стороны,

$$[\beta, k\alpha] = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i \alpha^i \beta \alpha^{k-i} = 0$$

для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что $\alpha^k \beta a = 0$. Значит, $k \geq n$ и $\beta a \in \ker \alpha^k \setminus \ker \alpha^{n-1}$. Это противоречит равенствам $\ker \alpha^k = \ker \alpha^n = \ker \alpha^m$.

Утверждение 2) вытекает из доказательства 1). Утверждение 3) следует из 2). Утверждение 4) вытекает из 1) и предложения 2).

Напомним, что подгруппа

$$Z(A) = \{a \in A \mid [\alpha, \beta]a = 0 \text{ для всех } \alpha, \beta \in E(A)\}$$

называется E -центром группы A [4]. Если $\alpha \in E(A)$, то пусть

$$Z_\alpha(A) = \{a \in A \mid [\alpha, \beta]a = 0 \text{ для всех } \beta \in E(A)\}.$$

В силу равенства $[\alpha, \beta]\gamma = [\alpha, \beta\gamma] - \beta[\alpha, \gamma]$ подгруппы $Z(A)$ и $Z_\alpha(A)$ вполне инвариантны в A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если A – квазиоднородная вполне транзитивная группа без кручения, то ее эндоморфизм α является центральным тогда и только тогда, когда $Z_\alpha(A) \neq 0$.

Кроме того, следующие условия эквивалентны:

- а) $Z(A) \neq 0$;
- б) $Z(A) = A$, т.е. кольцо $E(A)$ коммутативно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость первого утверждения очевидна. Докажем его достаточность. Пусть $0 \neq a \in Z_\alpha(A)$, так как подгруппа $Z_\alpha(A)$ вполне инвариантна в A , то в силу вполне транзитивности группы A отсюда следует, что вполне инвариантная подгруппа $A(t(a)) = \{x \in A \mid t(x) \geq t(a)\}$ содержится в $\ker[\alpha, \beta]$ для любого $\beta \in E(A)$. Если A – нередуцированная группа, то в силу квазиоднородности она делима и $A(t(a)) = A$, значит, α – центральный эндоморфизм. Если же A – редуцированная группа, то утверждение следует из леммы 1.3 [18], в которой показано, что редуцированные группы, удовлетворяющие условиям предложения, не содержат ненулевых вполне инвариантных подгрупп в ядрах ненулевых эндоморфизмов. Второе утверждение предложения доказывается аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ. В [19] изучались группы без кручения A со следующим свойством: для любых $a, b \in A$ и $\alpha, \beta \in E(A)$ таких, что $\alpha a = b$ и $\beta b = a$ существует $\varphi \in \text{Aut } A$, отображающий a в b .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Туганбаев, *Теория колец. Арифметические модули и кольца*, МЦНМО, М., 2009.
- [2] А. Г. Курош, *Теория групп*, Наука, М., 1967.
- [3] А. И. Кострикин, *Вокруг Бернсайда*, Наука, М., 1986.
- [4] А. Р. Чехлов, “Е-нильпотентные и Е-разрешимые абелевы группы класса 2”, *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2010, № 1, 59–71.
- [5] А. Р. Чехлов, “Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов”, *Алгебра и логика*, **48**:4 (2009), 520–539.
- [6] А. Р. Чехлов, “Е-энгелевы абелевы группы степени ≤ 2 ”, *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2012, № 1, 54–60.
- [7] А. Р. Чехлов, “О проективном коммутанте абелевых групп”, *Сиб. матем. журн.*, **53**:2 (2012), 451–464.
- [8] А. Р. Чехлов, “Об абелевых группах с нильпотентными коммутаторами эндоморфизмов”, *Изв. вузов. Матем.*, 2012, № 10, 60–73.
- [9] А. Р. Чехлов, “О проективно разрешимых абелевых группах”, *Сиб. матем. журн.*, **53**:5 (2012), 1157–1165.
- [10] Е. И. Зельманов, “Об энгелевых алгебрах Ли”, *Докл. АН СССР*, **292**:2 (1987), 265–268.
- [11] Е. И. Зельманов, “О некоторых проблемах теории групп и алгебр Ли”, *Матем. сб.*, **180**:2 (1989), 159–167.
- [12] Ю. П. Размыслов, “Об энгелевых алгебрах Ли”, *Алгебра и логика*, **10**:1 (1971), 33–44.

- [13] S. Bachmuth, H. Y. Mochizuki, D. A. Walkup, “A nonsolvable group of exponent 5”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), 638–640.
- [14] Е. С. Голод, “О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых p -группах”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28**:2 (1964), 273–276.
- [15] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, Т. 2, Мир, М., 1977.
- [16] О. Б. Финогенова, “Многообразия ассоциативных алгебр, удовлетворяющие тождествам Энгеля”, *Алгебра и логика*, **43**:4 (2004), 482–505.
- [17] А. Р. Чехлов, “Об одном классе эндотранзитивных групп”, *Матем. заметки*, **69**:6 (2001), 944–949.
- [18] А. Р. Чехлов, “Вполне транзитивные группы без кручения конечного p -ранга”, *Алгебра и логика*, **40**:6 (2001), 698–715.
- [19] B. Goldsmith, L. Strüngmann, “Torsion-free weakly transitive abelian groups”, *Comm. Algebra*, **33**:4 (2005), 1177–1191.

А. Р. Чехлов

Томский государственный университет

E-mail: cheklov@math.tsu.ru

Поступило

15.11.2012