Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Калякин, Асимптотический распад решения возмущенного уравнения Лиувилля, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 2, 195–209

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm938>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 17:37:08

УДК 517.946

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ РАСПАД РЕШЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

Л. А. Калякин

Рассматривается задача Коши для возмущенного уравнения Лиувилля. Методом двухмасштабных разложений строится асимптотическое по параметру возмущения решение, пригодное до далеких времен. Основной результат – определение деформации главного члена асимптотики в масштабе медленного времени.

Библиография: 19 названий.

Введение. Асимптотическое интегрирование уравнений в частных производных, которые близки к уравнениям, интегрируемым точно, остается одной из привлекательных задач теории возмущений. Особый интерес представляют задачи о возмущении так называемых солитонных уравнений, поскольку последние тесно связаны с приложениями во многих областях физики и механики, [1]–[11]. В данной статье рассматривается возмущение нелинейного уравнения Лиувилля. Предлагается конструкция, которая обеспечивает асимптотическое интегрирование задачи Коши с любыми гладкими убывающими начальными данными.

Уравнение Лиувилля $\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + 8 \exp \varphi = 0$ известно в физике как одна из моделей нелинейной теории поля [12], [13]. Популярность этого интегрируемого волнового уравнения во многом обязана наличию формулы для общего решения

$$\varphi(x, t) = \ln \frac{r'_+(s^+) r'_-(s^-)}{r^2(s^+, s^-)}, \quad r = r_+(s^+) + r_-(s^-), \quad s^\pm = x \pm t. \quad (0.1)$$

Штрихи всюду означают дифференцирование по пространственной переменной x либо по конусной переменной $s^\pm$. Эта формула, полученная еще Лиувиллем [14], содержит два функциональных произвола $r_\pm$, которые обеспечивают решение задачи Коши.

Объектом данного исследования является задача Коши для уравнения с малым возмущением

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + 8 \exp u = \varepsilon F[u], \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (0.2)$$

Предполагается, что начальные данные

$$u|_{t=0} = \psi_0(x), \quad \partial_t u|_{t=0} = \psi_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (0.3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00459.

быстро стремятся к нулю на бесконечности: $\psi_0, \psi_1(x) = O(x^{-N})$, $|x| \rightarrow \infty$ для любого N . Здесь и всюду в дальнейшем все функции и асимптотики являются гладкими, т. е. бесконечно дифференцируемыми. Оператор возмущения задается парой гладких функций двух переменных в виде

$$F[u] = \partial_x F_1(\partial_x u, \partial_t u) + \partial_t F_2(\partial_x u, \partial_t u). \quad (0.4)$$

Ставится задача об асимптотическом приближении решения $u(x, t; \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно в широкой полосе $x \in \mathbb{R}$, $0 < t \leq O(\varepsilon^{-1})$.

Решение невозмущенной задачи в своей асимптотике на бесконечности распадается на две простые волны, расходящиеся на фоне линейно убывающего главного члена: $\varphi(x, t) = -4t + A_{\pm}(s^{\pm}) + O((s^{\mp})^{-N})$, $s^{\mp} \rightarrow \mp\infty$. При возмущении этот распад сохраняется в главном члене асимптотики по $\varepsilon \rightarrow 0$. Влияние возмущения проявляется в слабой деформации волн $A_{\pm} = A_{\pm}(s^{\pm}, \tau)$ в масштабе $\tau = \varepsilon t$ и приводит к эффектам порядка $O(1)$ на далеких временах $t \approx \varepsilon^{-1}$. Такая деформация описывается уравнениями первого порядка в частных производных

$$\pm 2\partial_{\tau} A_{\pm} = H_{\pm}(\partial_s A_{\pm}), \quad (0.5)$$

где $H_{\pm}(B) = F_1(B, -4 \pm B) - F_1(0, -4) \pm F_2(B, -4 \pm B) \mp F_2(0, -4)$. Начальные данные для $A_{\pm}$ вычисляются из невозмущенного решения. Поэтому эффективность предлагаемого подхода в основном определяется эффективностью решения задачи Коши для невозмущенного уравнения.

1. Вид формального решения задачи Коши. Простейшая конструкция в виде прямого ряда теории возмущений

$$u \approx \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \overset{n}{u}(x, t), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (*)$$

дает асимптотику решения равномерно в любом замкнутом характеристическом треугольнике, который не зависит от ε . В качестве главного члена берется решение невозмущенного уравнения $\overset{0}{u} = \varphi(x, t)$. Возмущение учитывается в поправках u_n ($n \geq 1$), которые определяются из линеаризованных уравнений. Сингулярный характер возмущения и непригодность прямого разложения связаны с большим промежутком времени. Как обычно в подобных задачах, в поправках $\overset{n}{u}$ обнаруживаются секулярные члены $O(t^n)$, которые делают непригодным разложение (*) на далеких временах $t \approx \varepsilon^{-1}$.

На далеких временах малые возмущения проявляются в главном члене асимптотики, что обнаруживается в параметрах $r_{\pm}$ в виде зависимости от медленного времени $\tau = \varepsilon t$. Определение функций $r_{\pm} = r_{\pm}(s^{\pm}, \tau)$ при $\tau = O(1)$, исходя из требования отсутствия секулярных членов в поправках, является основной задачей конструирования формального асимптотического решения (ФАР).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Под ФАР порядка N понимается функция $U_N(x, t; \varepsilon)$, которая удовлетворяет уравнениям (0.2), (0.3) с точностью $o(\varepsilon^N)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, равномерно в широкой полосе $x \in \mathbb{R}$, $0 < t \leq O(\varepsilon^{-1})$.

В данной работе мы ограничиваемся построением ФАР второго порядка. Предлагаемый нами подход напоминает известный метод Крылова–Боголюбова [15]. В качестве ФАР берется конечный отрезок ряда

$$u(x, t; \varepsilon) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \bar{u}^n(x, t, \tau; \varepsilon), \quad (1.1)$$

в коэффициентах которого допускается специфическая зависимость от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ и параметра ε . Для главного члена используется решение невозмущенного уравнения

$$\bar{u}^0 = \ln \left(\frac{r'_+ r'_-}{r^2} \right) \quad (r = r_+ + r_-), \quad (1.2)$$

которое параметризуется парой функций $r_{\pm}(s^{\pm}, \tau; \varepsilon)$, зависящих дополнительно от $\tau = \varepsilon t$ и от малого параметра ε . Для них строится своя асимптотика

$$r_{\pm}(s^{\pm}, \tau; \varepsilon) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \bar{r}_{\pm}^n(s^{\pm}, \tau). \quad (1.3)$$

Конструирование ФАР сводится к нахождению коэффициентов разложения $\bar{u}^n, \bar{r}_{\pm}^n$.

Поправки $\bar{u}^n$ берутся из рекуррентной системы линейаризованных уравнений

$$\partial_t^2 \bar{u}^n - \partial_x^2 \bar{u}^n + 8 \bar{u}^n \exp(\bar{u}^0) = \bar{f}^n(x, t; \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (1.4)$$

Правые части определяются через предыдущие приближения; например,

$$\bar{f}^1 = \mathbf{F}[\bar{u}^0] - 2\partial_{\tau}\partial_t\bar{u}^0, \quad \bar{f}^2 = \delta\mathbf{F}[\bar{u}^0]\bar{u}^1 + \delta_{u_t}\mathbf{F}[\bar{u}^0]\partial_{\tau}\bar{u}^0 - 4(\bar{u}^1)^2 \exp\bar{u}^0 - 2\partial_{\tau}\partial_t\bar{u}^1 - \partial_{\tau}^2\bar{u}^0.$$

Эти уравнения обеспечивают асимптотическое выполнение исходного уравнения (0.2). Начальные условия (0.3) удовлетворяются за счет подходящего выбора функций $r_{\pm}$.

Эффективность всей конструкции основана на явных формулах для решений линейаризованного уравнения. Эти решения выписываются через интегралы, и дело сводится к конструированию коэффициентов $\bar{r}_{\pm}^n$.

Так же, как в классическом методе Крылова–Боголюбова, уравнения, описывающие медленную деформацию параметров $r_{\pm}$, можно получить из требований ограниченности поправок $\bar{u}^n$ в быстрых переменных x, t . Получаемые таким способом уравнения для $\bar{r}_{\pm}^n$ выглядят довольно сложно. Поэтому мы предлагаем использовать для главного члена другую параметризацию $\bar{u}^0 = \Phi[A_+, A_-]$ – через пару функций $A_{\pm}(s^{\pm})$, которые представляют собой асимптотику на бесконечности решения уравнения Лиувилля. На этом пути получаются хорошо знакомые уравнения первого порядка (0.5) с ясной геометрической интерпретацией. Они описывают медленную деформацию (под влиянием возмущения) простых волн, на которые распадается в бесконечности решение невозмущенного уравнения Лиувилля. Связь пары $A_{\pm}$ с $r_{\pm}$ задается явными формулами, которые представляют собой основной результат следующего пункта.

2. Асимптотика решения нелинейного уравнения Лиувилля. Решение задачи Коши для невозмущенного уравнения с использованием формулы (0.1) сводится к определению пары функций $r_{\pm}(x)$ [13]. Начальные условия представляют собой систему дифференциальных уравнений третьего порядка и могут быть преобразованы к паре уравнений, которые заменой $r'_{\pm} = w/\rho_{\pm}^2$ (для произвольного $w = \text{const} \neq 0$) линеаризуются:

$$\rho''_{\pm} - \Psi_{\pm}(x)\rho_{\pm} = 0. \quad (2.1)$$

Потенциалы здесь связаны с начальными данными:

$$\Psi_{\pm}(x) = \left[\exp(\psi_0) + \left(\frac{\psi'_0 \pm \psi_1}{4} \right)^2 - \frac{1}{4}(\psi'_0 \pm \psi_1)' \right]. \quad (2.2)$$

Требуемые в (0.1) функции выписываются в виде $r_{\pm}(x) = \tilde{\rho}_{\pm}(x)/\rho_{\pm}(x)$ через линейно независимые решения с вронскианом $W(\rho_{\pm}, \tilde{\rho}_{\pm}) = w$. При этом одна пара функций, например ρ_+ , $\tilde{\rho}_+$, может быть выбрана из уравнений (2.1) произвольно с четырьмя константами интегрирования. Вторая пара определяется конечными формулами, в которые превращаются начальные уравнения

$$\rho_- = -\exp\left(-\frac{\psi_0}{2}\right) \left[\rho'_+ + (\psi'_0 + \psi_1)\frac{\rho_+}{4} \right], \quad (2.3)$$

$$\tilde{\rho}_- = \exp\left(-\frac{\psi_0}{2}\right) \left[\tilde{\rho}'_+ + (\psi'_0 + \psi_1)\frac{\tilde{\rho}_+}{4} \right]. \quad (2.4)$$

Константы интегрирования в ρ_+ , $\tilde{\rho}_+$ соответствуют трехпараметрическому произволу в преобразовании Бианки [16]

$$\tilde{r}_{\pm} = \frac{\pm ar_{\pm} + b}{cr_{\pm} \pm d} \quad (bc - ad = w)$$

и неопределенности общего множителя w , с точностью до которых определяются функции $r_{\pm}$; от этих констант не зависит решение, определяемое по формуле (0.1).

ЛЕММА 2.1. Пусть гладкие начальные функции быстро стремятся к нулю на бесконечности: для всех N $\psi_0(x), \psi_1(x) = O(x^{-N})$, $|x| \rightarrow \infty$, и уравнения (2.1) не находятся на спектре. Тогда решение уравнения Лиувилля с такими начальными данными имеет асимптотику в характерных направлениях на бесконечности в виде пары расходящихся волн на фоне линейно убывающего главного члена:

$$\varphi(x, t) = -4t + A_{\pm}(s^{\pm}) + O((s^{\mp})^{-N}) + O(e^{-4t}), \quad s^{\mp} \rightarrow \mp\infty, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Эти волны имеют согласованную асимптотику на бесконечности:

$$A_{\pm}(s) = \begin{cases} -\ln a^2 + O(s^{-N}), & s \rightarrow \pm\infty \quad (a = \text{const} \neq 0), \\ O(s^{-N}), & s \rightarrow \mp\infty. \end{cases} \quad (2.6)$$

ПОЯСНЕНИЕ. Особенностью уравнения Лиувилля является наличие ненулевого решения с нулевыми начальными данными. Неубывающий член асимптотики такого решения, равный $-4t$, образует тот фон, по которому разбегаются волны $A_{\pm}(x \pm t)$, объясненные ненулевым начальным данным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Зафиксируем два решения ρ_+ , $\tilde{\rho}_+$ уравнений (2.1) условиями убывания на $\pm\infty$ соответственно. Поскольку потенциалы (2.2) быстро стабилизируются на бесконечности к единице, то имеются экспоненциально убывающие решения. С учетом формул (2.3), (2.4) асимптотика выписывается сразу для обеих пар

$$\begin{aligned}\rho_{\pm} &= \exp(-x)[1 + O(x^{-N})], & x \rightarrow +\infty, \\ \tilde{\rho}_{\pm} &= \exp(x)[1 + O(x^{-N})], & x \rightarrow -\infty.\end{aligned}$$

Каждая из этих функций на противоположной бесконечности экспоненциально растет, если уравнения (2.1) не на спектре:

$$\begin{aligned}\rho_{\pm} &= a \exp(-x)[1 + O(x^{-N})], & x \rightarrow -\infty, \\ \tilde{\rho}_{\pm} &= a \exp(x)[1 + O(x^{-N})], & x \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

Константа a одна и та же в силу постоянства вронскиана и формул связи (2.3), (2.4); она определяется начальными данными и условием $W(\rho_{\pm}, \tilde{\rho}_{\pm}) = 2a$. После этого немедленно выписываются асимптотики

$$r_{\pm}(x) = \left(\frac{1}{a}\right) \exp(2x)[1 + O(x^{-N})], \quad x \rightarrow -\infty, \quad (2.7)$$

$$r_{\pm}(x) = a \exp(2x)[1 + O(x^{-N})], \quad x \rightarrow +\infty. \quad (2.8)$$

Рассматриваемое нами решение (0.1) представим в виде

$$\varphi(x, t) = \ln e^{-4t} \frac{\exp(-2s^+) r'_+(s^+) \exp(-2s^-) r'_-(s^-)}{[\exp(-2s^+) r_+(s^+) + \exp(-2s^-) r_-(s^-) e^{-4t}]^2}.$$

Отсюда получается требуемая асимптотика при $s^{\mp} \rightarrow \mp\infty$ вдоль характерных направлений $s^{\pm} = \text{const}$ с функциями

$$A_+(s^+) = \ln \left[\frac{\exp(2s^+) r'_+(s^+)}{a r_+^2(s^+)} \right], \quad (2.9)$$

$$A_-(s^-) = \ln \left[\frac{\exp(-2s^-) r'_-(s^-)}{a} \right]. \quad (2.10)$$

Формулы (2.9), (2.10) имеют место лишь для конкретного выбора пары $r_{\pm}(s^{\pm})$ (с условиями (2.7), (2.8)). Для другой пары, получаемой по преобразованию Бианки, эти соотношения будут другими. Однако, функции $A_{\pm}(s^{\pm})$ от выбора пары $r_{\pm}$ не зависят в силу единственности решения задачи Коши [17] и его асимптотического разложения.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Решение уравнения Лиувилля, стремящееся к 0 при $x \rightarrow \pm\infty$, однозначно определяется парой гладких функций $A_{\pm}(s^{\pm})$, которые обладают свойством (2.6).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения (2.9), (2.10) представляют собой дифференциальные уравнения для функций $1/r_{+}(x)$, $r_{-}(x)$. Будучи дополнены убывающими краевыми условиями из (2.8) и (2.7) соответственно, они однозначно определяют эти функции, а следовательно, и решение уравнения Лиувилля в форме (0.1). В полном объеме свойства (2.8), (2.7) для $r_{\pm}$ выполняются в силу согласования асимптоты (2.6).

Неопределенности в функциях $r_{\pm}$, связанные с преобразованием Бианки, здесь не видны, поскольку уравнения (2.9), (2.10) выведены для конкретных $r_{\pm}(x)$ с вполне определенной асимптотикой на бесконечности. При других краевых условиях на $r_{\pm}$ соотношения (2.9), (2.10) имеют другой вид и получаются другие функции $r_{\pm}(x)$. Однако, решение $\varphi(x, t)$ зависит только от пары $A_{\pm}(x)$. В самом деле, для любой $\varphi(x, t)$ представление (0.1) через пару $r_{\pm}$ с условиями (2.7), (2.8) однозначно определяется функциями $A_{\pm}(x)$ из уравнений (2.9), (2.10), как показано выше.

Таким образом, решение уравнения Лиувилля параметризуется парой функций $A_{\pm}(s^{\pm})$. Такую параметризацию можно записать в операторной форме

$$\varphi = \Phi[A_{+}, A_{-}] \equiv \ln \frac{r'_{+} r'_{-}}{(r_{+} + r_{-})^2}, \quad (2.11)$$

имея в виду, что $r_{\pm}$ определяются через $A_{\pm}$ из уравнений (2.7)–(2.10). Отметим, что условие (2.6) выделяет класс функций $A_{\pm}$ с согласованной асимптотикой, на котором определен оператор $\Phi[A_{+}, A_{-}]$.

3. Решение линеаризованного уравнения Лиувилля. Рассматривается задача Коши для линеаризованного уравнения

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + 8u \exp(\varphi) = f(s^{+}, s^{-}), \quad s^{\pm} = x \pm t, \quad (3.1)$$

$$u|_{t=0} = \psi_0(x), \quad \partial_t u|_{t=0} = \psi_1(x). \quad (3.2)$$

Решение выписывается через интегралы, и его можно проверить непосредственной подстановкой. Тем не менее, мы вкратце опишем путь, ведущий к этим ответам. Основой является формула для общего решения однородного уравнения

$$u(x, t) = \frac{j'_{+}(s^{+})}{r'_{+}(s^{+})} + \frac{j'_{-}(s^{-})}{r'_{-}(s^{-})} - 2 \frac{j_{+}(s^{+}) + j_{-}(s^{-})}{r(s^{+}, s^{-})}, \quad r = r_{+}(s^{+}) + r_{-}(s^{-}). \quad (3.3)$$

Эта формула получается вариацией общего решения уравнения Лиувилля (0.1) и содержит пару функциональных произволов $j_{\pm}(s^{\pm})$. Начальные условия (3.2) дают систему уравнений третьего порядка для функций $j_{\pm}(x)$. Эти уравнения легко интегрируются, в результате получается интегральное представление решения, похожее на формулу Даламбера

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\psi_0(s^{-}) + \psi_0(s^{+})] + \int_{s^{-}}^{s^{+}} [K_0(s^{+}, s^{-}, \sigma)\psi_0(\sigma) + K(s^{+}, s^{-}, \sigma, \sigma)\psi_1(\sigma)] d\sigma$$

($s^\pm = x \pm t$). Ядра выражаются через известные функции $r_\pm$. Одно из них имеет вид

$$K_0(s^+, s^-, \sigma) = \frac{1}{r(s_+, s_-)r^2(\sigma, \sigma)} \{ r_+(s^+)r_-(s^-)[r_+(\sigma) - r_-(\sigma)]' - [r_+(s^+) - r_-(s^-)][r_+(\sigma)r_-(\sigma)]' + r_+^2(\sigma)r'_-(\sigma) - r_-^2(\sigma)r'_+(\sigma) \}.$$

Другое будет выписано ниже при решении неоднородного уравнения.

ЛЕММА 3.1. *Решение неоднородного линеаризованного уравнения (3.1) с гладкой правой частью и с однородными начальными данными выписывается через интеграл по характеристическому конусу, который в конусных переменных имеет вид*

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{s^-}^{s^+} \int_{s^-}^{\sigma^+} K(s^+, s^-, \sigma^+, \sigma^-) f(\sigma^+, \sigma^-) d\sigma^- d\sigma^+, \quad s^\pm = x \pm t. \quad (3.4)$$

Ядро выражается через функции $r_\pm$, параметризующие решение исходного нелинейного уравнения,

$$K(s^+, s^-, \sigma^+, \sigma^-) = \frac{1}{r(s^+, s^-)r(\sigma^+, \sigma^-)} \left\{ r_+(s^+)r_-(s^-) + r_+(\sigma^+)r_-(\sigma^-) + \frac{1}{2}[r_+(s^+) - r_-(s^-)][r_+(\sigma^+) - r_-(\sigma^-)] \right\}. \quad (3.5)$$

Рассуждения, которые приводят к формуле (3.4), аналогичны методу вариации произвольных постоянных. Решение неоднородного уравнения строится в форме, похожей на (3.3),

$$u(x, t) = \frac{j'_+(s^+, t)}{r'_+(s^+)} + \frac{j'_-(s^-, t)}{r'_-(s^-)} - 2 \frac{j_+(s^+, t) + j_-(s^-, t)}{r(s^+, s^-)} \equiv U(s^+, s^-, t),$$

с парой функций $j_\pm(s^\pm, t)$, зависящих от двух переменных. Определение этих функций из уравнения (3.1) при дополнительном требовании $\partial_t U(s^+, s^-, t) = 0$ приводит к паре обыкновенных дифференциальных (по x) уравнений для $J(x, t) = \partial_t j_\pm(s^\pm, t)$, $s^\pm = x \pm t$. Эти уравнения совпадают с теми, что были в начальной задаче в частном случае $\psi_0 = 0$, $\psi_1 = f$. После их интегрирования и восстановления функций $j_\pm(s^\pm, t)$ из производных получается формула (3.4) в виде интеграла по характеристическому конусу.

Из полученных формул можно извлечь асимптотику решения $u(x, t)$ на бесконечности, исходя из заданной асимптотики правых частей. Проще всего строится частное быстроубывающее решение.

ЛЕММА 3.2. *Если правая часть уравнения (3.1) быстро убывает, т.е.*

$$f(s^+, s^-) = O((|s^+| + |s^-|)^{-N}), \quad |s^+| + |s^-| \rightarrow \infty, \quad \forall N,$$

то существует решение, которое также быстро убывает в верхней полуплоскости $t > 0$:

$$u(x, t) = O((|s^+| + |s^-|)^{-N}), \quad |s^+| + |s^-| \rightarrow \infty, \quad \forall N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Берем частное решение, представимое через интеграл по световому конусу с вершиной в точке s^+, s^- :

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{s^+} \int_{-\infty}^{s^-} K(s^+, s^-, \sigma^+, \sigma^-) f(\sigma^+, \sigma^-) d\sigma^- d\sigma^+. \quad (3.6)$$

Легко проверить, что если конус расположен в верхней полуплоскости $s^+ > s^-$, то в рассматриваемой области интегрирования $\{\sigma^+ > s^+, \sigma^- < s^-\}$ ядро $K(s^+, s^-, \sigma^+, \sigma^-)$ ограничено равномерно по всем переменным. Ввиду быстрого убывания подынтегральной функции интеграл (3.6) оценивается через $O(R^{-N})$, где R – расстояние от начала координат до конуса. Для конуса в верхней полуплоскости величина R имеет порядок расстояния до вершины $R = O(|s^+| + |s^-|)$. Тем самым лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. Если правая часть быстро убывает, т.е.

$$f(s^+, s^-) = O((|s^+| + |s^-|)^{-N}), \quad |s^+| + |s^-| \rightarrow \infty, \quad \forall N,$$

то решение уравнения (3.1) с однородными начальными условиями в своей асимптотике на бесконечности в характерных направлениях быстро выходит на пару простых волн:

$$u(x, t) = U_{\pm}(s^{\pm}) + O((s^{\mp})^{-N}), \quad s^{\mp} \rightarrow \mp\infty. \quad (3.7)$$

Эта асимптотика является равномерной в секторах $|s^{\pm}| < \mp\gamma s^{\mp}$ (при всех $\gamma = \text{const} > 0$), которые перекрываются при $\gamma > 1$. Функции $U_{\pm}(s^{\pm})$ имеют согласованную асимптотику на бесконечности

$$U_{\pm}(s) = \begin{cases} U_{\infty} + O(s^{-N}), & s \rightarrow \pm\infty, \quad U_{\infty} = \text{const}, \\ O(s^{-N}), & s \rightarrow \mp\infty. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из явной формулы (3.4), в которую подставляется ядро (3.5) и учитываются асимптотики (2.6), (2.7). При этом область интегрирования в виде характеристического конуса в асимптотическом пределе переходит в сектор. В результате получается требуемая асимптотика (3.7) с функциями

$$U_{\pm}(s^{\pm}) = \frac{1}{2} \int_{\mp\infty}^{s^{\pm}} d\sigma^{\pm} \int_{\mp\infty}^{\sigma^{\pm}} d\sigma^{\mp} K_{\pm}(s^{\pm}, \sigma^+, \sigma^-) f(\sigma^+, \sigma^-), \quad (3.8)$$

где ядра определяются формулами:

$$K_+ = \frac{1}{r(\sigma^+, \sigma^-)} \left\{ \frac{1}{2} [r_+(\sigma^+) - r_-(\sigma^-)] + \frac{r_+(\sigma^+) r_-(\sigma^-)}{r_+(s^+)} \right\}, \quad (3.9)$$

$$K_- = \frac{1}{r(\sigma^+, \sigma^-)} \left\{ \frac{1}{2} [r_+(\sigma^+) - r_-(\sigma^-)] + r_-(s^-) \right\}. \quad (3.10)$$

Константа U_{∞} выражается через интеграл по полуплоскости типа (3.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Формулы для ядер K, K_0 инвариантны относительно преобразования Бианки.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Функции $U_{\pm}$ определяются однозначно в силу единственности асимптотики и не зависят от выбора конкретной пары $r_{\pm}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Однако, представления (3.8)–(3.10) для функций $U_{\pm}$ получены для $r_{\pm}$ с определенной асимптотикой (2.7), (2.8). Эти представления не инвариантны; для другой пары $r_{\pm}$ формулы (3.9), (3.10) имеют другой вид в соответствии с преобразованием Бианки.

4. Построение главного члена ФАР. Исходная идея состоит в привлечении пары функций $A_{\pm}$ из асимптотики на бесконечности для параметризации решения уравнения Лиувилля. Представление главного члена ФАР через такое решение $\overset{0}{u} = \Phi[A_+, A_-]$ основано на формуле (2.11), в которой определяется оператор Φ .

Вторая идея происходит из метода двух масштабов: в параметрах $A_{\pm}$ допускается зависимость от медленного времени: $A_{\pm} = A_{\pm}(s^{\pm}, \tau)$, $\tau = \varepsilon t$. Для этой пары функций задаются начальные значения

$$A_{\pm}(s, 0) = A_{0,\pm}(s) \quad (4.1)$$

из требований выполнения исходных начальных условий (0.3) в главном члене ФАР. Функции $A_{0,\pm}(x)$ вычисляются через исходные данные $\psi_0(x), \psi_1(x)$ в соответствии с (2.9), (2.10).

Записанные в конусных переменных начальные функции $A_{0,\pm}(x \pm t)$ выглядят как простые волны и представляют собой существенную часть неубывающей при $t \rightarrow \infty$ асимптотики для невозмущенного решения Лиувилля. Для возмущенного решения их можно рассматривать как ростки главного члена ФАР на выходе из внутреннего слоя (при $t \gg 1$). Эффекты возмущения проявляются на этих волнах на далеких временах и могут быть обнаружены в виде медленной деформации их в масштабе $\tau = \varepsilon t$. Построение главного члена ФАР сводится к получению уравнений, которые описывают эволюцию по τ функций $A_{\pm}(s^{\pm}, \tau)$.

Уравнения для них получаются (как обычно в методе двухмасштабных разложений) из секулярного условия: поправка в ФАР мала: $\varepsilon \overset{1}{u} = o(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, равномерно вплоть до далеких времен $t = O(\varepsilon^{-1})$. Напомним, что поправки определяются из линеаризованных уравнений (1.4), в которых медленная переменная τ входит в качестве параметра. В уравнении для первой поправки правая часть выражается по формуле

$$\overset{1}{f}(x, t, \tau) = F[\overset{0}{u}] - 2\partial_{\tau}\partial_t\overset{0}{u}$$

и ввиду неубывающей асимптотики главного члена $\overset{0}{u}$, вообще говоря, не убывает на бесконечности в характерных направлениях при $s^{\pm} \rightarrow \pm\infty$. Поскольку решение линеаризованного уравнения выражается через интеграл по конусу от правой части, то из формулы (3.4) нетрудно усмотреть, что функция $\overset{1}{u}(x, t, \tau)$ может линейно расти в тех же направлениях при $s^{\pm} \rightarrow \pm\infty$. Из-за этого на далеких временах $t \approx \varepsilon^{-1}$ поправка $\varepsilon \overset{1}{u}$ оказывается порядка единицы, что сравнимо с существенной частью главного члена ФАР. Исключение таких секулярностей возможно за счет неопределенностей в параметрах $A_{\pm}$, остающихся пока при $\tau > 0$. Для этого в правой части $\overset{1}{f}$ следует выделить

и приравнять к нулю неубывающие члены асимптотики. Таким образом получаются уравнения, в общем случае нелинейные, структура которых определяется возмущением

$$\pm 2\partial_\tau \partial_s A_\pm = F[-4t + A_\pm]. \quad (4.2)$$

В постановке задачи для функций $A_\pm$ используются условия на бесконечности, которые получаются из соображений согласования с асимптотикой невозмущенного решения (2.6):

$$A_\pm(s^\pm, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при } s^\pm \rightarrow \mp\infty. \quad (4.3)$$

В случае возмущений вида (0.4) соотношения (4.2) можно проинтегрировать по s . С учетом условий (4.3) получаются уравнения первого порядка

$$\pm 2\partial_\tau A_\pm = H_\pm(\partial_s A_\pm) \quad (4.4)$$

с функциями $H_\pm(B) = F_1(B, -4 \pm B) - F_1(0, -4) \pm F_2(B, -4 \pm B) \mp F_2(0, -4)$.

ЛЕММА 4.1. 1. Если оператор возмущения имеет вид (0.4), то уравнения медленных деформаций (4.2) с условиями (4.1), (4.3) имеют единственное решение в классе гладких функций на некотором промежутке (локально в медленном времени) $\tau \in [0, \tau_0]$. 2. При этом главный член ФАР определяется через решение Лиувилля (2.11), зависящее от параметра $\tau \in [0, \tau_0]$. 3. Первая поправка $\overset{1}{u}$, определяемая из уравнения (1.4), будет ограничена равномерно по x, t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Локальная разрешимость задачи Коши (4.1), (4.4) не вызывает сомнения. Это обеспечивает однозначное определение функций $A_\pm(s^\pm, \tau)$ на некотором конечном промежутке по τ .

Начальные данные (4.1) быстро стабилизируются на бесконечности при $s^\pm \rightarrow \pm\infty$ согласно (2.6). Поэтому решения также стабилизируются, причем к той же самой константе, так как в уравнении (4.2) сохраняется интеграл

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} A_\pm(s, \tau) = \pm \int_{-\infty}^{\infty} \partial_s A_\pm(s, \tau) ds = -\ln a^2.$$

Структура быстро убывающих остатков сохраняется в решениях уравнений первого порядка $A_\pm(s, \tau) = -\ln a^2 + O(s^{-N})$, $s \rightarrow \pm\infty$, поскольку они сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям вдоль характеристик. Это свойство обеспечивает выполнение условия (2.6) при $\tau > 0$. Следовательно, полученная пара $A_\pm(s^\pm, \tau)$ при всех значениях параметра $\tau \in [0, \tau_0]$ определяет решение уравнения Лиувилля, которое берется в качестве главного члена $\overset{0}{u}$.

Вычисленная по $\overset{0}{u}$ правая часть $\overset{1}{f}$ убывает при $|x| + t \rightarrow \infty$ равномерно по τ в силу условий (4.2). Тогда согласно лемме 3.3 линеаризованная задача для поправки имеет ограниченное решение.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Построенное таким способом ФАР $U_1 = \overset{0}{u} + \varepsilon \overset{1}{u}$ дает в уравнениях (0.2), (0.3) невязку порядка $O(\varepsilon^2)$ равномерно по $0 < t \leq \tau_0 \varepsilon^{-1}$.

Объединяя доказанные утверждения, получаем

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть оператор возмущения имеет вид (0.4), а начальные данные в (0.3) таковы, что уравнения (2.1) не находятся на спектре. Тогда в задаче о возмущении уравнения Лиувилля (0.2), (0.3) главный член ФАР определяется формулой (0.1) в которой параметры $r_{\pm}(s^{\pm}, \varepsilon t)$ зависят от двух переменных. Зависимость их от медленного времени находится из уравнений (4.1)–(4.3) посредством формул (2.8)–(2.11).

5. Построение поправок в ФАР. Метод двухмасштабных разложений в задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений зачастую позволяет получить полное асимптотическое разложение решения в виде бесконечных рядов. Перенос тех же идей на уравнения в частных производных обеспечивает получение главного члена и иногда первых поправок. В старших поправках метод двух масштабов может оказаться непригодным. Проанализируем этот подход для нашей задачи (0.2), (0.3).

Рекуррентная система уравнений (1.4) определяет поправки $\overset{n}{u}$ через главный член. Если последний параметризован парой функций $A_{\pm}$ в форме (2.11), то эти параметры естественно использовать и для поправок. Таковую параметризацию можно записать в операторной форме

$$\overset{n}{u} = \overset{n}{U}[A_+, A_-], \quad (5.1)$$

если указать способ выделения решения линеаризованного уравнения (1.4), т. е. определить операторы $\overset{n}{U}$. Мы будем использовать для поправок формулу (3.6). Таким образом, приходим к формальному решению

$$u(x, t; \varepsilon) \approx \Phi[A_+, A_-] + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \overset{n}{U}[A_+, A_-], \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.2)$$

Важно отметить, что конструирование ФАР в виде отрезка этого ряда возможно до тех пор, пока решение Лиувилля, взятое в качестве главного члена, выражается через $A_{\pm}$, т. е. при выполнении условий согласования в асимптотиках (2.6).

Для построения ФАР порядка N , пригодного вплоть до далеких времен $t \approx \varepsilon^{-1}$, требуется исключить секулярности в соответствующих поправках. Для этого на каждом шаге следует предусмотреть произволы в виде неопределенной пока зависимости от медленного времени τ . Разные варианты двухмасштабных методов дают разные рецепты решения этой проблемы. Наиболее общим является подход Крылова–Боголюбова, основу которого составляет асимптотическое разложение для параметров главного члена

$$A_{\pm}(s^{\pm}, \tau; \varepsilon) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \overset{n}{A}_{\pm}(s^{\pm}, \tau), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.3)$$

В таком подходе дело сводится к нахождению коэффициентов этого разложения $\overset{n}{A}_{\pm}(s^{\pm}, \tau)$ как функций двух переменных. Остается выписать уравнения и начальные условия для них.

Чтобы исключить секулярности сразу из всех поправок, достаточно потребовать

$$\pm 2\partial_{\tau} \partial_s A_{\pm} - \mathbf{F}_{\pm}[A_{\pm}] + \varepsilon \partial_{\tau}^2 A_{\pm} = 0. \quad (5.4)$$

Операторы $F_{\pm}$ здесь определяются через возмущение

$$\mathbf{F}_{\pm}[A(s^{\pm}, \tau)] = \mathbf{F}[-4t + A(x \pm t, \varepsilon t)]$$

с учетом замены производных: $\partial_t \Rightarrow \pm \partial_s + \varepsilon \partial_{\tau}$, $\partial_x \Rightarrow \partial_s$. Нетрудно проверить, что требования (5.4) обеспечивают разрешимость рекуррентной системы линейаризованных уравнений (1.4) в классе убывающих функций. Получаемые приближения записываются в параметрической форме (5.1) через известные операторы $\overset{n}{U}$. Сами параметры $A_{\pm}$ остаются пока неопределенными.

Убывающие на бесконечности поправки $\overset{n}{u}$ дают невязки в начальные уравнения (0.3). Эти невязки будем компенсировать за счет выбора начальных значений для главного члена ФАР. Попросту говоря, выполнение начальных условий (0.3) требуется от полного ФАР (5.2), так что начальные уравнения (0.3) переходят в пару начальных условий для функций $A_{\pm}(x \pm t, \tau; \varepsilon)$:

$$\Phi[A_+, A_-] + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \overset{n}{U}[A_+, A_-] \approx \psi_0(x) \quad \text{при } t = \tau = 0, \quad (5.5)$$

$$[\partial_t + \varepsilon \partial_{\tau}] \left(\Phi[A_+, A_-] + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \overset{n}{U}[A_+, A_-] \right) \approx \psi_1(x) \quad \text{при } t = \tau = 0. \quad (5.6)$$

Описанный подход напоминает известный метод погранслоя в интерпретации [18, с. 31] с той разницей, что внешнее разложение (5.3) связывается с погранслоем посредством нелинейных операторов в (5.5), (5.6).

Таким образом, исходная задача (0.2), (0.3) сведена к системе (5.4) с условиями (5.5), (5.6). В постановке задачи для функций $A_{\pm}$ используются также условия на бесконечности, которые получаются из соображений согласования с асимптотикой невозмущенного решения (2.5):

$$A_{\pm}(s^{\pm}, \tau; \varepsilon) \rightarrow 0, \quad s^{\pm} \rightarrow \mp \infty. \quad (5.7)$$

Полученные уравнения (5.4)–(5.7) описывают медленную деформацию параметров $A_{\pm}(s^{\pm}, \tau; \varepsilon)$. Они содержат малый параметр ε и могут решаться в асимптотическом приближении. Проблема лишь в выполнении дополнительных условий (2.6), необходимых для представления решения Лиувилля через $A_{\pm}$. Оказывается, что эти условия можно гарантировать на первых шагах при дополнительных ограничениях на возмущение.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть оператор возмущения имеет вид (0.4) с $F_2 \equiv 0$, и начальные функции в (0.3) таковы, что уравнения (2.1) не находятся на спектре. Тогда в задаче о возмущении уравнения Лиувилля (0.2), (0.3) метод двухмасштабных разложений дает ФАР порядка $N = 2$ в виде отрезков рядов (1.1), (1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если для задачи (5.5)–(5.7) строить ФАР в форме (5.3), то для коэффициентов $\overset{n}{A}_{\pm}(s^{\pm}, \tau)$ получается рекуррентная система дифференциальных уравнений с начальными условиями при $\tau = 0$ и краевыми условиями на бесконечности при $s^{\pm} \rightarrow \mp \infty$.

На исходном шаге $n = 0$ приходим к рассмотренной ранее задаче (4.1)–(4.3). Разрешимость ее на некотором достаточно малом промежутке $\tau \in [0, \tau_0]$ установлена в лемме 4.1.

Для следующих приближений $\overset{n}{A}_{\pm}(s, \tau)$ получаются линеаризованные уравнения

$$\pm 2\partial_{\tau}\overset{n}{A}_{\pm} - \delta H_{\pm}(\partial_s\overset{0}{A}_{\pm})\partial_s\overset{n}{A}_{\pm} = \overset{n}{g}_{\pm}(s, \tau). \quad (5.8)$$

Правые части вычисляются через предыдущие приближения; например, на первом шаге

$$\overset{1}{g}_{\pm} = \partial_w F_1(v, w)\partial_{\tau}\overset{0}{A}_{\pm} - \int_{\mp\infty}^s \partial_{\tau}^2\overset{0}{A}_{\pm}(\eta, \tau) d\eta$$

при $v = \partial_s\overset{0}{A}_{\pm}$, $w = -4 \pm \partial_s\overset{0}{A}_{\pm}$.

Уравнения дополняются начальными данными

$$\overset{n}{A}_{\pm}(s, 0) = \overset{n}{A}_{\pm,0}(s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad (5.9)$$

которые также определяются рекуррентными формулами. Например, на первом шаге функции $\overset{1}{A}_{\pm,0}$ вычисляются через значения первой поправки $\overset{1}{u}(x, t, \tau)$ и ее производные при $t = \tau = 0$. Линейные задачи (5.8), (5.9) разрешимы на том же промежутке $\tau \in [0, \tau_0]$.

На первом шаге правые части в дифференциальных уравнениях (5.9) имеют согласованную асимптотику $\overset{1}{g}_{\pm}(s, \tau) = O(s^{-N})$ при $s^{\pm} \rightarrow \pm\infty$, поскольку в силу уравнения для главного члена (4.2) и с учетом стабилизации на бесконечности функций $\partial_s\overset{0}{A}_{\pm} = O(s^{-N})$ обращается в нуль интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_{\tau}^2\overset{0}{A}_{\pm}(s, \tau) ds = \int_{-\infty}^{\infty} [H'_{\pm}(\partial_s\overset{0}{A}_{\pm})]^2 \partial_s^2\overset{0}{A}_{\pm}(s, \tau) ds = 0.$$

Поэтому решения уравнений (5.9) с согласованными начальными данными будут иметь согласованную асимптотику при $s^{\pm} \rightarrow \pm\infty$, так что для $\overset{1}{A}_{\pm}$ выполняется свойство (2.6). Тем самым оправдана конструкция ФАР (5.2) на первых двух шагах. Функция

$$U_2(x, t; \varepsilon) = \Phi[A_+, A_-] + \varepsilon \overset{1}{U}[A_+, A_-] + \varepsilon^2 \overset{2}{U}[A_+, A_-]$$

определена при $A_{\pm} = \overset{0}{A}_{\pm}(s^{\pm}, \tau) + \varepsilon \overset{1}{A}_{\pm}(s^{\pm}, \tau)$, $\tau = \varepsilon t$, $s^{\pm} = x \pm t$, и дает невязки в уравнениях (0.2), (0.3) порядка $O(\varepsilon^3)$ равномерно при $0 < t \leq \tau_0 \varepsilon^{-1}$.

Переход к ФАР в форме (1.1)–(1.3) не представляет проблемы ввиду тривиальности уравнений (2.9), (2.10), связывающих $A_{\pm}$ с парой $r_{\pm}$. Теорема доказана.

На следующих шагах свойство согласования в асимптотиках (2.6) может нарушаться; метод двух масштабов становится неэффективным.

6. Заключение. Использованный выше метод двухмасштабных разложений весьма популярен и иногда позволяет получить полное асимптотическое разложение решения в виде бесконечных рядов. Однако, для уравнений в частных производных, как правило, возникают непреодолимые трудности при нахождении старших поправок, см. например, [11] (если только не строить специальные ФАР [8]–[10]). Возникающие проблемы связаны с существом дела: в разных областях пространственно-временных переменных решение имеет разную асимптотическую структуру и зависит от разных быстрых и медленных переменных. В таких ситуациях подходящей альтернативой является метод согласования асимптотических разложений [18]. Однако, он довольно громоздок и при вычислении главного члена ФАР не дает преимуществ.

Поясним это на рассмотренной задаче. Ввиду леммы 2.1 вся информация о главном члене ФАР на далеких временах $t \gg 1$ содержится в паре функций $A_{\pm}(s^{\pm}, \varepsilon t)$. Поэтому при $t \gg 1$ нет нужды использовать формулу (0.1), и асимптотическое решение можно представить как сумму асимптотик по разным областям за вычетом их общей части $-\ln a^2$ в виде: $u(x, t, \varepsilon) \approx -4t + \ln a^2 + A_{+}(s^{+}, \tau) + A_{-}(s^{-}, \tau)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, при $1 \ll t \leq O(\varepsilon^{-1})$. Эта формула представляет собой главный член ФАР для волнового уравнения (в которое переходит исходное уравнение (0.2) при $t \gg 1$) с учетом возмущения. Решение Лиувилля в форме (2.11) используется здесь при $\tau = 0$ лишь постольку, поскольку для $A_{\pm}(s^{\pm}, \tau)$ требуются начальные условия. Однако, на временах не слишком больших $0 < t \ll O(\varepsilon^{-1})$ именно выражение (2.11) дает главный член ФАР. При этом параметры $A_{\pm}$ можно взять фиксированными (при $\tau = 0$), т. е. использовать решение невозмущенного уравнения. Такое представление асимптотического решения в разной форме для разных областей соответствует методу согласования; в рассмотренной ситуации оно выглядит излишним.

Преимущество этого подхода обнаруживается либо на следующих шагах при вычислении поправок, либо в случае недивергентных возмущений. В общей ситуации из-за деформации параметров может нарушаться условие согласования асимптотик (2.6) при $\tau > 0$. В таком случае главный член ФАР не представляется через решение Лиувилля. Но на далеких временах такое представление не нужно, поскольку сами функции $A_{\pm}(s^{\pm}, \tau)$ определяют главный член ФАР. Согласование с решением Лиувилля в области не слишком больших времен получается в силу выбора начальных данных $A_{\pm}(s^{\pm}, 0)$.

Следует указать, что в общей ситуации возмущение влияет не только на медленную деформацию быстрых волн $A_{\pm}(s, \tau)$. Рассогласование асимптотик при $s^{\pm} \rightarrow \pm\infty$ свидетельствует о влиянии возмущения в секторе “хвостов” между расходящимися волнами, где $s^{+} \gg 1$, $s^{-} \ll -1$. В этой области ФАР представляется функцией двух медленных переменных $\xi = \varepsilon x$, $\tau = \varepsilon t$. Похожая проблема для случая слабо нелинейных гиперболических систем была исследована автором в [19]. Детальная реализация метода согласования для задачи (0.2), (0.3) выходит за рамки данной статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Калякин Л. А. Длинноволновые асимптотики. Интегрируемые уравнения как асимптотический предел нелинейных систем // УМН. 1989. Т. 44. № 1. С. 3–34.
- [2] Карпман В. И., Маслов Е. М. Теория возмущений для солитонов // ЖЭТФ. 1977. Т. 73. № 8. С. 538–559.
- [3] Keener J. P., Mc-Loughlin D. W. Solitons under perturbations // Phys. Rev. A. 1978. V. 18. № 4. P. 1652–1680.

- [4] Маслов Е. М. К теории возмущений для солитонов во втором приближении // Теорет. и матем. физика. 1980. Т. 42. № 3. С. 362–370.
- [5] Кричевер И. М. Гессианы интегралов уравнения Кортевега–де Фриза и возмущение конечнозонных решений // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 6. С. 1312–1316.
- [6] Ньюэлл А. Обратное преобразование рассеяния // Солитоны / ред. Р. Буллаф, Ф. Кодри. М.: Мир, 1983. С. 193–269.
- [7] Dobrohotov S. Yu., Maslov V. P. Multiphase asymptotics of nonlinear partial differential equations with a small parameter // Sov. Sci. Rev. V. 3, 1988. P. 221–311.
- [8] Маслов В. П., Омелянов Г. А. Об условиях типа Гюгонио для бесконечно узких решений уравнения простых волн // Сиб. матем. ж. 1983. Т. 24. С. 172–182.
- [9] Маслов В. П., Омелянов Г. А. Солитонобразные асимптотики внутренних волн в стратифицированной жидкости с малой дисперсией // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 10. С. 1766–1775.
- [10] Маслов В. П. Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1987.
- [11] Калякин Л. А. Возмущение солитона Кортевега–де Фриза // Теорет. и матем. физика. 1992. Т. 92. № 1. С. 62–76.
- [12] Погребков А. К., Поливанов М. К. Теория поля Лиувилля // Тр. МИАН. 1987. Т. 176. С. 86–96.
- [13] Джорджадзе Г. П., Погребков А. К., Поливанов М. К. Сингулярные решения уравнения $\square\varphi + (m^2/2) \exp \varphi = 0$ и динамика особенностей // Теоретич. и матем. физика. 1979. Т. 40. № 2. С. 221–234.
- [14] Liouville J. Sur l'équation aux différences partielles $\partial^2 \ln \lambda / \partial u \partial v \pm \lambda^2 q = 0$ // J. Math. Pure et Appl. 1853. V. 18. P. 71–74.
- [15] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
- [16] Bianchi L. // Ann. Sci. Norm. Super. Piza Ser. 1. 1879. V. 26. № 2.
- [17] Погребков А. К. О глобальных решениях задачи Коши для уравнения Лиувилля $\varphi_{tt} - \varphi_{xx} = -1/2m^2 \exp \varphi$ в случае сингулярных начальных данных // Докл. АН СССР. 1979. Т. 244. № 4. С. 873–876.
- [18] Ильин А. М. Метод согласования асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
- [19] Калякин Л. А. Длинноволновая асимптотика решения гиперболической системы уравнений // Матем. сб. 1984. Т. 124. № 1. С. 96–120.