Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Медных, Дискретные аналоги теорем Фаркаша и Акколы о гиперэллиптичности накрытий над римановой поверхностью рода два, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 1, 70–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9381>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 04:48:41

Дискретные аналоги теорем Фаркаша и Акколы о гиперэллиптичности накрытий над римановой поверхностью рода два

И. А. Медных

Цель настоящей работы установить дискретные версии теорем Акколы и Фаркаша о гиперэллиптичности накрытий над римановой поверхностью рода два.

Библиография: 17 названий.

DOI: 10.4213/mzm9381

1. Введение. Теория римановых поверхностей возникла в классических работах Римана и Гурвица в конце 19 – начале 20 веков. Первоначальное определение римановой поверхности давалось в терминах разветвленных накрытий над расширенной комплексной плоскостью (сферой Римана). Важным классом поверхностей являются *гиперэллиптические поверхности*, которые определяются как двулистные разветвленные накрытия сферы Римана.

Хорошо известно, что любая поверхность рода два гиперэллипична. Теорема Фаркаша [1] и Акколы [2] утверждает, что двулистное неразветвленное накрытие поверхности рода два также является гиперэллиптической поверхностью. Этот результат был известен, по-видимому, еще Енрике [3]. Позже, теорема Фаркаша и Акколы была передоказана в работе [4]. Трехмерный аналог этой теоремы для двулистных накрытий ориентируемого многообразия хегорова рода два получен в [5]. В более поздней работе Акколы [6] показано, что нерегулярное трехлистное накрытие римановой поверхности рода два также является гиперэллиптической поверхностью, в то время как ее регулярное трехлистное накрытие двулистно покрывает тор. Трехмерная версия второй теоремы Акколы была установлена в [7].

В последнее десятилетие появилось множество работ различных авторов [8]–[11], посвященных дискретным версиям теории римановых поверхностей. Роль римановых поверхностей в этих теориях играют конечные графы, а в качестве голоморфных отображений выступают гармонические отображения. Для них построена теория якобиевых многообразий и доказаны аналоги теоремы Римана–Роха. Многие другие теоремы классической теории римановых поверхностей также получили свое воплощение в дискретном случае. Дискретная теория нашла эффективные при-

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00210), Совета по грантам президента РФ (грант № МК-4447.2012.1), государственной поддержке ведущих научных школ (грант № НШ-921.2012.1) и Фонда Дмитрия Зимина “Династия”.

менения в теории кодирования, стохастической теории и финансовой математике. Библиографию по этому вопросу можно найти в [11].

Основным объектом изучения данной работы являются графы и их накрытия. *Графом* называется связный конечный мультиграф без петель. В дальнейшем будем считать, что граф не содержит ребер, удаление которых разбивает его на две связных компоненты. *Родом* графа будем называть ранг его фундаментальной группы. Граф называется *гиперэллиптическим*, если он является двулистным разветвленным накрытием дерева. Отметим, что граф рода два всегда гиперэллиптический [11].

Цель настоящей работы установить дискретные версии теорем Фаркаша и Акколы для графов. Будет установлено, что любое двулистное неразветвленное накрытие графа рода два является гиперэллиптическим. Далее, будет показано, что нерегулярное трехлистное накрытие графа рода два также является гиперэллиптическим графом, в то время как его регулярное трехлистное накрытие двулистно накрывает граф рода один.

2. Предварительные сведения. В данной работе *римановой поверхностью* называется одномерное связное компактное комплексное многообразие. *Графом* G будем называть связный конечный мультиграф без петель. Обозначим через $V(G)$ и $E(G)$ множество вершин и ребер графа G соответственно. *Родом* графа G называется величина

$$g(G) = |E(G)| - |V(G)| + 1,$$

где $|X|$ означает число элементов множества X . Такое определение не совпадает с традиционным определением “рода” графа, которое означает минимальный род поверхности, в которую данный граф вкладывается.

Введенная нами характеристика $g(G)$ совпадает с рангом первой группы гомологий G и называется также *числом Бетти* графа G . Некоторые авторы называют величину $g(G)$ *цикломатическим числом*. Эйлерова характеристика $\chi(G) = |V(G)| - |E(G)|$ графа G связана с числом $g(G)$ по формуле $\chi(G) = 1 - g(G)$. Напомним, что в теории римановых поверхностей связь между эйлеровой характеристикой $\chi(S)$ и родом $g(S)$ поверхности S задается формулой $\chi(S) = 2 - 2g(S)$. Это подчеркивает определенную аналогию между теорией графов и теорией римановых поверхностей. Мостом графа G называется ребро, удаление которого увеличивает число компонент связности G . Граф G называется *2-реберно-связным*, если он не содержит мостов. Все основные результаты настоящей работы будут установлены для 2-реберно-связных графов.

Пусть G и G' графы. Отображение

$$\phi: V(G) \cup E(G) \rightarrow V(G') \cup E(G')$$

называется *морфизмом* G в G' , если $\phi(V(G)) \subseteq V(G')$, а для любых $x \in V(G)$ и $e \in E(G)$ таких, что x инцидентна e и либо $\phi(e) \in E(G')$ и $\phi(x)$ инцидентна $\phi(e)$, либо $\phi(e) = \phi(x)$. Для краткости в этом случае будем писать $\phi: G \rightarrow G'$. Если, кроме того, $\phi(E(G)) \subseteq E(G')$, то ϕ называется *гомоморфизмом*. Далее, биективный гомоморфизм называется *изоморфизмом*, а изоморфизм $\phi: G \rightarrow G$ называется *автоморфизмом*.

Введем важное определение, необходимое нам в дальнейшем. Морфизм $\phi: G \rightarrow G'$ называется *гармоническим морфизмом* (или разветвленным накрытием), если

для всех $x \in V(G)$ и всех $y \in V(G')$ таких, что $y = \phi(x)$, величина

$$|\{e \in E(G) : x \in e, \phi(e) = e'\}|$$

одна и также для всех ребер $e' \in E(G')$, инцидентных y . Это определение, с незначительными модификациями, было введено ранее в [12].

Важным частным случаем гармонического морфизма является (неразветвленное) накрытие. В этом случае морфизм ϕ предполагается локально биективным. То есть, для любой вершины $x \in V(G)$ отображение ϕ взаимнооднозначно отображает окрестность $N_G(x)$ на окрестность $N_{G'}(\phi(x))$, где $N_G(x)$ состоит из вершины x и инцидентных ей ребер графа G . Топологический аналог этого определения будет приведен в следующем разделе. Важно отметить, что неразветвленное накрытие всегда переводит ребра в ребра, а вершины – в вершины.

Пусть Γ – конечная группа, действующая на графе G . Обозначим через $\gamma(x)$ результат действия элемента $\gamma \in \Gamma$ на элемент x из объединения $E(G) \cup V(G)$. Определим фактор-граф G/Γ и каноническое отображение $\pi_\Gamma : G \rightarrow G/\Gamma$ по правилам, описанным ниже. Введем отношение эквивалентности для любых $x, y \in E(G) \cup V(G)$, полагая $x \sim y$, если существует $\gamma \in \Gamma$ такое, что $\gamma(x) = y$. Вершинами фактор-графа $V(G/\Gamma)$ назовем классы эквивалентности множества $V(G)$. Ребра фактор-графа $V(G/\Gamma)$ соответствуют тем классам эквивалентности множества $E(G)$, которые состоят из ребер, чьи концы неэквивалентны. Нетрудно убедиться, что множество G/Γ является графом в указанном выше смысле. Каноническое отображение $\pi_\Gamma : G \rightarrow G/\Gamma$ переводит каждую вершину G в ее класс эквивалентности, каждое ребро G с неэквивалентными концами – в его класс эквивалентности, и каждое ребро G с эквивалентными концами – в класс эквивалентности его концов. Нетрудно убедиться, что каноническое отображение является сюръективным морфизмом графов [11].

Рис. 1. Гиперэллиптический граф G рода два

Граф называют *гиперэллиптическим*, если он представляется как разветвленное двулистное накрытие дерева. Это эквивалентно тому, что на графе существует инволюция τ такая, что фактор-граф G/τ является деревом. Указанная инволюция называется гиперэллиптической инволюцией графа G (см. рис. 1). Известно, что если гиперэллиптическая инволюция существует, то она единственна. Это утверждение справедливо для 2-реберно-связных графов, род которых больше 1. Граф рода 2 всегда является гиперэллиптическим [11]. Это хорошо согласуется с известным фактом, что риманова поверхность рода 2 всегда гиперэллиптическая.

3. Накрытия и поднятие гомеоморфизмов. В дальнейшем нам потребуются несколько фактов из теории накрывающих пространств. Все необходимые сведения можно найти в [13]. Пусть X и $\tilde{X}$ линейно связные и локально линейные связные топологические пространства. Непрерывное отображение $p: \tilde{X} \rightarrow X$ называется *накрытием*, если на пространстве X существует открытое покрытие $\{U_\xi\}$, $\xi \in I$ такое, что для любого $\xi \in I$ прообраз $p^{-1}(U_\xi)$ является дизъюнктным объединением открытых в $\tilde{X}$ множеств, каждое из которых гомеоморфно отображается p на U_ξ .

Обозначим через (X, x_0) пару, состоящую из пространства X и выделенной из него точки x_0 . Введем обозначение $\pi_1(X, x_0)$ для фундаментальной группы X в точке x_0 . Хорошо известны следующие свойства накрытий [13; с. 61–62].

Пусть $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ – накрытие $\tilde{X} \rightarrow X$, переводящее точку $\tilde{x}_0$ в точку x_0 . Тогда

- 1°) отображение $p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$, индуцированное накрытием p , инъективно;
- 2°) число листов накрытия $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ совпадает с индексом подгруппы $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ в группе $\pi_1(X, x_0)$;
- 3°) пусть Y линейно связное и локально линейно связное топологическое пространство, а $f: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ непрерывное отображение; тогда существует поднятие $\tilde{f}: (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ отображения f по накрытию p , т.е. $f = p \circ \tilde{f}$ тогда и только тогда, когда $f_*\pi_1(Y, y_0) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$; указанное поднятие всегда единственно.

Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ – накрытие, а $f: X \rightarrow X$ – гомеоморфизм пространства X . Отображение $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ называется *поднятием* f на $\tilde{X}$ по отображению p , если выполнено соотношение $p \circ \tilde{f} = f \circ p$. Пользуясь свойством 3°, установим критерий поднятия гомеоморфизма пространства X до гомеоморфизма $\tilde{X}$. Справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть α – гомеоморфизм пространства X , переводящий точку x_0 в точку x_1 , а $\tilde{x}_0$ и $\tilde{x}_1$ точки $\tilde{X}$ такие, что $p(\tilde{x}_0) = x_0$ и $p(\tilde{x}_1) = x_1$. Тогда α однозначно поднимается до гомеоморфизма $\tilde{\alpha}: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_1)$, в том и только том случае, если выполнено равенство $\alpha_*(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $p_\alpha = \alpha^{-1} \circ p$, которое действует из $(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ в (X, x_0) . Поскольку α – гомеоморфизм, это отображение является накрытием. Пользуясь п. 3°, покажем, что отображение $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ однозначно поднимается по накрытию p_α до некоторого непрерывного отображения $\tilde{\alpha}: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. Действительно, для этого достаточно проверить включение $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \subset p_{\alpha*}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. По условию имеем $\alpha_*(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. Так как α – гомеоморфизм, то $(\alpha_*)^{-1} = (\alpha^{-1})_*$. Отсюда

$$\begin{aligned} p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) &= (\alpha_*)^{-1}\alpha_*(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = (\alpha_*)^{-1}p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) \\ &= (\alpha^{-1} \circ p)_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = p_{\alpha*}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1). \end{aligned}$$

В частности, тождественный гомеоморфизм X поднимается до тождественного гомеоморфизма $\tilde{X}$, а отображение $\beta = \alpha^{-1}$ поднимается до непрерывного отображения $\tilde{\beta}$ такого, что $\tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta} = \tilde{\beta} \circ \tilde{\alpha} = Id_{\tilde{X}}$. Отсюда $\tilde{\alpha}$ – гомеоморфизм пространства $\tilde{X}$.

Обратное утверждение следует из гомеоморфности $\tilde{\alpha}$ и инъективности p_* .

4. Элементы топологической теории графов. С каждым связным графом G ассоциируем топологическое пространство, которое будем обозначать также G . Если граф конечен, то топологию можно ввести естественным образом ([14; с. 206]). При этом G является линейно связным и локально линейно связным, а следовательно, для него справедливы все приведенные выше утверждения.

Путь из ребер в графе G назовем конечную последовательность ориентированных ребер $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, $n \geq 1$, в которой конечная вершина ребра e_{i-1} служит начальной вершиной ребра e_i для $1 < i \leq n$. Путь $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ называется *приведенным*, если ни для какого числа $i = 2, 3, \dots, n$ ребра e_{i-1} и e_i не представляют одно и то же ребро с противоположными ориентациями.

В дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать лишь приведенные пути и, если не оговорено противное, будем считать, что все пути приведены. Если $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ – путь из ребер, то начальная вершина ребра e_1 называется *начальной вершиной* пути, а конечная вершина ребра e_n – *конечной вершиной* пути. Путь из ребер называется *замкнутым*, если его начальная и конечная вершины совпадают. Замкнутый путь из ребер называется *петлей*, а петля, не имеющая самопересечений, называется *циклом*.

Пусть G – связный граф, v_0 – его вершина и T – максимальное дерево в G , содержащее v_0 . Обозначим через $\{t_i\}_{i \in I}$ множество ребер графа G , не содержащихся в T . Для каждого из ребер t_i выберем определенную ориентацию и обозначим через a_i и b_i начальную и конечную вершины ребра t_i . Каждому ребру t_i сопоставим элемент $x_i \in \pi_1(G, v_0)$ по следующему правилу. В графе T существует единственный приведенный путь из ребер A_i , соединяющий v_0 с a_i , и единственный путь из ребер B_i , соединяющий b_i с v_0 . Тогда x_i – класс эквивалентности, определенный путем из ребер (A_i, t_i, B_i) . Если $a_i = v_0$, опускаем A_i , аналогично, если $b_i = v_0$, опускаем B_i . Хорошо известен следующий факт. Фундаментальная группа графа $\pi_1(G, v_0)$ свободно порождается образующими $\{x_i\}_{i \in I}$. При этом, если G – конечный граф рода g , то I состоит из g элементов и ранг свободной группы $\pi_1(G, v_0)$ равен g .

Нам потребуются следующая лемма, характеризующая действие гиперэллиптической инволюции на графе G .

Обозначим через $\mathbf{H}_1(G)$ и $\mathbf{H}^1(G)$ группы целочисленных гомологий и когомологий графа G соответственно. Для любого $\alpha \in \text{Aut}(G)$ рассмотрим его индуцированные действия $\alpha_\#$ и $\alpha^\#$ на указанных группах.

ЛЕММА 1. Пусть G – произвольный 2-реберно-связный граф рода $g \geq 2$ и $\tau \in \text{Aut}(G)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) G – гиперэллиптический граф с гиперэллиптической инволюцией τ ;
- (2) $\tau^\# : \mathbf{H}^1(G) \rightarrow \mathbf{H}^1(G)$ действует как умножение на -1 ;
- (3) $\tau_\# : \mathbf{H}_1(G) \rightarrow \mathbf{H}_1(G)$ действует как умножение на -1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность утверждений (1) и (2) была показана в [11]. Покажем, что (2) и (3) также эквивалентны. Определим двойственность между пространствами $X = \mathbf{H}_1(G)$ и $Y = \mathbf{H}^1(G)$, полагая $\langle \omega, \omega^* \rangle = \sum_{e \in \omega} \omega^*(e)$. Покажем, что введенная двойственность исчерпывающая. То есть из равенства $\langle \omega, \omega^* \rangle = 0$ для всех $\omega \in X$ следует, что $\omega^* = 0$ и, соответственно, если $\langle \omega, \omega^* \rangle = 0$ для всех $\omega^* \in Y$, то $\omega = 0$.

Нетрудно видеть, что этот факт будет иметь место если возможно построить двойственные базисы $\{x_1, x_2, \dots, x_g\}$ в X и $\{y_1, y_2, \dots, y_g\}$ в Y такие, что $\langle x_i, y_j \rangle =$

δ_{ij} , где δ_{ij} – символ Кронекера. Для построения таких базисов зафиксируем порождающее дерево T в графе G и обозначим через $\{t_1, t_2, \dots, t_g\}$ – множество ребер из $G \setminus T$. Снабдим каждое из ребер t_i одной из двух возможных ориентаций. Выберем в качестве x_i единственный цикл графа G содержащий ребро t_i . Тогда циклы $\{x_1, x_2, \dots, x_g\}$ образуют базис в группе гомологий $H_1(G)$. Определим коцикл $y_j \in H^1(G)$, полагая $y_j(e) = 1$ для $e = t_j$ и $y_j(e) = 0$ для всех остальных ребер e . По построению имеем $\langle x_i, y_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, g\}$. Из последнего соотношения, в частности, следует, что $\{y_1, y_2, \dots, y_g\}$ линейно независимы и образуют базис в Y . По определению операций $\tau^\#$ и $\tau_\#$ имеем равенство

$$\langle \tau^\#(\omega), \omega^* \rangle = \langle \omega, \tau_\#(\omega^*) \rangle, \quad \omega \in X, \quad \omega^* \in Y.$$

Поскольку двойственность $\langle \cdot, \cdot \rangle$ исчерпывающая, последнее равенство означает, что оператор $\tau^\#$ однозначно определяется по оператору $\tau_\#$ и, в свою очередь, $\tau_\#$ однозначно определяется по $\tau^\#$. Предположим, что выполнено условие (2) из доказываемой леммы. Тогда $\tau^\# = -\text{Id}$, откуда, в силу единственности, $\tau_\# = -\text{Id}$, что эквивалентно условию (3). Обратная импликация устанавливается аналогичным образом. Лемма доказана.

Пусть $v_0, v_1 \in V(G)$ и λ – гомотопический класс путей с началом v_0 и концом v_1 . Обозначим через ϕ_λ групповой изоморфизм $\phi_\lambda: \pi_1(G, v_0) \rightarrow \pi_1(G, v_1)$, определенный равенством $\phi_\lambda(\mu) = \lambda^{-1}\mu\lambda$.

Пусть $p: \tilde{G} \rightarrow G$ – накрытие графов. Пусть $\tilde{v}_0 \in V(\tilde{G})$, $v_0 \in V(G)$, $p(\tilde{v}_0) = v_0$ и $p_*\pi_1(\tilde{G}, \tilde{v}_0) = H$ – подгруппа $\pi_1(G, v_0)$. Обозначим через $\text{Aut}(G)$ группу автоморфизмов графа G .

Следуя Джоковичу [15], представим предложение 1 в следующей форме.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\alpha \in \text{Aut}(G)$, $\alpha(v_0) = v_1$, а $\tilde{v}_1 \in p^{-1}(v_1)$. Тогда существует поднятие автоморфизма α до автоморфизма $\tilde{\alpha} \in \text{Aut}(\tilde{G})$ такого, что $\tilde{\alpha}(\tilde{v}_0) = \tilde{v}_1$ тогда и только тогда, когда существует гомотопический класс путей $\tilde{\lambda}$ из $\tilde{v}_0$ в $\tilde{v}_1$ такой, что отображение $\alpha_{v_0} = \phi_\lambda^{-1}\alpha_*$, $\lambda = p \circ \tilde{\lambda}$ оставляет H инвариантной.

Следующее предложение является гомотопической версией леммы 1 для графов рода два.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть G – произвольный 2-реберно-связный граф рода два и $\tau \in \text{Aut}(G)$. Зафиксируем порождающее дерево T в графе G и обозначим через $\{t_1, t_2\}$ – множество ребер из $G \setminus T$. Снабдим каждое из ребер t_i одной из двух возможных ориентаций. Обозначим через x_i порождающий элемент фундаментальной группы $\pi_1(G, v)$, однозначно определенный циклом, содержащим ребро t_i . Тогда τ является гиперэллиптической инволюцией в том и только том случае, если существует вершина v_0 графа G и класс гомотопных путей λ соединяющих v_0 с $v_1 = \tau(v_0)$ такие, что отображение $\tau_{v_0} = \phi_\lambda^{-1} \circ \tau_*$ задает следующий внешний автоморфизм группы $\pi_1(G, v_0)$: $\tau_{v_0}(x_1) = x_1^{-1}$, $\tau_{v_0}(x_2) = x_2^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть τ – гиперэллиптическая инволюция. Обозначим через C_i , $i = 1, 2$, – единственный цикл в графе $T \cup t_i$. Заметим, что τ оставляет цикл C_i инвариантным, меняя ориентацию его ребер на противоположную. Действительно, если C_i и $\tau(C_i)$ различны, то их общий образ при каноническом отображении $G \rightarrow G/\tau$ является циклом в графе G/τ , что невозможно, поскольку G/τ – дерево. Если

τ оставляет цикл C_i инвариантным, сохраняя ориентацию его ребер, то C_i/τ цикл длины $n/2$ в графе G/τ . Это также невозможно.

Так как t_1 не равно t_2 , циклы C_1 и C_2 различны. Заметим, что в силу 2-реберно-связности графа G циклы C_1 и C_2 имеют, по крайней мере, одну общую вершину. Действительно, в противном случае существует реберный путь связывающий вершины C_1 с вершинами C_2 . Такой путь единственен, иначе граф G имеет род больше либо равный 3. Однако каждое ребро этого пути, не лежащее ни в C_1 ни в C_2 , является мостом, удаление которого разбивает граф на две связные компоненты. Это противоречит 2-реберно-связности графа G . По аналогичным соображениям пересечение $I = C_1 \cap C_2$ связно. Следовательно, I является линейным графом. В качестве v_0 выберем произвольную вершину из I . Положим $v_1 = \tau(v_0)$. Поскольку каждый из циклов C_1 и C_2 инвариантен относительно τ , их пересечение I также инвариантно относительно τ . Следовательно, $v_1 \in I$. Обозначим через $\Lambda = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ реберный путь в I , соединяющий v_0 и v_1 . Если вершины v_0 и v_1 совпадают, будем считать, что путь состоит из одной вершины.

Опишем действие автоморфизма τ на циклах C_1 и C_2 . Для удобства обозначим число ребер в цикле C_1 через m , а в цикле C_2 через n . Меняя, если потребуется, ориентацию циклов C_1 и C_2 на противоположную, без ограничения общности можем считать, что $C_1 = (e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1m})$ и $C_2 = (e_{21}, e_{22}, \dots, e_{2n})$, где

$$e_{11} = e_{21} = e_1, \quad e_{12} = e_{22} = e_2, \quad \dots, \quad e_{1k} = e_{2k} = e_k.$$

Если $k = 0$, то ориентацию на циклах можно сохранить.

Поскольку τ оставляет цикл C_1 инвариантным, меняя ориентацию его ребер и переводя вершину v_0 в вершину v_1 , имеем

$$\tau(e_{1j}) = \bar{e}_{1,k-j+1} \pmod{m}, \quad j = 1, \dots, m,$$

где $\bar{e}$ означает замену ориентации ребра e . Аналогично, действие τ на цикле C_2 определяется как

$$\tau(e_{2j}) = \bar{e}_{2,k-j+1} \pmod{n}, \quad j = 1, \dots, n.$$

В выбранных обозначениях, порождающие фундаментальной группы $\pi_1(G, v_0)$ задаются петлями $x_1 = C_1$ и $x_2 = C_2$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что петля $\tau(x_1)$ гомотопна петле $\lambda^{-1}x_1^{-1}\lambda = \phi_\lambda(x_1^{-1})$, а $\tau(x_2)$ гомотопна $\lambda^{-1}x_2^{-1}\lambda = \phi_\lambda(x_2^{-1})$. Отсюда, переходя к классам гомотопных путей, имеем $\tau_*(x_1) = \phi_\lambda(x_1^{-1})$ и $\tau_*(x_2) = \phi_\lambda(x_2^{-1})$. Откуда, учитывая, что $\tau_{v_0} = \phi_\lambda^{-1} \circ \tau_*$ окончательно получим

$$\tau_{v_0}(x_1) = x_1^{-1}, \quad \tau_{v_0}(x_2) = x_2^{-1}.$$

Обратно, если выполнены равенства $\tau_{v_0}(x_1) = x_1^{-1}$ и $\tau_{v_0}(x_2) = x_2^{-1}$, то переходя к действию τ на первой группе гомологий графа G , имеем $\tau_\#(X_1) = -X_1$ и $\tau_\#(X_2) = -X_2$. Здесь X_1 и X_2 образы x_1 и x_2 при каноническом отображении $\pi_1(G, v_0) \rightarrow H_1(G)$. По лемме 1 автоморфизм τ – гиперэллиптическая инволюция.

5. Основные результаты. Все рассматриваемые графы предполагаются 2-реберно-связными. Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\tilde{G}$ – двулистное неразветвленное накрытие графа G рода два. Тогда $\tilde{G}$ – гиперэллиптический граф.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\tilde{G}$ – трехлистное неразветвленное накрытие графа G рода два. Тогда если накрытие нерегулярно, то $\tilde{G}$ – гиперэллиптический граф. Если указанное накрытие регулярно, то $\tilde{G}$ двулистно разветвлено накрывает граф рода один.

Проиллюстрируем утверждение теоремы 2 следующими двумя рисунками (рис. 2 и рис. 3).

Рис. 2. Нерегулярное трехлистное накрытие графа G рода два

Рис. 3. Регулярное трехлистное накрытие графа G рода два

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Выберем вершину v_0 графа G и порождающие фундаментальной группы $\pi_1(G, v_0)$ как это сделано в предложении 1. Каждое двулистное накрытие $p: \tilde{G} \rightarrow G$ с точностью до эквивалентности однозначно определяется по подгруппе H индекса два в группе $\Gamma = \pi_1(G, v_0)$. Заметим, что Γ свободно порождена $a = x_1$ и $b = x_2$. Так как H – подгруппа индекса 2 в Γ , она нормальна в Γ и фактор-группа Γ/H изоморфна S_2 , где $S_2 = \{(1), (12)\}$ – группа подстановок на двух символах. Следовательно, группа $H = \ker \varphi$, где $\varphi: \Gamma \rightarrow S_2$ – групповой эпиморфизм. Существует ровно три возможности:

1.1°) $\varphi(a) = (12), \varphi(b) = (12)$;

1.2°) $\varphi(a) = (1)$, $\varphi(b) = (12)$;

1.3°) $\varphi(a) = (12)$, $\varphi(b) = (1)$.

Пользуясь методом Райдемайстера–Шрайера [16; с. 92] получим, что в случае 1.1° подгруппа $H = \langle a^2, b^2, ab \rangle$ – свободно порожденная группа ранга 3. В случаях 1.2° и 1.3° имеем $H = \langle a, b^2, bab^{-1} \rangle$ и $H = \langle a^2, b, aba^{-1} \rangle$ соответственно. Проверим, что во всех случаях группа H остается инвариантной при действии автоморфизма $\tau_{v_0}: a \rightarrow a^{-1}, b \rightarrow b^{-1}$.

Действительно, в случае 1.1°, полагая $x = a^2$, $y = b^2$ и $z = ab$, имеем

$$\tau_{v_0}(x) = x^{-1}, \quad \tau_{v_0}(y) = y^{-1}, \quad \tau_{v_0}(z) = x^{-1}zy^{-1}.$$

В случае 1.2° для $x = a$, $y = b^2$ и $z = bab^{-1}$ получим

$$\tau_{v_0}(x) = x^{-1}, \quad \tau_{v_0}(y) = y^{-1}, \quad \tau_{v_0}(z) = y^{-1}z^{-1}y.$$

Аналогично, в случае 1.3° для $x = a^2$, $y = b$ и $z = aba^{-1}$ имеем

$$\tau_{v_0}(x) = x^{-1}, \quad \tau_{v_0}(y) = y^{-1}, \quad \tau_{v_0}(z) = x^{-1}z^{-1}x.$$

Обозначим через X , Y и Z образы порождающих x , y и z группы H при ее каноническом отображении на абелизатор $H/[H, H]$. Пусть оператор $\tau_{\#} = (\tau_{v_0})_{\#}$ обозначает индуцированное действие τ_{v_0} на абелизаторе. Рассмотрим действие указанного оператора в каждом из трех случаев.

В случае 1.1° имеем

$$\tau_{\#}(X) = -X, \quad \tau_{\#}(Y) = -Y, \quad \tau_{\#}(Z) = -X - Y + Z.$$

В случае 1.2°:

$$\tau_{\#}(X) = -X, \quad \tau_{\#}(Y) = -Y, \quad \tau_{\#}(Z) = -Y - Z + Y = -Z$$

и в случае 1.3°:

$$\tau_{\#}(X) = -X, \quad \tau_{\#}(Y) = -Y, \quad \tau_{\#}(Z) = -X - Z + X = -Z.$$

Построим поднятие гиперэллиптической инволюции τ графа G на граф $\tilde{G}$. Рассмотрим произвольную вершину $\tilde{v}_0$ графа $\tilde{G}$ такую, что $p(\tilde{v}_0) = v_0$. Обозначим через $\tilde{\lambda}$ единственное поднятие пути λ с началом в вершине $\tilde{v}_0$, а через $\tilde{v}_1$ конечную вершину $\tilde{\lambda}$. Так как автоморфизм τ_{v_0} оставляет подгруппу H инвариантной, по предложению 2 инволюция τ однозначно поднимается до автоморфизма $\tilde{\tau}$ графа $\tilde{G}$, переводящего $\tilde{v}_0$ в $\tilde{v}_1$. Подобно τ_{v_0} , отображение $\tilde{\tau}_{\tilde{v}_0}$ задает внешний автоморфизм группы $\pi_1(\tilde{G}, \tilde{v}_0)$. Покажем, что действие $\tilde{\tau}_{\tilde{v}_0}$ на $\pi_1(\tilde{G}, \tilde{v}_0)$ эквивариантно действию τ_{v_0} на $\pi_1(G, v_0)$ по отображению $p_*: \pi_1(\tilde{G}, \tilde{v}_0) \rightarrow \pi_1(G, v_0)$. Сформулируем это в виде следующей леммы.

ЛЕММА 2. В приведенных выше обозначениях справедливо равенство $p_* \circ \tilde{\tau}_{\tilde{v}_0} = \tau_{v_0} \circ p_*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольный элемент $\tilde{\mu}$ из группы $\pi_1(\tilde{G}, \tilde{v}_0)$ и положим $\mu = p_*(\tilde{\mu})$. Тогда

$$\tau_{v_0}(p_*(\tilde{\mu})) = \tau_{v_0}(\mu) = \phi_{\lambda}^{-1}(\tau_*(\mu)) = \phi_{\lambda}(\mu') = \lambda^{-1}(\mu')^{-1}\lambda,$$

где $\mu' = \tau_*(\tilde{\mu})$. Далее

$$p_*(\tilde{\tau}_{v_0}(\tilde{\mu})) = p_*(\phi_{\tilde{\lambda}}^{-1}(\tilde{\tau}_*(\tilde{\mu}))) = p_*(\phi_{\tilde{\lambda}}^{-1}(\tilde{\mu}')) = p_*(\tilde{\lambda}^{-1}(\tilde{\mu}')^{-1})\tilde{\lambda} = \lambda^{-1}(\mu')^{-1}\lambda,$$

где $\tilde{\mu}' = \tilde{\tau}_*(\tilde{\mu})$. При этом мы воспользовались равенством $p_*(\tilde{\mu}') = \mu'$, которое легко следует из свойства поднятий $p_* \circ \tilde{\tau}_* = \tau_* \circ p_*$. Лемма доказана.

Пользуясь леммой об эквиинвариантности, заключаем, что в случаях 1.2° и 1.3° действие автоморфизма $\tilde{\tau}_{\#} = (\tilde{\tau}_{v_0})_{\#}$ на первой группе гомологий $H_1(\tilde{G}) \cong H/[H, H]$ имеет вид $\tilde{\tau}_{\#}: X \rightarrow -X$. По лемме 1 это означает, что $\tilde{\tau}$ – гиперэллиптическая инволюция $\tilde{G}$. Отсюда $\tilde{G}$ – гиперэллиптический граф, и теорема для случаев 1.2° и 1.3° доказана.

Для доказательства теоремы в случае 1.1° рассмотрим накрывающую инволюцию ω отображения $p: \tilde{G} \rightarrow G$, т.е. такой автоморфизм графа $\tilde{G}$, что $p = p \circ \omega$. Заметим, что в рассматриваемом случае имеет место следующее разложение на классы смежности $\Gamma = H + Ha$. Воспользуемся каноническим изоморфизмом между фактор-группой $\Gamma/H = \langle H, Ha \rangle$ и группой преобразования наложения $\langle 1, \omega \rangle$ накрытия p . Тогда $\omega = Ha$ и ω_* определяет следующий внешний автоморфизм группы $\pi_1(\tilde{G}, v_0)$, где последняя отождествляется с группой H :

$$\omega_*: \langle x, y, z \rangle \rightarrow \langle axa^{-1}, aya^{-1}, aza^{-1} \rangle = \langle aa^2a^{-1}, ab^2a^{-1}, aaba^{-1} \rangle = \langle x, zyz^{-1}, xyz^{-1} \rangle.$$

Переходя к действию на первой группе гомологий $H_1(\tilde{G}) \cong H/[H, H] = \langle X, Y, Z \rangle$, имеем

$$\omega_{\#}: \langle X, Y, Z \rangle \rightarrow \langle X, Y, X + Y - Z \rangle.$$

Поскольку $p: \tilde{G} \rightarrow G$ – регулярное двулистное накрытие, автоморфизм τ , имеем ровно два поднятия на G' . Это $\tilde{\tau}$ и $\tilde{\tau} \circ \omega$. Так как $(\tilde{\tau} \circ \omega)_{\#} = \tilde{\tau}_{\#} \circ \omega_{\#}$ и по лемме об эквиинвариантности $\tilde{\tau}_{\#} = \tau_{\#}$, действие поднятия $\tilde{\tau} \circ \omega$ на первой группе гомологий определяется по формуле

$$(\tilde{\tau} \circ \omega)_{\#}: \langle X, Y, Z \rangle \rightarrow \langle -X, -Y, -Z \rangle.$$

Следовательно, по лемме 1 автоморфизм $\tilde{\tau} \circ \omega$ – гиперэллиптическая инволюция, а $\tilde{G}$ – гиперэллиптический граф. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Как и в доказательстве теоремы 1 будем считать, что группа $\Gamma = \pi_1(G, v_0)$ свободна порождена элементами $a = x_1$ и $b = x_2$. Хорошо известно, что существует взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных n -листных накрытий G и классами эквивалентности транзитивных гомоморфизмов из группы Γ в симметрическую группу S_n на n символах. Напомним, что гомоморфизм в группу S_n называется *транзитивным*, если его образ – транзитивная подгруппа в S_n . Два гомоморфизма $\theta, \theta': \Gamma \rightarrow S_n$ называются *эквивалентными*, если существует $h \in S_n$ такой, что $\theta' = h\theta h^{-1}$ [13; с. 68].

Если накрытие трехлистно, а $\theta: \Gamma \rightarrow S_3$ соответствующий ему транзитивный гомоморфизм, то возможны два случая $\theta(\Gamma) = S_3$ и $\theta(\Gamma) = \{(1), (123), (132)\}$. В первом случае накрытие нерегулярно, во втором – регулярно.

Начнем с рассмотрения случая нерегулярного накрытия. При этом, с точностью до эквивалентности и перестановки a и b , для гомоморфизма θ имеется две возможности:

$$2.1^\circ) \theta(a) = (12), \theta(b) = (123);$$

$$2.2^\circ) \theta(a) = (12), \theta(b) = (13).$$

Напомним стандартную конструкцию, позволяющую по каждому транзитивному гомоморфизму $\theta: \Gamma \rightarrow S_n$ строить подгруппу H индекса n в Γ . Пусть $K = \theta(\Gamma) \leq S_n$, а K_1 это подгруппа K , оставляющая символ “1” неподвижным. Тогда $H = \theta^{-1}(K_1)$. При этом, эквивалентным гомоморфизмам соответствуют сопряженные подгруппы. И наоборот, каждому классу сопряженных подгрупп индекса n соответствует класс эквивалентности транзитивных гомоморфизмов Γ в S_n [17].

Пользуясь методом Райдемайстера–Шрайера, найдем порождающие группы H в случаях 2.1° и 2.2°. Учитывая, что по теореме Шрайера H – свободная группа ранга 4, имеем

$$2.1^\circ) H = \langle ab^{-1}, ba, b^2ab^{-2}, b^3 \rangle;$$

$$2.2^\circ) H = \langle a^2, b^2, aba^{-1}, bab^{-1} \rangle.$$

Как и в теореме 1, определим действие автоморфизма $\tau_{v_0}: a \rightarrow a^{-1}, b \rightarrow b^{-1}$ на подгруппе H .

В случае 2.1°, полагая $x = ab^{-1}, y = ba, z = b^2ab^{-2}$ и $w = b^3$, имеем

$$\tau_{v_0}(x) = b^{-1}x^{-1}b, \quad \tau_{v_0}(y) = b^{-1}y^{-1}b, \quad \tau_{v_0}(z) = b^{-1}w^{-1}z^{-1}wb, \quad \tau_{v_0}(w) = b^{-1}w^{-1}b.$$

Откуда, подправляя τ_{v_0} на внутренний автоморфизм группы Γ , получим

$$b\tau_{v_0}b^{-1}: x \rightarrow x^{-1}, \quad y \rightarrow y^{-1}, \quad z \rightarrow w^{-1}z^{-1}w, \quad w \rightarrow w^{-1}.$$

Переходя к индуцированному действию этого автоморфизма на абелизаторе $H/[H, H]$, получим

$$(b\tau_{v_0}b^{-1})_{\#}: X \rightarrow -X, \quad Y \rightarrow -Y, \quad Z \rightarrow -W - Z + W = -Z, \quad W \rightarrow -W.$$

Построим накрытие $p: \tilde{G} \rightarrow G$ по подгруппе H . Будем считать, что $p(\tilde{v}_0) = v_0$; тогда мономорфизм p_* изоморфно отображает группу $\pi_1(\tilde{G}, \tilde{v}_0)$ на

$$H = p_*(\pi_1(\tilde{G}, \tilde{v}_0)) \subset \pi_1(G, v_0) = \Gamma.$$

Рассмотрим гиперэллиптическую инволюцию τ графа G и путь λ из v_0 в $v_1 = \tau(v_0)$, описанный в предложении 3. Поскольку отображение τ_{v_0} действует по правилу $\mu \in \Gamma \rightarrow \lambda\tau(\mu)\lambda^{-1} \in \Gamma$, то отображение $b\tau_{v_0}b^{-1}$ переводит петлю μ в петлю

$$b\lambda\tau(\mu)\lambda^{-1}b^{-1} = (b\lambda)\tau(\mu)(b\lambda)^{-1}.$$

То есть, $b\tau_{v_0}b^{-1} = \phi_{b\lambda}^{-1} \circ \tau_*$. Последний автоморфизм оставляет группу H инвариантной. Следовательно, по предложению 2 гиперэллиптическая инволюция τ поднимается на $\tilde{G}$ до автоморфизма $\tilde{\tau}$, переводящего $\tilde{v}_0$ в конечную вершину пути $b\lambda$, где $\tilde{b\lambda}$ – единственное поднятие пути $b\lambda$ на $\tilde{G}$ с началом в $\tilde{v}_0$. По лемме 2 об эквивариантности поднятый автоморфизм $\tilde{\tau}$ действует на первой группе гомологий накрытия также, как $(b\tau_{v_0}b^{-1})_{\#}$ на группе $H/[H, H]$, т.е. переводит каждый ее элемент в противоположный.

По лемме 1 получаем, что $\tilde{\tau}$ – гиперэллиптическая инволюция, а $\tilde{G}$ – гиперэллиптический граф.

В случае 2.2°, полагая $x = a^2$, $y = b^2$, $z = aba^{-1}$ и $w = bab^{-1}$, имеем

$$\tau_{v_0}(x) = x^{-1}, \quad \tau_{v_0}(y) = y^{-1}, \quad \tau_{v_0}(z) = x^{-1}z^{-1}x, \quad \tau_{v_0}(w) = y^{-1}w^{-1}y.$$

Индукцированное действие этого автоморфизма на абелизаторе $H/[H, H]$ имеет вид

$$\tau_{\#}: X \rightarrow -X, \quad Y \rightarrow -Y, \quad Z \rightarrow -X - Z + X = -Z, \quad W \rightarrow -Y - W + Y = -W.$$

Рассмотрим гиперэллиптическую инволюцию τ графа G . Пусть λ – это путь из v_0 в $v_1 = \tau(v_0)$, описанный в предложении 3, а $\tilde{\lambda}$ его поднятие с началом в $\tilde{v}_0$ и концом в $\tilde{v}_1$. По предложению 2 гиперэллиптическая инволюция τ поднимается на $\tilde{G}$ до автоморфизма $\tilde{\tau}$, переводящего $\tilde{v}_0$ в вершину $\tilde{v}_1$. По свойству эквиинвариантности (лемма 2) поднятый автоморфизм $\tilde{\tau}$ действует на первой группе гомологий накрытия также, как τ_{v_0} на группе $H/[H, H]$. Это означает, что $\tilde{\tau}_{\#}$ переводит каждый элемент $\mathbf{H}_1(\tilde{G})$ в противоположный. По лемме 1 заключаем, что $\tilde{\tau}$ – гиперэллиптическая инволюция графа $\tilde{G}$.

Завершим доказательство рассмотрением регулярных накрытий. В регулярном случае, для гомоморфизма θ , с точностью до эквивалентности, имеется четыре возможности:

$$3.1^\circ) \quad \theta(a) = (123), \quad \theta(b) = (123);$$

$$3.2^\circ) \quad \theta(a) = (123), \quad \theta(b) = (132);$$

$$3.3^\circ) \quad \theta(a) = (1), \quad \theta(b) = (123);$$

$$3.4^\circ) \quad \theta(a) = (123), \quad \theta(b) = (1).$$

Как и выше, используя метод Райдемайстера–Шрайера, имеем следующие наборы порождающих для подгруппы $H = \langle x, y, z, w \rangle$.

$$3.1^\circ) \quad x = ba^{-1}, \quad y = aba^{-1}, \quad z = a^3, \quad w = a^2b;$$

$$3.2^\circ) \quad x = ba^{-2}, \quad y = ab, \quad z = a^3, \quad w = a^2ba^{-1};$$

$$3.3^\circ) \quad x = a, \quad y = bab^{-1}, \quad z = b^2ab^{-2}, \quad w = b^3;$$

$$3.4^\circ) \quad x = b, \quad y = aba^{-1}, \quad z = a^3, \quad w = a^2ba^{-2}.$$

Переносим действие автоморфизма $\tau_{v_0}: a \rightarrow a^{-1}, b \rightarrow b^{-1}$ на H получим

$$3.1^\circ) \quad \tau_{v_0}: x \rightarrow w^{-1}z, \quad y \rightarrow z^{-1}y^{-1}z, \quad z \rightarrow z^{-1}, \quad w \rightarrow z^{-1}x^{-1};$$

$$3.2^\circ) \quad \tau_{v_0}: x \rightarrow y^{-1}z, \quad y \rightarrow z^{-1}x^{-1}, \quad z \rightarrow z^{-1}, \quad w \rightarrow z^{-1}w^{-1}z;$$

$$3.3^\circ) \quad \tau_{v_0}: x \rightarrow x^{-1}, \quad y \rightarrow w^{-1}z^{-1}w, \quad z \rightarrow w^{-1}y^{-1}w, \quad w \rightarrow w^{-1};$$

$$3.4^\circ) \quad \tau_{v_0}: x \rightarrow x^{-1}, \quad y \rightarrow z^{-1}w^{-1}z, \quad z \rightarrow z^{-1}, \quad w \rightarrow z^{-1}y^{-1}z.$$

По предложению 2 инволюция τ поднимается до инволюции $\tilde{\tau}$ графа $\tilde{G}$.

В силу леммы 2 индуцированное действие инволюции $\tilde{\tau}$ на первой группе гомологий $\mathbf{H}_1(\tilde{G}) \cong H/[H, H]$ имеет вид

$$3.1^\circ) \quad \tilde{\tau}_{\#}: X \rightarrow Z - W, \quad Y \rightarrow -Y, \quad Z \rightarrow -Z, \quad W \rightarrow -X - Z;$$

$$3.2^\circ) \quad \tilde{\tau}_{\#}: X \rightarrow -Y + Z, \quad Y \rightarrow -X - Z, \quad Z \rightarrow -Z, \quad W \rightarrow -W;$$

$$3.3^\circ) \quad \tilde{\tau}_{\#}: X \rightarrow -X, \quad Y \rightarrow -Z, \quad Z \rightarrow -Y, \quad W \rightarrow -W;$$

$$3.4^\circ) \quad \tilde{\tau}_{\#}: X \rightarrow -X, \quad Y \rightarrow -W, \quad Z \rightarrow -Z, \quad W \rightarrow -Y.$$

Проанализируем действие $\tilde{\tau}$ на графе $\tilde{G}$ в случае 3.1°. Полагая $X' = X + Z$ и $W' = -W$, получим

$$\tilde{\tau}_{\#}: X' \rightarrow W', \quad Y \rightarrow -Y, \quad Z \rightarrow -Z, \quad W' \rightarrow X'.$$

То есть, автоморфизм $\tilde{\tau}$ оставляет инвариантными два гомологических цикла графа $\tilde{G}$, меняя их ориентацию на противоположную, а два других цикла меняет местами. При каноническом отображении $\tilde{G} \rightarrow \tilde{G}/\tilde{\tau}$ инвариантные циклы переходят в тривиальные, а переставляемые циклы переходят в один цикл фактор-графа. Это означает, что фактор-граф имеет род один.

Оставшиеся случаи 3.2° , 3.3° и 3.4° рассматриваются аналогичным образом.

Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания и предложения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. M. Farkas, “Automorphisms of compact Riemann surfaces and the vanishing of theta constants”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 231–232.
- [2] R. D. M. Accola, “Riemann surfaces with automorphism groups admitting partitions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **21** (1969), 477–482.
- [3] F. Enriques, “Sopra le superficie che posseggono un fascio ellittico o di genere due di curve razionali”, *Rom. Acc. L. Rend.* (5), **7:2** (1898), 281–286.
- [4] R. Hidalgo, “On a theorem of Accola”, *Complex Variables Theory Appl.*, **36:1** (1998), 19–26.
- [5] A. Mednykh, M. Reni, “Twofold unbranched coverings of genus two 3-manifolds are hyperelliptic”, *Israel J. Math.*, **123** (2001), 149–155.
- [6] R. D. M. Accola, “On lifting of the hyperelliptic involutions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **122:2** (1994), 341–347.
- [7] A. Mednykh, M. Reni, A. Vesnin, B. Zimmermann, “Three-fold coverings and hyperelliptic manifolds: a three-dimensional version of a result of Accola”, *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, **32**, suppl. 1 (2001), 181–191.
- [8] R. Bacher, P. de la Harpe, T. Nagnibeda, “The lattice of integral flows and the lattice of integral cuts on a finite graph”, *Bull. Soc. Math. France*, **125:2** (1997), 167–198.
- [9] N. L. Biggs, “Chip-firing and the critical group of a graph”, *J. Algebraic Combin.*, **9:1** (1999), 25–45.
- [10] R. Cori, D. Rossin, “On the sandpile group of a graph”, *European J. Combin.*, **21:4** (2000), 447–459.
- [11] M. Baker, S. Norine, “Harmonic morphisms and hyperelliptic graphs”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **15** (2009), 2914–2955.
- [12] T. D. Parsons, T. Pisanski, B. Jackson, “Dual imbeddings and wrapped quasi-coverings of graphs”, *Discrete Math.*, **31:1** (1980), 43–52.
- [13] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [14] У. Масси, Дж. Столлингс, *Алгебраическая топология. Введение*, Мир, М., 1977.
- [15] D. Ž. Djoković, “Automorphisms of graphs and coverings”, *J. Combin. Theory Ser. B*, **16:3** (1974), 243–247.
- [16] В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр, *Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и соотношений*, Наука, М., 1974.
- [17] M. Hall, Jr., “Subgroups of finite index in free group”, **1** (1949), 187–190.

И. А. Медных

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

г. Новосибирск

E-mail: ilyamednykh@mail.ru

Поступило

03.03.2012

Исправленный вариант

09.11.2013