Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Р. Аваков, Г. Г. Магарил-Ильяев, Теорема о неявной функции для включений, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 6, 813–818

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9383>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 17:35:42

Теорема о неявной функции для включений

Е. Р. Аваков, Г. Г. Магарил-Ильяев

В работе рассматривается вопрос о разрешимости включения $F(x, \sigma) \in A$, т.е. о нахождении такого отображения $\sigma \mapsto x(\sigma)$ (неявной функции), определенного на некотором множестве, что $F(x(\sigma), \sigma) \in A$ для всех σ из этого множества. Подобного рода результаты играют ключевую роль в различных разделах анализа и особенно в теории экстремальных задач, являясь основным инструментом при получении условий экстремума.

Библиография: 8 названий.

Мы начинаем сразу с формулировки основного утверждения. Его доказательство базируется на модифицированном методе Ньютона решения нелинейных уравнений. Это позволило дополнить и усилить известные ранее результаты. Соответствующие комментарии приведены в конце статьи.

ТЕОРЕМА (о неявной функции). Пусть Σ – топологическое пространство, $\hat{\sigma} \in \Sigma$, X и Y – банаховы пространства, V – окрестность точки $\hat{x} \in X$, A – непустое замкнутое выпуклое подмножество Y , $F: V \times \Sigma \rightarrow Y$ и $F(\hat{x}, \hat{\sigma}) \in A$. Если

- 1) F непрерывно на $V \times \Sigma$;
- 2) F дифференцируемо по x в точке $(\hat{x}, \hat{\sigma})$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существуют окрестности $V(\varepsilon)$ и $U(\varepsilon)$ точек $\hat{x}$ и $\hat{\sigma}$ такие, что для всех $x, x' \in V(\varepsilon)$ и $\sigma \in U(\varepsilon)$ выполняется соотношение

$$\|F(x, \sigma) - F(x', \sigma) - F_x(\hat{x}, \hat{\sigma})(x - x')\|_Y \leq \varepsilon \|x - x'\|_X;$$

- 3) $0 \in \text{int}(\text{Im } F_x(\hat{x}, \hat{\sigma}) + F(\hat{x}, \hat{\sigma}) - A)$,
то найдутся окрестности V_0 и U_0 точек $\hat{x}$ и $\hat{\sigma}$, непрерывное отображение $\varphi: V_0 \times U_0 \rightarrow V$ и константа $K > 0$ такие, что

$$F(\varphi(\xi, \sigma), \sigma) \in A \quad \text{и} \quad \|\varphi(\xi, \sigma) - \xi\|_X \leq K d(F(\xi, \sigma), A)^1$$

для всех $(\xi, \sigma) \in V_0 \times U_0$.

Стандартный метод Ньютона предполагает нахождение на каждом шаге решения вспомогательного линейного уравнения. В данной ситуации на каждом шаге

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 08-01-00450, 10-01-90002 и 10-01-00188).

¹ $d(x, A)$ – расстояние от точки x до множества A .

находится решение вспомогательного выпуклого включения. Возможность этого обеспечивается следующим утверждением, доказательство которого приведено сразу после доказательства теоремы.

ЛЕММА (о правом обратном). Пусть X, Y – банаховы пространства, Φ – замкнутое выпуклое многозначное отображение из X в Y .² Тогда, если $y_0 \in \text{int Im } \Phi$ и $x_0 \in \Phi^{-1}(y_0)$, то существуют окрестность W точки y_0 , константа $\gamma > 0$ и непрерывное отображение $R: W \rightarrow X$ такие, что

$$y \in \Phi(R(y)) \quad \text{и} \quad \|R(y) - x_0\|_X \leq \gamma d(y, \Phi(x_0)) \quad \text{для любого } y \in W.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ. Обозначим для краткости $\Lambda = F_x(\hat{x}, \hat{\sigma})$ и рассмотрим многозначное отображение Φ из X в Y , определенное по правилу

$$\Phi(x) = \Lambda x + F(\hat{x}, \hat{\sigma}) - A.$$

Из условия 3) теоремы следует, что $0 \in \text{int Im } \Phi$, и тогда легко видеть, что Φ удовлетворяет всем требованиям леммы о правом обратном с $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Пусть окрестность W , число $\gamma > 0$ и отображение R получены из этой леммы.

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\theta = \varepsilon\gamma < 1$, и пусть $V(\varepsilon)$ и $U(\varepsilon)$ – окрестности $\hat{x}$ и $\hat{\sigma}$ из условия 2) теоремы. Уменьшая их (если необходимо), можно считать (в силу условия 1)), что

$$F(\hat{x}, \hat{\sigma}) - F(x, \sigma) \in W \quad \text{для всех } (x, \sigma) \in V(\varepsilon) \times U(\varepsilon).$$

Пусть $\delta > 0$ такое, что $U_X(\hat{x}, \delta)^3 \subset V(\varepsilon)$. Окрестности V_0 и U_0 выберем так: $V_0 = U_X(\hat{x}, \delta_1)$, где $\delta_1 \leq \delta/2$, а $U_0 \subset U(\varepsilon)$, и при этом, если $(x, \sigma) \in V_0 \times U_0$, то

$$\|F(x, \sigma) - F(\hat{x}, \hat{\sigma})\|_Y \leq \frac{(1 - \theta)\delta}{(2\gamma)}.$$

Пусть $(\xi, \sigma) \in V_0 \times U_0$. Рассмотрим последовательность (модифицированный метод Ньютона)

$$x_n = x_{n-1} + R(F(\hat{x}, \hat{\sigma}) - F(x_{n-1}, \sigma)), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_0 = \xi. \quad (1)$$

Покажем, что эта последовательность принадлежит $U_X(\hat{x}, \delta)$ и фундаментальна. Первое доказываем по индукции. Ясно, что $x_0 \in U_X(\hat{x}, \delta)$. Пусть $x_k \in U_X(\hat{x}, \delta)$, $1 \leq k \leq n$. Докажем, что $x_{n+1} \in U_X(\hat{x}, \delta)$.

Применяя к обеим частям (1) оператор Λ , получим, что

$$\Lambda(x_n - x_{n-1}) = \Lambda R(F(\hat{x}, \hat{\sigma}) - F(x_{n-1}, \sigma)).$$

Далее, согласно свойству отображения R имеем

$$F(\hat{x}, \hat{\sigma}) - F(x_{n-1}, \sigma) \in \Lambda R(F(\hat{x}, \hat{\sigma}) - F(x_{n-1}, \sigma)) + F(\hat{x}, \hat{\sigma}) - A.$$

²Многозначное отображение Φ сопоставляет каждому $x \in X$ непустое множество $\Phi(x) \subset Y$. Отображение Φ выпукло и замкнуто, если множество $\{(x, y) \in X \times Y \mid y \in \Phi(x)\}$ выпукло и замкнуто; $\text{Im } \Phi = \bigcup_{x \in X} \Phi(x)$; многозначное отображение Φ^{-1} из Y в X , определенное по правилу $\Phi^{-1}(y) = \{x \in X \mid y \in \Phi(x)\}$, называется обратным к Φ .

³ $U_X(\hat{x}, \delta)$ обозначает открытый шар в X с центром в точке $\hat{x}$ радиуса δ .

Из этих соотношений следует, что

$$F(x_{n-1}, \sigma) + \Lambda(x_n - x_{n-1}) \in A. \quad (2)$$

Используя последовательно (1), оценку для R , (2), условие 2) теоремы и затем итерируя процедуру, будем иметь

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\|_X &= \|R(F(\hat{x}, \hat{\sigma}) - F(x_n, \sigma))\|_Y \\ &\leq \gamma d(F(\hat{x}, \hat{\sigma}) - F(x_n, \sigma), F(\hat{x}, \hat{\sigma}) - A) = \gamma d(F(x_n, \sigma), A) \\ &\leq \gamma \|F(x_n, \sigma) - F(x_{n-1}, \sigma) - \Lambda(x_n - x_{n-1})\|_Y \\ &\leq \theta \|x_n - x_{n-1}\|_X \leq \dots \leq \theta^n \|x_1 - \xi\|_X. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее, по неравенству треугольника, (3), (1) (снова с оценкой для R) и согласно выбору x и σ получаем, что

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - \hat{x}\|_X &\leq \|x_{n+1} - x_n\|_X + \dots + \|x_1 - \xi\|_X + \|\xi - \hat{x}\|_X \\ &\leq (\theta^n + \theta^{n-1} + \dots + 1) \|x_1 - \xi\|_X + \|\xi - \hat{x}\|_X \\ &< \frac{\gamma}{1 - \theta} d(F(\xi, \sigma), A) + \|\xi - \hat{x}\|_X \\ &\leq \frac{\gamma}{1 - \theta} \|F(\xi, \sigma) - F(\hat{x}, \hat{\sigma})\|_Y + \|\xi - \hat{x}\|_X < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

т.е. $x_{n+1} \in U_X(\hat{x}, \delta)$ и, тем самым, $x_n \in U_X(\hat{x}, \delta)$ для всех $n \geq 0$.

Последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Действительно, используя (3) и рассуждая как в предыдущем неравенстве, будем иметь для всех $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\|_X &\leq \|x_{n+m} - x_{n+m-1}\|_X + \dots + \|x_{n+1} - x_n\|_X \\ &\leq (\theta^{n+m-1} + \dots + \theta^n) \|x_1 - \xi\|_X \\ &\leq \frac{\gamma \theta^n}{1 - \theta} d(F(\xi, \sigma), A) < \frac{\delta \theta^n}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначим $\varphi(\xi, \sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Из предыдущей оценки следует, что $\varphi(\xi, \sigma) \in U_X(\hat{x}, \delta) \subset V$.

Переходя к пределу в (2) (учитывая непрерывность F), получаем, что выполнено $F(\varphi(\xi, \sigma), \sigma) \in A$.

По тем же соображениям, что и выше, имеем для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|_X &\leq \|x_n - x_{n-1}\|_X + \dots + \|x_1 - \xi\|_X \\ &\leq (\theta^n + \theta^{n-1} + \dots + 1) \|x_1 - \xi\|_X \leq \frac{\gamma}{1 - \theta} d(F(\xi, \sigma), A), \end{aligned}$$

где переход к пределу приводит к нужной оценке с $K = \gamma/(1 - \theta)$.

Функции x_n , $n \in \mathbb{N}$, как функции ξ и σ , непрерывны на $V_0 \times U_0$. Тогда, переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ в (4), получаем, что отображение φ есть равномерный предел непрерывных функций и, значит, само непрерывно на $V_0 \times U_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ О ПРАВОМ ОБРАТНОМ. В основе доказательства лежат два результата: теорема Робинсона–Урсеску – аналог теоремы Банаха об открытом отображении для многозначных отображений и теорема Майкла о непрерывном селекторе. Мы приводим здесь формулировки этих теорем для удобства читателя.

ТЕОРЕМА РОБИНСОНА–УРСЕСКУ [1]. Пусть X и Y – банаховы пространства, Φ – замкнутое выпуклое многозначное отображение из X в Y . Тогда, если $y_0 \in \text{int Im } \Phi$ и $x_0 \in \Phi^{-1}(y_0)$, то существует такое $r > 0$, что для всех $x \in X$ и $y \in B_Y(y_0, r)$ ⁴ справедливо неравенство

$$d(x, \Phi^{-1}(y)) \leq \frac{1}{r} d(y, \Phi(x))(1 + \|x - x_0\|_X).$$

ТЕОРЕМА МАЙКЛА О НЕПРЕРЫВНОМ СЕЛЕКТОРЕ [2]. Пусть X – метрическое пространство, Y – банахово пространство и Ψ – замкнутое выпуклое и полунепрерывное снизу⁵ многозначное отображение из X в Y . Тогда существует непрерывное отображение $\psi: X \rightarrow Y$ такое, что

$$\psi(x) \in \Psi(x) \quad \text{для всех } x \in X.$$

Перейдем непосредственно к доказательству леммы. Отображение Φ удовлетворяет теореме Робинсона–Урсеску (коротко Р–У). Пусть $r > 0$ из этой теоремы. Рассмотрим многозначное отображение Ψ из $B_Y(y_0, r)$ в X , определенное по правилу

$$\Psi(y) = \Phi^{-1}(y) \cap B_X\left(x_0, \left(\frac{3}{r}\right)d(y, \Phi(x_0))\right).$$

Покажем, что Ψ удовлетворяет условиям теоремы Майкла. Непустота, выпуклость и замкнутость множеств $\Psi(y)$, $y \in B_Y(y_0, r)$, проверяются без труда. Докажем, что Ψ полунепрерывно снизу на $B_Y(y_0, r)$. Пусть

$$\bar{y} \in B_Y(y_0, r), \quad \bar{x} \in \Psi(\bar{y}), \quad y_k \in B_Y(y_0, r), \quad k \in \mathbb{N}, \quad y_k \rightarrow \bar{y} \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Построим последовательность $x_k \in \Psi(y_k)$, $k \in \mathbb{N}$, которая сходится к $\bar{x}$.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется такой элемент $x'_k \in \Phi^{-1}(y_k)$, что

$$\|x'_k - \bar{x}\|_X \leq 2d(\bar{x}, \Phi^{-1}(y_k)).$$

Отсюда и из теоремы Р–У при $x = \bar{x}$ и $y = y_k$ получаем оценку

$$\|x'_k - \bar{x}\|_X \leq \frac{2}{r} d(y_k, \Phi(\bar{x}))(1 + \|\bar{x} - x_0\|_X). \quad (5)$$

Так как $\bar{x} \in \Psi(\bar{y})$, то $\bar{y} \in \Phi(\bar{x})$, и поэтому $d(y_k, \Phi(\bar{x})) \leq \|y_k - \bar{y}\|_Y$, откуда с учетом (5) следует, что

$$x'_k \rightarrow \bar{x} \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Пусть $d(\bar{y}, \Phi(x_0)) = 0$. Тогда $\bar{x} = x_0$ по определению Ψ . Из (5) вытекает, что

$$x'_k \in B_X\left(x_0, \left(\frac{3}{r}\right)d(y_k, \Phi(x_0))\right), \quad \text{т.е.} \quad x'_k \in \Psi(y_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Обозначая $x_k = x'_k$, получаем нужную последовательность, и тем самым, Ψ полунепрерывно снизу в точке $\bar{y}$.

⁴ $B_Y(y_0, r)$ обозначает замкнутый шар в Y с центром в точке y_0 радиуса r .

⁵Отображение Ψ полунепрерывно снизу в точке $x \in X$, если для любой последовательности x_k , сходящейся к x , и любой точки $y \in \Psi(x)$ найдется последовательность $y_k \in \Psi(x_k)$, которая сходится к y . Отображение Ψ полунепрерывно снизу на X , если оно полунепрерывно в каждой точке $x \in X$.

Пусть $d(\bar{y}, \Phi(x_0)) > 0$. Используя (5) и определение Ψ , будем иметь

$$\begin{aligned} \|x'_k - x_0\|_X &\leq \|x'_k - \bar{x}\|_X + \|\bar{x} - x_0\|_X \\ &\leq \frac{2}{r} d(y_k, \Phi(\bar{x}))(1 + \|\bar{x} - x_0\|_X) + \frac{3}{r} d(\bar{y}, \Phi(x_0)) \\ &\leq \frac{2}{r} d(y_k, \Phi(\bar{x})) \left(1 + \frac{3}{r} d(\bar{y}, \Phi(x_0))\right) + \frac{3}{r} d(\bar{y}, \Phi(x_0)). \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая, что

$$d(y_k, \Phi(\bar{x})) \leq \|y_k - \bar{y}\|_Y, \quad d(\bar{y}, \Phi(x_0)) \leq \|y_k - \bar{y}\|_Y + d(y_k, \Phi(x_0)),$$

и обозначая для краткости $\alpha_k = \|y_k - \bar{y}\|_Y$, получаем, продолжая (6), оценку

$$\|x'_k - x_0\|_X \leq \frac{3}{r} d(y_k, \Phi(x_0)) + O(\alpha_k). \quad (7)$$

“Подправим” теперь x'_k так, чтобы новая последовательность принадлежала шару $B_X(x_0, (3/r)d(y_k, \Phi(x_0)))$. Для этого выберем для каждого $k \in \mathbb{N}$ такой элемент $x''_k \in \Phi^{-1}(y_k)$, что

$$\|x''_k - x_0\|_X \leq 2d(x_0, \Phi^{-1}(y_k)).$$

Отсюда и из теоремы Р-У при $x = x_0$ и $y = y_k$ следует, что

$$\|x''_k - x_0\|_X \leq \frac{2}{r} d(y_k, \Phi(x_0)). \quad (8)$$

Положим

$$x_k = (1 - \sqrt{\alpha_k})x'_k + \sqrt{\alpha_k}x''_k,$$

считая k столь большим, что $\alpha_k \in [0, 1]$. Тогда $x_k \in \Phi^{-1}(y_k)$ в силу выпуклости $\Phi^{-1}(y_k)$. Далее, с учетом (7) и (8) имеем

$$\begin{aligned} \|x_k - x_0\|_X &\leq (1 - \sqrt{\alpha_k})\|x'_k - x_0\|_X + \sqrt{\alpha_k}\|x''_k - x_0\|_X \\ &\leq \frac{3}{r} d(y_k, \Phi(x_0)) - \frac{\sqrt{\alpha_k}}{r} d(y_k, \Phi(x_0)) + o(\sqrt{\alpha_k}). \end{aligned}$$

Поскольку $d(y_k, \Phi(x_0)) \rightarrow d(\bar{y}, \Phi(x_0)) > 0$, то, начиная с некоторого номера,

$$x_k \in B_X\left(x_0, \left(\frac{3}{r}\right)d(y_k, \Phi(x_0))\right)$$

и, значит, $x_k \in \Psi(y_k)$.

По доказанному $x'_k \rightarrow \bar{x}$ при $k \rightarrow \infty$, а так как $\alpha_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, и последовательность $\{x''_k\}$ ограничена (см. (8)), то $x_k \rightarrow \bar{x}$ при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, доказано, что многозначное отображение Ψ полунепрерывно снизу в точке $\bar{y}$, а значит, на $B_Y(y_0, r)$.

По теореме Майкла о непрерывном селекторе существует непрерывное отображение $R: B_Y(y_0, r) \rightarrow X$ такое, что $R(y) \in \Psi(y)$ для каждого $y \in B_Y(y_0, r)$. Отсюда сразу следуют утверждения леммы с $\gamma = 3/r$ и, например, $W = U_Y(y_0, r)$.

Комментарии. Для случая, когда $A = \{F(\hat{x}, \hat{\sigma})\}$ (условие 3) теоремы в этой ситуации равносильно тому, что $\text{Im } F_x(\hat{x}, \hat{\sigma}) = Y$, теорема впервые была доказана в [3]. Утверждения теоремы в указанных предположениях, но без непрерывности отображения φ , следуют из теоремы устойчивости Робинсона [4]. Непрерывность φ доказана в [5], но с более слабой оценкой вида

$$\|\varphi(\xi, \sigma) - \xi\|_X \leq K \|F(\xi, \sigma) - F(\hat{x}, \hat{\sigma})\|_Y.$$

Отметим еще, что утверждения теоремы, снова без непрерывности φ , могут быть получены (правда, не для всех (ξ, σ) из окрестности $(\hat{x}, \hat{\sigma})$) и при более слабом, чем условие 3), предположении регулярности (см. [6]). Также при более слабом предположении регулярности в [7] для уравнения $F(x, \sigma) = 0$, $x \in A$, где A – конус, доказано существование непрерывного решения $\sigma \mapsto \varphi(\sigma)$, которое в регулярном случае (т.е. выполнено условие 3) теоремы) удовлетворяет выписанной выше оценке из [5] при $\xi = \hat{x}$.

В основе приведенного здесь доказательства лежит метод Ньютона, что позволяет “автоматически” получить для неявной функции квалифицированную оценку и с учетом леммы непрерывность этой функции. При этом схема доказательства точно такая же, как и для случая $A = \{F(\hat{x}, \hat{\sigma})\}$, который рассмотрен в [8].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ж.-П. Обен, И. Экланд, *Прикладной нелинейный анализ*, Мир, М., 1988.
- [2] E. Michael, “Continuous selections. I”, *Ann. of Math.* (2), **63**:2 (1956), 361–382.
- [3] В. М. Тихомиров, “Теорема о касательном пространстве и некоторые ее модификации”, *Оптимальное управление*, **7**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1977, 22–30.
- [4] S. M. Robinson, “Regularity and stability of convex multivalued functions”, *Math. Oper. Res.*, **1**:2 (1976), 130–143.
- [5] E. H. Chabi, H. Zouaki, “Existence of a continuous solution of parametric nonlinear equation with constraints”, *J. Convex Anal.*, **7**:2 (2000), 413–426.
- [6] A. V. Arutyunov, E. R. Avakov, A. F. Izmailov, “Directional regularity and metric regularity”, *SIAM J. Optim.*, **18**:3, 810–833.
- [7] А. В. Арутюнов, “Теорема о неявной функции без априорных предположений нормальности”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:2 (2006), 205–215.
- [8] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, “Метод Ньютона, дифференциальные уравнения и принцип Лагранжа для необходимых условий экстремума”, *Оптимальное управление*, Сборник статей. К 60-летию со дня рождения профессора Виктора Ивановича Благодатских, Тр. МИАН, **262**, МАИК, М., 2008, 156–177.

Е. Р. Аваков

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН

Г. Г. Магарил-Ильяев

Институт проблем передачи информации

им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва,

Южный математический институт

Владикавказского научного центра РАН

и Правительства Республики Северная Осетия-Алания

E-mail: magaril@mirea.ru

Поступило

28.09.2010

Исправленный вариант

13.01.2011