Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Бородин, О 2-чебышевских подпространствах в пространствах L_1 и C , *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 6, 819–831

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9384>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 13:18:51

О 2-чебышевских подпространствах в пространствах L_1 и C

П. А. Бородин

Получены описания подпространств 2-единственности и конечномерных 2-чебышевских подпространств в пространстве C функций, непрерывных на хаусдорфовом компакте, и в пространстве L_1 функций, суммируемых по Лебегу на некотором множестве с σ -конечной мерой. Эти описания являются аналогами известных теорем Хаара и Фелпса для обычных чебышевских подпространств.
Библиография: 19 названий.

Введение. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – действительное банахово пространство. Множество $M \subset X$ называется *чебышевским* [1], если для каждого $x \in X$ существует и единственен ближайший к x элемент в M , т.е. такой элемент $y \in M$, что

$$\|x - y\| = \rho(x, M) := \inf\{\|x - z\| : z \in M\}$$

(другими словами, для каждого $x \in X$ метрическая проекция $P_M(x) = \{y \in M : \|x - y\| = \rho(x, M)\}$ состоит ровно из одного элемента).

Известна трудная проблема выпуклости чебышевских множеств (см., например, работу [2]): всякое ли чебышевское множество в гильбертовом пространстве выпукло?

В работе [3] было введено понятие 2-чебышевского множества. Именно, для двух произвольных элементов $x_1, x_2 \in X$ и непустого множества $M \subset X$ положим

$$\rho(x_1, x_2; M) = \inf\{\|x_1 - y\| + \|x_2 - y\| : y \in M\}$$

– 2-расстояние от пары элементов x_1, x_2 до множества M ,

$$P_M(x_1, x_2) = \{y \in M : \|x_1 - y\| + \|x_2 - y\| = \rho(x_1, x_2; M)\}$$

– метрическая 2-проекция элементов x_1, x_2 на множество M . Точки из $P_M(x_1, x_2)$ можно понимать как обобщенные “точки отражения” световых лучей, идущих из x_1 в x_2 с “отражением” от множества M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество M называется 2-чебышевским, если для любых точек $x_1, x_2 \in X$ выполнено одно из следующих двух условий:

- (1) $\rho(x_1, x_2; M) > \|x_1 - x_2\|$ и $P_M(x_1, x_2)$ состоит ровно из одного элемента;
- (2) $\rho(x_1, x_2; M) = \|x_1 - x_2\|$ и $P_M(x_1, x_2) \neq \emptyset$.

Всякое 2-чебышевское множество является чебышевским: для любого элемента $x \in X$ имеем $\rho(x, M) = \rho(x, x; M)/2$, и для пары $x_1 = x$, $x_2 = x$ условие (1) в определении означает, что $\rho(x, M) > 0$ и в M существует единственный элемент, ближайший к x , а условие (2) означает, что $x \in M$.

Нетрудно привести пример чебышевского, но не 2-чебышевского множества: подпространство констант $Y = \{f(t) \equiv \text{const}\}$ в пространстве $X = C[0, 1]$. Хорошо известно, что Y – чебышевское подпространство. Однако оно не 2-чебышевское: для функций $f_1(t) = t + 1$ и $f_2(t) = t - 1$ имеем $\rho(f_1, f_2; Y) = 3 > 2 = \|f_1 - f_2\|$, и в то же время $\|f_1 - c\| + \|f_2 - c\| = 3$ для любой константы $c \in [0, 1]$.

В [3] было доказано, что в гильбертовом пространстве множество является 2-чебышевским тогда и только тогда, когда оно выпукло и замкнуто. В [4] анонсировано обобщение этого результата: в произвольном равномерно выпуклом банаховом пространстве множество является 2-чебышевским тогда и только тогда, когда оно выпукло и замкнуто. Таким образом, при замене свойства “чебышевское” на (вообще говоря, более сильное) свойство “2-чебышевское” проблема выпуклости имеет положительное решение.

В связи с этим естественно возникает желание исследовать 2-чебышевские множества в произвольных банаховых пространствах и получить для них аналоги известных результатов о чебышевских множествах. Одной из возможных задач здесь является задача описания 2-чебышевских подпространств.

Теория чебышевских подпространств в банаховых пространствах достаточно хорошо развита [5], [6]. Часто свойство чебышевности разделяется на два не зависящих друг от друга свойства единственности элемента наилучшего приближения и существования этого элемента. Именно, подпространство Y банахова пространства X называется *подпространством единственности* (соответственно *подпространством существования*), если для любого $x \in X$ метрическая проекция $P_Y(x)$ состоит не более чем из одной (соответственно не менее чем из одной) точки.

По аналогии с этими определениями подпространство Y банахова пространства X назовем *подпространством 2-единственности* (соответственно *подпространством 2-существования*), если для любых $x_1, x_2 \in X$ с $\rho(x_1, x_2; Y) > \|x_1 - x_2\|$ метрическая 2-проекция $P_Y(x_1, x_2)$ состоит не более чем из одной точки (соответственно $P_Y(x_1, x_2)$ непуста для любых $x_1, x_2 \in X$).

Нетрудно показать, что в строго выпуклом рефлексивном банаховом пространстве X всякое выпуклое замкнутое множество (в частности, замкнутое подпространство) является 2-чебышевским. Поэтому имеет смысл описывать 2-чебышевские подпространства в нерефлексивных или не строго выпуклых пространствах.

Основная цель настоящей работы состоит в описании подпространств 2-единственности и конечномерных 2-чебышевских подпространств в пространстве C непрерывных функций (теорема 1) и в пространстве L_1 суммируемых по Лебегу функций (теорема 2). Эти описания являются аналогами хорошо известных теорем Хаара и Фелпса. В целом можно сказать, что 2-чебышевских подпространств в этих пространствах существенно меньше, чем чебышевских (см. следствия из теорем 1 и 2).

Основным инструментом нашего исследования служат

ЛЕММА А [7]. Пусть Y – замкнутое линейное подпространство банахова пространства X и $x_1, x_2 \in X$. Элемент $y \in Y$ принадлежит множеству $P_Y(x_1, x_2)$ тогда и только тогда, когда найдутся такие функционалы $f_1, f_2 \in X^*$, что

- 1) $f_1 + f_2 \in Y^\perp$;
- 2) $\max\{\|f_1\|, \|f_2\|\} = 1$;
- 3) $f_j(x_j - y) = \|x_j - y\|$, $j = 1, 2$.

Последнее равенство означает, что либо $\|f_j\| = 1$, либо $x_j = y$.

В [7] доказано более общее утверждение (вместо линейного подпространства в нем фигурирует выпуклое множество, вместо двух точек – произвольное конечное число точек, и вместо суммы расстояний минимизируется сумма расстояний с неотрицательными весами). В то же время эта лемма является обобщением хорошо известного критерия элемента наилучшего приближения (см., например, [6]): $y \in P_Y(x)$ тогда и только тогда, когда найдется такой функционал $f \in Y^\perp$, что $\|f\| = 1$ и $f(x - y) = \|x - y\|$.

1. Пространство C . Ниже $C[K]$ обозначает пространство действительных функций, непрерывных на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве (компакте) K , с обычной равномерной нормой $\|x\| = \sup\{|x(t)| : t \in K\}$.

Каждая функция $x \in C[K]$ достигает своей нормы на непустом замкнутом подмножестве $M(x) = \{t \in K : |x(t)| = \|x\|\}$.

Сопряженным к $C[K]$ является пространство $\text{gsa}(K)$ всех регулярных счетно-аддитивных мер, определенных на σ -алгебре борелевских множеств из K (см., например, [8; гл. 4, § 6]). Именно, мера $\nu \in \text{gsa}(K)$ определяет функционал $\nu : x \rightarrow \int_K x d\nu$, $x \in C[K]$. Этот функционал достигает своей нормы в том и только том случае, когда положительная и отрицательная составляющие разложения Хана меры ν имеют непересекающиеся носители: $\text{supp } \nu_+ \cap \text{supp } \nu_- = \emptyset$. При этом норма достигается на любой функции $x \in C[K]$, для которой $M(x) \supseteq \text{supp } \nu$, $x(t) = \|x\|$ при $t \in \text{supp } \nu_+$ и $x(t) = -\|x\|$ при $t \in \text{supp } \nu_-$.

О чебышевских подпространствах в $C[K]$ см. [5], [6], [9]. Напомним два утверждения, аналоги которых для 2-приближений являются нашей целью.

ТЕОРЕМА А. 1) Подпространство $Y \subset C[K]$ не является подпространством единственности тогда и только тогда, когда найдется такой ненулевой функционал $\nu \in Y^\perp$, достигающий своей нормы, и такой ненулевой элемент $y \in Y$, что $y(t) = 0$ при $t \in \text{supp } \nu$ [10].

2) n -Мерное подпространство Y является чебышевским в $C[K]$ тогда и только тогда, когда всякая ненулевая функция $y \in Y$ обращается в нуль не более чем в $n - 1$ точках компакта K (теорема Хаара [11]).

Следующее утверждение является аналогом теоремы А в случае 2-приближений.

ТЕОРЕМА 1. 1) Подпространство $Y \subset C[K]$ не является подпространством 2-единственности тогда и только тогда, когда найдутся ненулевой функционал $\nu \in Y^\perp$, достигающий своей нормы, ненулевой элемент $y \in Y$ и число $a \geq 0$ такие, что $|y(t)| = a$ при $t \in \text{supp } \nu$.

2) n -Мерное подпространство Y является 2-чебышевским в $C[K]$ тогда и только тогда, когда всякая ненулевая функция $y \in Y$ обращается на K в нуль не более чем в $n - 1$ точках и $|y|$ принимает всякое свое положительное значение не более чем в n точках.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) *Необходимость.* Пусть Y не является подпространством 2-единственности в $C[K]$, т.е. имеются такие $x_1, x_2 \in C[K]$, что $\rho(x_1, x_2; Y) > \|x_1 - x_2\|$ и метрическая 2-проекция $P_Y(x_1, x_2)$ содержит без ограничения общности элементы 0 и $y \neq 0$ (а значит, и весь отрезок $[0, y]$). Ни один из x_j не равен 0. По лемме А найдутся такие функционалы-меры $\nu_1, \nu_2 \in (C[K])^*$, что

$$\nu := \nu_1 + \nu_2 \in Y^\perp, \quad \|\nu_j\| = 1, \quad \nu_j(x_j) = \|x_j\|, \quad j = 1, 2.$$

При этом $\text{supp}(\nu_1)_+ \cap \text{supp}(\nu_2)_- = \emptyset$ и $\text{supp}(\nu_1)_- \cap \text{supp}(\nu_2)_+ = \emptyset$, поскольку если хоть одно из этих пересечений содержит точку $t \in K$, то функции x_1 и x_2 достигают в t своих норм с разными знаками, т.е. $\rho(x_1, x_2; Y) = \|x_1 - x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$ — противоречие с указанным выше неравенством. Следовательно, $\nu_+ = (\nu_1)_+ + (\nu_2)_+$, $\nu_- = (\nu_1)_- + (\nu_2)_-$, $\text{supp } \nu_+ \cap \text{supp } \nu_- = \emptyset$, так что функционал ν не равен 0 и достигает своей нормы.

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \|x_1\| + \|x_2\| &= \|x_1 - y\| + \|x_2 - y\| \\ &\geq \nu_1(x_1 - y) + \nu_2(x_2 - y) = \nu_1(x_1) + \nu_2(x_2) = \|x_1\| + \|x_2\|, \end{aligned}$$

откуда

$$\nu_j(x_j - y) = \|x_j - y\|, \quad j = 1, 2.$$

Таким образом, функции x_j и $x_j - y$ на множестве $\text{supp}(\nu_j)_+$ равны соответственно $\|x_j\|$ и $\|x_j - y\|$, а на множестве $\text{supp}(\nu_j)_-$ они равны соответственно $-\|x_j\|$ и $-\|x_j - y\|$, $j = 1, 2$. Поэтому величина $|y|$ на $\text{supp } \nu$ постоянна и равна

$$a := \|\|x_1\| - \|x_1 - y\|\| = \|\|x_2\| - \|x_2 - y\|\|.$$

Достаточность. Без ограничения общности считаем $\|\nu\| = 2$, $\|y\| = 1$ и $0 < a \leq 1$ (если $a = 0$, то Y не является подпространством единственности, а значит, и подпространством 2-единственности уже по теореме А). Поскольку ν достигает своей нормы, замкнутые множества $\text{supp } \nu_+$ и $\text{supp } \nu_-$ не пересекаются.

Положим

$$\begin{aligned} E_1^+ &= \text{supp } \nu_+ \cap \{t \in K : y(t) = a\}, & E_1^- &= \text{supp } \nu_- \cap \{t \in K : y(t) = -a\}, \\ E_2^+ &= \text{supp } \nu_+ \cap \{t \in K : y(t) = -a\}, & E_2^- &= \text{supp } \nu_- \cap \{t \in K : y(t) = a\} \end{aligned}$$

(четыре замкнутых попарно не пересекающихся множества),

$$E_j := E_j^+ \cup E_j^-, \quad \nu_j := \nu|_{E_j}, \quad j = 1, 2.$$

Имеем $E_1 \cup E_2 = \text{supp } \nu$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $\nu = \nu_1 + \nu_2$, $2 = \|\nu\| = \|\nu_1\| + \|\nu_2\|$, а также

$$0 = \nu(y) = \nu_1(y) + \nu_2(y) = \|\nu_1\| \cdot a + \|\nu_2\| \cdot (-a),$$

откуда $\|\nu_1\| = \|\nu_2\| = 1$.

Возьмем такие открытые окрестности U_1 и U_2 множеств E_1 и E_2 соответственно, что $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ и $||y(t)| - a| < a$ на $U_1 \cup U_2$ (компакт K нормален). С помощью леммы Урысона [12; гл. 4, § 8] построим такие функции $q_1, q_2 \in C[K]$, что

$$\begin{aligned} -1 \leq q_j(t) \leq 1 \quad \text{при всех } t \in K, \quad q_j(t) = 1 \quad \text{при } t \in E_j^+, \\ q_j(t) = -1 \quad \text{при } t \in E_j^-, \quad q_j(t) = 0 \quad \text{при } t \notin U_j, \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

и $\text{sgn } q_1(t) = \text{sgn } y(t)$ при $t \in U_1$.

Положим

$$x_j := (4 - ||y| - a|)q_j, \quad j = 1, 2.$$

Имеем $\|x_j\| = 4\|q_j\| = 4$, $x_j(t) = 4$ при $t \in E_j^+$ и $x_j(t) = -4$ при $t \in E_j^-$, так что $\nu_j(x_j) = \|x_j\|$, $j = 1, 2$, $0 \in P_Y(x_1, x_2)$ по лемме A и

$$\rho(x_1, x_2; Y) = \|x_1\| + \|x_2\| = 8 > 4 = \|x_1 - x_2\|.$$

Покажем, что $\|x_1 - y\| = 4 - a$. Для $t \in E_1$ имеем $|(x_1 - y)(t)| = 4 - a$. Для тех точек $t \in U_1$, в которых $|q_1(t)| > a/3$, имеем $\operatorname{sgn} q_1(t) = \operatorname{sgn} y(t)$, и

$$\begin{aligned} |(x_1 - y)(t)| &= |q_1(t)(4 - ||y(t)| - a|) - y(t)| = ||q_1(t)|(4 - ||y(t)| - a|) - a + a - |y(t)|| \\ &\leq |q_1(t)|(4 - ||y(t)| - a|) - a + ||y(t)| - a| \\ &= 4 - a + (1 - |q_1(t)|)(||y(t)| - a| - 4) \leq 4 - a, \end{aligned}$$

где в первом неравенстве мы использовали то, что

$$|q_1(t)|(4 - ||y(t)| - a|) > \frac{a}{3}(4 - 1) = a.$$

Для тех точек $t \in K$, в которых $|q(t)| \leq a/3$, имеем

$$|(x_1 - y)(t)| \leq |q_1(t)(4 - ||y(t)| - a|) + |y(t)| \leq \frac{a}{3} \cdot 4 + 1 \leq \frac{7}{3} < 4 - a.$$

Покажем, что $\|x_2 - y\| = 4 + a$. Для $t \in E_2$ имеем $|(x_2 - y)(t)| = 4 + a$. В то же время для любого $t \in K$ имеем

$$\begin{aligned} |(x_2 - y)(t)| &\leq |q_2(t)|(4 - ||y(t)| - a|) + |y(t)| \\ &\leq |q_2(t)|(4 - ||y(t)| - a|) + a + ||y(t)| - a| \\ &= 4 + a + (1 - |q_2(t)|)(||y(t)| - a| - 4) \leq 4 + a. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\|x_1 - y\| + \|x_2 - y\| = 4 - a + 4 + a = 8 = \rho(x_1, x_2; Y), \quad y \in P_Y(x_1, x_2),$$

и Y не является подпространством 2-единственности.

2) *Необходимость.* Пусть Y — n -мерное 2-чебышевское подпространство в $C[K]$. По доказанному первому утверждению теоремы для любого $a \geq 0$ и для любого ненулевого $y \in Y$ множество $|y|^{-1}(a) = \{t \in K : |y(t)| = a\}$ не содержит носитель $\operatorname{supp} \nu$ ни для какого ненулевого функционала $\nu \in Y^\perp$, достигающего своей нормы. В случае $a = 0$ это означает, что множество $|y|^{-1}(0) = y^{-1}(0)$ содержит не более $n - 1$ точек: если различные точки $t_1, \dots, t_n \in y^{-1}(0)$, то сужение $Y|_{\{t_1, \dots, t_n\}}$ не более чем $(n - 1)$ -мерно и найдется ненулевой функционал

$$\nu = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{t_j} \in Y^\perp, \quad \nu(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x(t_j),$$

который достигает своей нормы и имеет носитель в множестве $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq y^{-1}(0)$. В случае же $a > 0$ условие $|y|^{-1}(a) \not\supseteq \operatorname{supp} \nu$ означает, что $|y|^{-1}(a)$ содержит не

более n точек: если различные точки $t_1, \dots, t_{n+1} \in |y|^{-1}(a)$, то, поскольку сужение $Y|_{\{t_1, \dots, t_{n+1}\}}$ не более чем n -мерно, найдется ненулевой функционал $\nu = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \delta_{t_j} \in Y^\perp$, достигающий своей нормы и имеющий носитель в множестве $|y|^{-1}(a)$.

Достаточность. Пусть для всякой ненулевой функции $y \in Y$ множество $|y|^{-1}(a)$ не более чем $(n-1)$ -точечно при $a = 0$ и не более чем n -точечно при $a > 0$. Если подпространство Y не 2-чебышевское, то оно не является подпространством 2-единственности. Тогда по доказанному утверждению 1) теоремы найдется ненулевой функционал $\nu \in Y^\perp$ с $\text{supp } \nu \subseteq |y|^{-1}(a)$ для некоторого $y \in Y$, $y \neq 0$, и некоторого $a \geq 0$. Получается, что $\text{supp } \nu$ состоит из $m \leq n$ точек компакта K . Но тогда сужение $Y|_{\text{supp } \nu}$ имеет размерность не более $m-1$, подпространство $Y_0 = \{y \in Y : y(t) = 0 \text{ для всех } t \in \text{supp } \nu\}$ имеет размерность не менее $n-m+1$, а значит, найдется ненулевая функция $y \in Y_0$, которая обращается в нуль не только на $\text{supp } \nu$, но еще в $n-m$ различных точках из $K \setminus \text{supp } \nu$. Всего нулей у функции y получается не меньше $m + (n-m) = n$, что противоречит условию.

Теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Если подпространство $Y \subset C[K]$ содержит функцию $x(t) \equiv 1$, то оно не является 2-чебышевским.

Утверждение этого следствия было впервые доказано учеником автора Е. А. Душистовым в его дипломной работе в 2007 г.

Для существования нетривиальных конечномерных 2-чебышевских (а значит, чебышевских) подпространств в $C[K]$ необходимо, чтобы компакт K непрерывно вкладывался в окружность [13]. В ряде случаев это необходимое условие можно усилить.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Если $C[K]$ содержит 2-чебышевское подпространство Y размерности $n \geq 3$, то K непрерывно вкладывается в окружность и не содержит подмножеств, гомеоморфных отрезку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если K содержит отрезок I , то в Y можно найти ненулевую функцию y_0 с нулями в $n-1$ различных внутренних точках $t_1, \dots, t_{n-1}$ отрезка I . По теореме 1 больше нулей у y_0 нет, и тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ множество $|y_0|^{-1}(\varepsilon)$ содержит $2(n-1) > n$ точек из правых и левых окрестностей (на I) точек $t_1, \dots, t_{n-1}$.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. В пространстве $C[a, b]$ нет 2-чебышевских подпространств конечной размерности ≥ 3 .

Одномерные 2-чебышевские подпространства в $C[a, b]$ есть – это в точности подпространства, порождаемые положительными строго монотонными функциями.

Было бы интересно описать двумерные 2-чебышевские подпространства в $C[a, b]$. Примером такого подпространства служит подпространство, порожденное функциями t и t^2 в пространстве $C[1, 2]$.

Было бы интересно выяснить, не является ли необходимое условие на K из следствия 1.2 также и достаточным для существования в $C[K]$ 2-чебышевских подпространств произвольной конечной размерности.

2. Пространство L_1 . Ниже $L_1(E) = L_1(E, \Sigma, \mu)$ обозначает пространство действительных функций, определенных на множестве E произвольной природы

и суммируемых на E по положительной мере μ , заданной на σ -алгебре Σ подмножеств этого множества. Для каждой функции $x \in L_1(E)$ определен ее носитель $\text{supp } x := \{t \in E : x(t) \neq 0\}$.

Мера μ предполагается σ -конечной. В этом случае сопряженным к $L_1(E)$ является пространство $L_\infty(E)$ функций, существенно ограниченных на E (см., например, [8; гл. 4, § 8]). Именно, функция $f \in L_\infty(E)$ определяет функционал $f : x \rightarrow \int_E f x d\mu$, $x \in L_1(E)$. Этот функционал достигает своей нормы в том и только том случае, когда функция f по модулю равна своей норме $\|f\| = \text{ess sup}\{|f(t)| : t \in E\}$ на множестве положительной меры, которое обозначим $M(f)$. При этом норма функционала f достигается на любом элементе $x \in L_1(E)$, носитель которого $\text{supp } x \subseteq M(f)$ и который удовлетворяет равенству $\text{sgn } x(t) = f(t)/\|f\|$ для почти всех $t \in \text{supp } x$. Обозначим также $Z(f) = \{t \in E : f(t) = 0\}$.

Разумеется, множества $\text{supp } x$, $M(f)$, $Z(f)$ определены с точностью до множества меры нуль. Приводимые ниже равенства и включения множеств также понимаются с точностью до множества меры нуль.

Напомним некоторые известные результаты о приближениях в $L_1(E)$.

ТЕОРЕМА В. 1) Подпространство $Y \subset L_1(E)$ не является подпространством единственности тогда и только тогда, когда найдутся такие ненулевой функционал $f \in Y^\perp$ и ненулевой элемент $y \in Y$, что $\text{supp } y \subseteq M(f)$ [14].

2) n -Мерное подпространство Y является чебышевским в $L_1(E)$ тогда и только тогда, когда не существует такого ненулевого функционала $f \in Y^\perp$, что разность $E \setminus M(f)$ состоит из менее чем n атомов [14].

Следующее утверждение является аналогом теоремы В в случае 2-приближений.

ТЕОРЕМА 2. 1) Подпространство $Y \subset L_1(E)$ не является подпространством 2-единственности тогда и только тогда, когда найдутся такие ненулевой функционал $f \in Y^\perp$ с $\mu(M(f)) > 0$ и ненулевой элемент $y \in Y$, что $\text{supp } y \subseteq M(f) \cup Z(f)$.

2) n -Мерное подпространство Y является 2-чебышевским в $L_1(E)$ тогда и только тогда, когда не существует такого ненулевого функционала $f \in Y^\perp$, что разность $E \setminus (M(f) \cup Z(f))$ состоит из менее чем n атомов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) *Необходимость.* Пусть Y не является подпространством 2-единственности, т.е. существуют такие элементы $x_1, x_2 \in L_1(E)$ и ненулевой элемент $y \in Y$, что

$$\|x_1\| + \|x_2\| = \|x_1 - y\| + \|x_2 - y\| = \rho(x_1, x_2; Y) > \|x_1 - x_2\|.$$

Ни один из x_j не равен 0.

Тогда по лемме А найдутся функционалы f_1, f_2 со свойствами

$$f := f_1 + f_2 \in Y^\perp, \quad \|f_j\| = 1, \quad f_j(x_j) = \|x_j\|, \quad j = 1, 2,$$

и, в частности, $\text{supp } x_j \subseteq M(f_j)$, $j = 1, 2$. Из цепочки

$$\|x_1 - y\| + \|x_2 - y\| \geq f_1(x_1 - y) + f_2(x_2 - y) = f_1(x_1) + f_2(x_2) = \|x_1\| + \|x_2\|$$

получаем $f_j(x_j - y) = \|x_j - y\|$, откуда $\text{supp}(x_j - y) \subseteq M(f_j)$, что вместе с отмеченными выше включениями $\text{supp } x_j \subseteq M(f_j)$ влечет $\text{supp } y \subseteq M(f_j)$, $j = 1, 2$, т.е. $\text{supp } y \subseteq M(f_1) \cap M(f_2)$, и последнее пересечение имеет положительную меру.

Если для почти всех $t \in M(f_1) \cap M(f_2)$ выполнено равенство $f_1(t) = -f_2(t)$, то $\text{sgn } x_1(t) = -\text{sgn } x_2(t)$ для почти всех $t \in M(f_1) \cap M(f_2)$, и

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\| &= \int_{M(f_1) \setminus M(f_2)} |x_1| d\mu + \int_{M(f_2) \setminus M(f_1)} |x_2| d\mu + \int_{M(f_1) \cap M(f_2)} (|x_1| + |x_2|) d\mu \\ &= \|x_1\| + \|x_2\|, \end{aligned}$$

а это противоречит указанному выше неравенству $\|x_1 - x_2\| < \|x_1\| + \|x_2\|$. Следовательно, множество

$$\{t \in M(f_1) \cap M(f_2) : f_1(t) = f_2(t)\} = M(f)$$

имеет положительную меру, $M(f_1) \cap M(f_2) \subseteq M(f) \cup Z(f)$, так что $\text{supp } y$ лежит в последнем объединении.

Достаточность. Пусть $f \in Y^\perp$, $\mu(M(f)) > 0$, $\|f\| = 1$ и $y \in Y$, $y \neq 0$, $\text{supp } y \subseteq M(f) \cup Z(f)$. Возьмем две функции в $L_\infty(E)$:

$$f_j(t) = \begin{cases} (-1)^j, & t \in Z(f), \\ f(t), & t \notin Z(f), \end{cases} \quad j = 1, 2.$$

Задаваемые этими функциями функционалы на $L_1(E)$ обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \|f_1\| = \|f_2\| &= 1, \quad f_1 + f_2 = 2f \in Y^\perp, \\ \text{supp } y \subseteq M(f_j) &= M(f) \cup Z(f), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Возьмем две функции $x_1, x_2 \in L_1(E)$ со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \text{supp } x_j &\subseteq M(f_j), \quad f_j(x_j) = \|x_j\|, \quad j = 1, 2, \\ x_1(t) &= x_2(t) \quad \text{для любого } t \in M(f), \\ |x_j(t)| &> 2|y(t)| \quad \text{для любого } t \in M(f) \cup Z(f). \end{aligned}$$

По лемме А имеем $P_Y(x_1, x_2) \ni 0$. Кроме того,

$$\|x_1 - x_2\| = \int_{Z(f)} (|x_1| + |x_2|) d\mu < \|x_1\| + \|x_2\| = \rho(x_1, x_2; Y)$$

и

$$\begin{aligned} \|x_1 - y\| + \|x_2 - y\| &= f_1(x_1 - y) + f_2(x_2 - y) \\ &= f_1(x_1) + f_2(x_2) = \|x_1\| + \|x_2\| = \rho(x_1, x_2; Y), \end{aligned}$$

так что подпространство Y не является подпространством 2-единственности.

2) *Необходимость.* Если есть такой функционал $f \in Y^\perp$, что множество $G := E \setminus (M(f) \cup Z(f))$ состоит из менее чем n атомов, то подпространство $V = \{x \in L_1(E) : x|_G \equiv 0\}$ имеет коразмерность меньше n , а значит, найдется ненулевой элемент

$y \in V \cap Y$. Имеем $\text{supp } y \subseteq M(f) \cup Z(f)$, откуда по доказанному пункту 1) подпространство Y не является 2-чебышевским.

Достаточность. Если подпространство Y не 2-чебышевское, то по доказанному пункту 1) существуют такие ненулевые $g \in Y^\perp$ и $y \in Y$, что $\mu(M(g)) > 0$ и $\text{supp } y \subseteq M(g) \cup Z(g)$. Пусть $E' = E \setminus Z(g)$, g' – сужение g на E' , y' – сужение y на E' , Y' – подпространство, образованное сужениями функций из Y на E' . Имеем $Y' \subset L_1(E')$.

Если $\dim Y' < n$, то найдется $f' \in L_\infty(E')$ со следующими свойствами: $f' \in (Y')^\perp$ и разность $E' \setminus M(f')$ состоит из менее чем n атомов (построение такого f' см. в [14]).

Если же $\dim Y' = n$, то $y' \neq 0$, $g' \in (Y')^\perp$, и $\text{supp } y' \subseteq M(g') = M(g)$, так что Y' не является чебышевским в $L_1(E')$ по утверждению 1) теоремы В, и по утверждению 2) теоремы В опять найдется функционал $f' \in L_\infty(E')$ со следующими свойствами: $f' \in (Y')^\perp$ и $E' \setminus M(f')$ состоит из менее чем n атомов.

Полагая $f(t) = f'(t)$ при $t \in E'$ и $f(t) = 0$ при $t \in Z(g)$, получаем требуемый функционал $f \in L_\infty(E)$: $f \in (Y)^\perp$ и $E \setminus (M(f) \cup Z(f))$ состоит из менее чем n атомов.

Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если мера μ на E имеет безатомную часть положительной меры, то в $L_1(E, \mu)$ нет нетривиальных конечномерных 2-чебышевских подпространств.

Это утверждение является аналогом известного результата Фелпса [15] (который, впрочем, в [14] приписывает его другому автору) о том, что в пространствах $L_1(E, \mu)$ с неатомной мерой μ нет нетривиальных конечномерных чебышевских подпространств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E_0 – безатомная часть множества E , $\mu(E_0) > 0$, $Y \subset L_1(E)$ – подпространство конечной ненулевой размерности, $Y_0 \subset L_1(E_0)$ – подпространство, образованное сужениями функций из Y на множество E_0 . Как и в [15], с помощью теоремы А. А. Ляпунова находим такой функционал $f_0 \in L_\infty(E_0)$, что $M(f_0) = E_0$ и $f_0 \in Y_0^\perp$. Тогда функционал

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t), & t \in E_0, \\ 0, & t \in E \setminus E_0, \end{cases}$$

лежит в аннуляторе $Y^\perp$ и для любого $y \in Y$ имеем $\text{supp } y \subseteq M(f) \cup Z(f)$, так что по теореме 2 Y не является подпространством 2-единственности.

Следствие доказано.

Подобными рассуждениями нетрудно доказать и более общий факт: в банаховом пространстве вида $L_1(E, \mu) \times B$, где мера μ на E имеет безатомную часть положительной меры, B – произвольное банахово пространство, с нормой $\|(x, b)\| = \|x\|_{L_1} + \|b\|_B$, нет нетривиальных конечномерных 2-чебышевских подпространств.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Одномерное подпространство $Y \subset l_1$, порожденное вектором $(y^1, y^2, \dots) \in l_1$, является 2-чебышевским в l_1 тогда и только тогда, когда для любого непустого подмножества $\Lambda \subset \mathbb{N}$ и любого набора знаков $\sigma_n \in \{\pm 1\}$ имеет место неравенство

$$\sum_{n \in \Lambda} \sigma_n y^n \neq 0.$$

В пространстве $L_1[a, b]$ на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ с классической мерой Лебега нет чебышевских – а значит, и 2-чебышевских – подпространств с конечной ненулевой размерностью или коразмерностью [16]. Большинство известных чебышевских подпространств этого пространства также оказываются не 2-чебышевскими. Например, подпространство

$$Y_1 = \left\{ x \in L_1[0, 1] : x(t) = 0 \text{ для всех } t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right\}$$

и известное подпространство П. Морриса

$$Y_2 = \left\{ x \in L_1[0, 1] : x(t) = x\left(t + \frac{1}{3}\right) = x\left(t + \frac{2}{3}\right) \text{ для всех } t \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \right\}$$

являются чебышевскими (см. [15], [17]), но не являются 2-чебышевскими по теореме 2: функционалы $f_1 = I_{[1/2, 1]}$ и $f_2 = I_{[0, 1/3]} - I_{[1/3, 2/3]}$ принадлежат аннуляторам $Y_1^\perp$ и $Y_2^\perp$ соответственно, а $M(f_j) \cup Z(f_j) = [0, 1]$, $j = 1, 2$.

Можно показать, что всякое чебышевское подпространство $Y \subset L_1[a, b]$ из класса, описанного в теореме 2 работы [18], не является 2-чебышевским.

Тем не менее, 2-чебышевские подпространства в $L_1[a, b]$ все же существуют.

ТЕОРЕМА 3. Пусть действительнoзначная измеримая функция $K(s, t)$, определенная при $s \in [-1, 0]$ и при $t \in [0, 1]$, обладает следующими свойствами:

- $|K(s, t)| < 1$ почти всюду на $[-1, 0] \times [0, 1]$;
- для всякой ненулевой функции $h \in L_\infty[0, 1]$ интеграл $\int_0^1 K(s, t)h(t) dt$ как функция $s \in [-1, 0]$ является ненулевым и аналитически продолжается в некоторую окрестность U отрезка $[-1, 0]$.

Тогда подпространство

$$Y = \left\{ y \in L_1[-1, 1] : y(t) = \int_{-1}^0 K(s, t)y(s) ds \text{ для всех } t \in [0, 1] \right\}$$

является 2-чебышевским в $L_1[-1, 1]$.

В качестве функции K можно взять, например, $K(s, t) = e^{st}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если представлять элементы пространства $L_1[-1, 1]$ как пары (u, v) , где $u \in L_1[-1, 0]$, а $v \in L_1[0, 1]$, то элементам подпространства Y соответствуют пары (u, Au) , где

$$A: L_1[-1, 0] \rightarrow L_1[0, 1], \quad (Au)(t) = \int_{-1}^0 K(s, t)u(s) ds,$$

– линейный оператор, уменьшающий норму всякого элемента $u \neq 0$:

$$\|Au\| \leq \int_0^1 \int_{-1}^0 |K(s, t)u(s)| ds dt < \int_0^1 \int_{-1}^0 |u(s)| ds dt = \|u\|$$

(мы использовали свойство а) функции K). Согласно теореме Морриса [17] Y – чебышевское подпространство с линейным оператором метрического проектирования.

Всякий ненулевой функционал $f \in Y^\perp$ имеет вид

$$f = (-A'h, h) = \left(- \int_0^1 K(s, t)h(t) dt, h(t) \right),$$

где $s \in [-1, 0]$, $t \in [0, 1]$, $h \in L_\infty[0, 1]$, $h \neq 0$ (здесь $L_\infty[-1, 1]$ тоже представлено как пространство пар функций). Для такого f имеем $M(f) \subset [0, 1]$ (поскольку $\|A'h\| < \|h\|$ для любого $h \neq 0$ в силу свойства а) функции K) и $\mu(Z(f) \cap [-1, 0]) = 0$ (поскольку на отрезке $[-1, 0]$ функционал f задается ненулевой функцией $-\int_0^1 K(s, t)h(t) dt$, аналитической в U и имеющей конечное множество нулей на отрезке $[-1, 0]$ – в силу свойства б) функции K). В то же время для всякого ненулевого элемента $y \in Y$ выполнено неравенство $\mu(\text{supp } y \cap [-1, 0]) > 0$, а значит, $\text{supp } y \not\subset M(f) \cup Z(f)$. Следовательно, по теореме 2 Y является подпространством 2-единственности.

Докажем, что оно является и подпространством 2-существования. Пусть даны два элемента $x_1 = (a_1, b_1)$ и $x_2 = (a_2, b_2)$ из $L_1[-1, 1]$ и элементы $y_n = (u_n, Au_n) \in Y$ таковы, что

$$\|x_1 - y_n\| + \|x_2 - y_n\| \rightarrow \rho(x_1, x_2; Y) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Покажем, что функции $u_n \in L_1[-1, 0]$ можно считать лежащими в множестве

$$\begin{aligned} S(a_1, a_2) &:= \{u \in L_1[-1, 0] : \|u - a_1\| + \|u - a_2\| = \|a_1 - a_2\|\} \\ &= \{u \in L_1[-1, 0] : \\ &\quad \min\{a_1(s), a_2(s)\} \leq u(s) \leq \max\{a_1(s), a_2(s)\} \text{ для п.в. } s \in [-1, 0]\}. \end{aligned}$$

Если, скажем, для какого-то натурального n неравенство $u_n(s) > \max\{a_1(s), a_2(s)\}$ выполняется при $s \in G$ и $\mu(G) > 0$, то для

$$u = (u_n - \max\{a_1, a_2\}) \cdot I_G, \quad y'_n = (u_n - u, A(u_n - u))$$

имеем

$$\begin{aligned} \|x_1 - y'_n\| + \|x_2 - y'_n\| &= \|a_1 - u_n + u\| + \|a_2 - u_n + u\| + \|b_1 - Au_n + Au\| + \|b_2 - Au_n + Au\| \\ &= \|a_1 - u_n\| - \|u\| + \|a_2 - u_n\| - \|u\| + \|b_1 - Au_n + Au\| + \|b_2 - Au_n + Au\| \\ &\leq \|a_1 - u_n\| + \|a_2 - u_n\| - 2\|u\| + \|b_1 - Au_n\| + \|b_2 - Au_n\| + 2\|Au\| \\ &< \|a_1 - u_n\| + \|a_2 - u_n\| + \|b_1 - Au_n\| + \|b_2 - Au_n\| = \|x_1 - y_n\| + \|x_2 - y_n\|. \end{aligned}$$

Итак, с самого начала можно считать, что $u_n \in S(a_1, a_2)$.

Для всякой функции $u \in S(a_1, a_2)$ и для п.в. $s \in [-1, 0]$ выполнено неравенство $|u(s)| \leq \max\{|a_1(s)|, |a_2(s)|\}$, поэтому множество $S(a_1, a_2)$ является равномерно интегрируемым в $L_1[-1, 0]$, т.е.

$$\lim_{C \rightarrow +\infty} \sup_{u \in S(a_1, a_2)} \int_{\{|u| > C\}} |u| ds = 0$$

(см. [19; определение 4.5.1]). Поскольку $S(a_1, a_2)$ еще и выпукло и замкнуто, оно является слабо компактным в $L_1[-1, 0]$ (по теореме 4.7.18 из [19] равномерная интегрируемость равносильна компактности замыкания в слабой топологии в $L_1[-1, 0]$),

так что по теореме Эберлейна–Шмульяна из последовательности u_n можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в $L_1[-1, 0]$ к некоторому элементу $u^* \in S(a_1, a_2)$. Но тогда $\|Au_n - Au^*\| \rightarrow 0$ (оператор A компактный) и

$$\begin{aligned} \rho(x_1, x_2; Y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\|a_1 - u_n\| + \|a_2 - u_n\| + \|b_1 - Au_n\| + \|b_2 - Au_n\|) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\|a_1 - a_2\| + \|b_1 - Au_n\| + \|b_2 - Au_n\|) \\ &= \|a_1 - u^*\| + \|a_2 - u^*\| + \|b_1 - Au^*\| + \|b_2 - Au^*\| \\ &= \|x_1 - y^*\| + \|x_2 - y^*\|, \end{aligned}$$

где $y^* := (u^*, Au^*) \in Y$. Таким образом, Y – подпространство 2-существования.

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин, “Некоторые свойства чебышевских множеств”, *ДАН СССР*, **118**:1 (1958), 17–19.
- [2] В. С. Балаганский, Л. П. Власов, “Проблема выпуклости чебышёвских множеств”, *УМН*, **51**:6(312) (1996), 125–188.
- [3] П. А. Бородин, “Выпуклость 2-чебышевских множеств в гильбертовом пространстве”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2008, № 3, 16–19.
- [4] П. А. Бородин, “О выпуклости N -чебышевских множеств”, *Теория приближений*, Тезисы докладов международной конференции, посвященной 90-летию С. Б. Стечкина, М., 2010, 11–12.
- [5] А. Л. Гаркави, “Теория наилучшего приближения в линейных нормированных пространствах”, *Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анализ*. 1967, ВИНТИ, М., 1969, 75–132.
- [6] I. Singer, *Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces*, Grundlehren Math. Wiss., **171**, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [7] Г. Ш. Рубинштейн, “Об одной экстремальной задаче в линейном нормированном пространстве”, *Сиб. матем. журн.*, **6**:3 (1965), 711–714.
- [8] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*. Т. 1. *Общая теория*, ИЛ, М., 1962.
- [9] E. W. Cheney, D. E. Wulbert, “The existence and unicity of best approximations”, *Math. Scand.*, **24**:1 (1969), 113–140.
- [10] R. R. Phelps, “Čebyšev subspaces of finite codimension in $C(X)$ ”, *Pacific J. Math.*, **13**:2 (1963), 647–655.
- [11] A. Haar, “Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen”, *Math. Ann.*, **78**:1-4 (1917), 294–311.
- [12] П. С. Александров, *Введение в теорию множеств и общую топологию*, Физматлит, М., 2009.
- [13] J. C. Mairhuber, “On Haar’s theorem concerning Chebychev approximation problems having unique solutions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7**:4 (1956), 609–615.
- [14] R. R. Phelps, “Čebyšev subspaces of finite dimension in L_1 ”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17**:3 (1966), 646–652.
- [15] R. R. Phelps, “Uniqueness of Hahn-Banach extensions and unique best approximation”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **95**:2 (1960), 238–255.
- [16] М. Крейн, “ L -проблема в абстрактном линейном нормированном пространстве”: Н. Ахиезер, М. Крейн, *О некоторых вопросах теории моментов*, ГОНТИ, Харьков, 1938.
- [17] P. D. Morris, “Chebyshev subspaces of L_1 with linear metric projection”, *J. Approx. Theory*, **29**:3 (1980), 231–234.

- [18] П. А. Бородин, “О линейности оператора метрического проектирования на чебышевские подпространства в пространствах L_1 и C ”, *Матем. заметки*, **63**:6 (1998), 812–820.
- [19] В. И. Богачев, *Основы теории меры*, Т. 1, НИЦ РХД, Ижевск, 2003.

П. А. Бородин

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: pborodin@inbox.ru

Поступило

29.09.2010

Исправленный вариант

12.12.2010