Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Фаньола, Л. Панталеон Мартинес, Будут ли достаточные условия консервативности минимальных квантовых динамических полугрупп также необходимыми условиями?, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 6, 900–907

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9385>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 16:02:45

Будут ли достаточные условия консервативности минимальных квантовых динамических полугрупп также необходимыми условиями?

Ф. Фаньола, Л. Панталеон Мартинес

Приведен контрпример, показывающий, что два основных операторных неравенства, входящих в обычные достаточные условия консервативности минимальных квантовых динамических полугрупп, фактически также являются необходимыми условиями.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Пусть $\mathfrak{h}$ – комплексное сепарабельное гильбертово пространство, $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ – алгебра всех ограниченных операторов на $\mathfrak{h}$ и $\mathbf{1}$ – единичный оператор. Минимальные квантовые динамические полугруппы на $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ строятся с помощью производящего оператора $\mathcal{L}$, ассоциированного с неограниченным производящим оператором G сильно непрерывной полугруппы сжатий на пространстве $\mathfrak{h}$ и семейством $(L_\ell)_{\ell \geq 1}$ операторов на пространстве $\mathfrak{h}$, области определения которых $\text{Dom}(L_\ell)$ содержат область определения $\text{Dom}(G)$ производящего оператора G так, что соотношение

$$\langle v, Gu \rangle + \sum_{\ell \geq 1} \langle L_\ell v, L_\ell u \rangle + \langle Gv, u \rangle = 0 \quad (1)$$

выполняется при всех $v, u \in \text{Dom}(G)$. Это построение, обобщающее метод, введенный Феллером для полугрупп непрерывных во времени марковских цепей на коммутативной алгебре $\ell^\infty(E)$, где E счетно (см. [1]– [3] и приведенные там ссылки), приводит к слабо*-непрерывной полугруппе на $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ так, что соотношение

$$\langle v, \mathcal{T}_t(x)u \rangle = \langle v, xu \rangle + \int_0^t \mathcal{L}(\mathcal{T}_s(x))[v, u] ds \quad (2)$$

выполняется при всех $t \geq 0$, $x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ и $v, u \in \text{Dom}(G)$, где $\mathcal{L}(x)$ – квадратичная форма с областью определения $\text{Dom}(G) \times \text{Dom}(G)$, задаваемой соотношением

$$\mathcal{L}(x)[v, u] = \langle v, xGu \rangle + \sum_{\ell \geq 1} \langle L_\ell v, xL_\ell u \rangle + \langle Gv, xu \rangle. \quad (3)$$

Работа второго автора выполнена при поддержке CONACYT Estancias Postdoctorales (грант 000000000133238).

Полугруппа $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ называется *минимальной*, поскольку любая другая полугруппа $(\mathcal{T}'_t)_{t \geq 0}$, удовлетворяющая соотношению (2), также удовлетворяет неравенству $\mathcal{T}_t(x) \leq \mathcal{T}'_t(x)$ для всех положительных x и $t \geq 0$.

Фактически полугруппа $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$, удовлетворяющая соотношению (2), будет единственной тогда и только тогда, когда она марковская или *консервативная*, т.е. когда $\mathcal{T}_t(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ при всех $t \geq 0$. В этом случае $x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ принадлежит области определения (истинного) производящего оператора тогда и только тогда, когда квадратичная форма $\mathcal{L}(x)$ представима некоторым ограниченным оператором (см. [4; лемма 1.1]).

Доказательство консервативности часто оказывается трудной задачей, которую невозможно решать с помощью характеристик, основанных на факте существования некоторого положительного нетривиального $x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ такого, что $\mathcal{L}(x) = \lambda x$ при некотором $\lambda > 0$. Начиная с работы [1], а также в работах [2], [3], были получены эффективные достаточные условия, основанные на факте существования неограниченного оператора C такого, что

$$\sum_{\ell \geq 1} L_\ell^* L_\ell \leq C, \quad \mathcal{L}(C) \leq bC, \quad (4)$$

при некотором постоянном $b > 0$, а также были получены некоторые технические условия на области определения.

Аналогичные условия консервативности для минимальных полугрупп на коммутативных алгебрах $L^\infty(E, \mathcal{E}, \mu)$ хорошо известны в литературе (см., например, [5; раздел 10.2]). Некоторые из них основаны на неравенствах типа второго неравенства в формуле (4) и не требуют выполнения первого неравенства. Тогда возникает естественный вопрос о том, является ли неравенство $\sum_{\ell \geq 1} L_\ell^* L_\ell \leq C$ действительно необходимым.

Этот вопрос не относится к случаю существования коммутативной подалгебры алгебры $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$, инвариантной относительно действия минимальной полугруппы, поскольку единичный оператор $\mathbf{1}$ содержится в любой такой коммутативной подалгебре. В этом частном случае в классических условиях существенно только существование некоторого *неограниченного* самосопряженного оператора C , соответствующего коммутативной подалгебре такой, что $\mathcal{L}(C) \leq bC$.

Однако в данной работе построен контрпример, показывающий, что оба операторных неравенства в обычных достаточных условиях консервативности минимальной квантовой динамической полугруппы являются существенно необходимыми. Для этого в п. 2 строится неконсервативная минимальная полугруппа на алгебре фон Неймана всех ограниченных операторов на $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, производящий оператор которой удовлетворяет условию $\mathcal{L}(M) = \mathbf{1} \leq M$, где M – оператор умножения на функцию $x^2 + 1$. Кроме того, чтобы убедить читателя в том, что технические условия на области определения не играют ключевой роли, здесь также показано, что неравенство $\mathcal{L}(M) \leq M$ может быть “экспоненцировано” и минимальная полугруппа удовлетворяет условию $\mathcal{T}_t(M_\epsilon) \leq e^t M$ для ограниченных аппроксимаций M_ϵ оператора M .

Наш контрпример также показывает, что минимальные квантовые динамические полугруппы, возникающие в квантовых расширениях и дилатациях классических процессов диффузии, *не* являются консервативными, если оператор L определен через квадратный корень из ковариации $\sigma(x)$ с фазой, зависящей от пространственной переменной x .

2. Неконсервативная полугруппа. Пусть $\mathfrak{h}$ – комплексное гильбертово пространство $\mathfrak{h} = L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ комплексно-значных интегрируемых с квадратом функций на действительной оси, и пусть G, L – операторы G и L на пространстве $\mathfrak{h}$, задаваемые формулами

$$\text{Dom}(G) = \{u \in \mathfrak{h} \mid u', u'' \in \mathfrak{h}\}, \quad (Gu)(x) = \frac{1}{2}u''(x), \quad (5)$$

$$\text{Dom}(L) = \{u \in \mathfrak{h} \mid u' \in \mathfrak{h}\}, \quad (Lu)(x) = -ie^{ix}u'(x). \quad (6)$$

Заметим, что G – самосопряженный оператор. Обозначая через p и q операторы импульса и положения,

$$\text{Dom}(p) = \{u \in \mathfrak{h} \mid u' \in \mathfrak{h}\}, \quad (pu)(x) = -iu'(x),$$

$$\text{Dom}(q) = \{u \in \mathfrak{h} \mid x \rightarrow xu(x) \in \mathfrak{h}\}, \quad (qu)(x) = xu(x),$$

получим

$$G = -\frac{1}{2}p^2, \quad L = e^{iq}p.$$

Пусть $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ – минимальная полугруппа, полученная из G и L с помощью производящего оператора (3). Применяя канонические перестановочные соотношения (КПС) $[q, p] = i$ и их следствия $e^{-itq}f(p)e^{itq} = f(p+t)$ к ограниченным функциям f и $[p, g(q)] = -ig'(q)$ к гладким функциям g и выполняя прямые алгебраические вычисления, получим, что

$$\mathcal{L}(f(p)) = p^2(f(p+1) - f(p)), \quad \mathcal{L}(g(q)) = \frac{1}{2}g''(q). \quad (7)$$

Как следствие, действие производящего оператора на функции положения формально приводит к броуновскому движению, тогда как его действие на функции импульса формально приводит к скачкообразному процессу с квадратичными интенсивностями.

Например, проверим первое тождество в формуле (7). Для гладких функций $u, v \in C_c^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ с компактным носителем в силу $e^{-iq}f(p)e^{iq} = f(p+1)$ получим

$$\begin{aligned} & \langle Gu, f(p)u \rangle + \langle Lv, f(p)Lu \rangle + \langle v, f(p)Gu \rangle \\ &= -\frac{1}{2}\langle p^2v, f(p)u \rangle + \langle e^{iq}pv, f(p)e^{iq}pu \rangle - \frac{1}{2}\langle v, f(p)p^2u \rangle \\ &= -\langle pv, pf(p)u \rangle + \langle pv, e^{-iq}f(p)e^{iq}pu \rangle = \langle v, p^2(f(p+1) - f(p))u \rangle. \end{aligned}$$

Устремляя минимальную полугруппу скачкообразного процесса с квадратичными интенсивностями в бесконечность, получим, что минимальная полугруппа, соответствующая введенному выше производящему оператору $\mathcal{L}$, не является консервативной. Именно этот случай рассмотрен в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть G и L такие, как в соотношениях (5) и (6). Минимальная полугруппа с производящим оператором $\mathcal{L}$ не является консервативной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что существует положительный ненулевой оператор $x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ такой, что $\mathcal{L}(x)[v, u] = \langle v, xu \rangle$ для всех $u, v \in \text{Dom}(G)$. Отсюда в силу хорошо известного критерия (см., например, [2], [6; теорема 3.1(d), с. 386]) следует неконсервативность.

Из формулы (7) следует, что нужно искать оператор x вида $f(p)$ для гладкой ограниченной функции f . Из $\mathcal{L}(f(p)) = f(p)$, а точнее из $p^2(f(p+1) - f(p)) = f(p)$, получим

$$f(p) = \frac{p^2}{p^2 + 1} f(p+1). \quad (8)$$

Затем, чтобы избежать технических трудностей, выберем положительную гладкую функцию f_0 в $C_c^\infty(0, 1)$ с носителем, лежащем в интервале $[1/3, 2/3]$, и такую, что $f_0(x) > 0$ при $x \in [1/3, 2/3]$. Построим положительную ограниченную функцию f , удовлетворяющую (8), и определим

$$f(p) = \begin{cases} f_0(p - [p]) \prod_{k=0}^{-[p]-1} \frac{(p+k)^2}{(p+k)^2 + 1}, & \text{если } p < 0, \\ f_0(p), & \text{если } 0 \leq p < 1, \\ f_0(p - [p]) \prod_{k=1}^{[p]} \frac{(p-k)^2 + 1}{(p-k)^2}, & \text{если } 1 \leq p, \end{cases}$$

где $[p]$ — целая часть числа p .

Ясно, что f обращается в нуль на любом интервале $[n - 1/3, n + 1/3]$ и, таким образом, по определению, является неотрицательной гладкой функцией на действительной оси. Чтобы проверить, что она также является ограниченной, сначала заметим, что

$$f(p) \leq \max_{0 \leq x \leq 1} f_0(x) = \|f_0\| \quad \text{при всех } p \leq 1,$$

поскольку $(p+k)^2((p+k)^2 + 1)^{-1} \leq 1$ при всех $p \leq 1$ и $k \in \mathbb{N}$. Тогда при всех $p > 1$ на интервале $]n + 1/3, n + 2/3[$, $n \in \mathbb{N}$, имеем $[p] = n$ и

$$\ln f(p) = \ln f_0(p - n) + \sum_{k=1}^n \ln(1 + (p - k)^{-2}) \leq \ln f_0(p - n) + \sum_{k=1}^n (p - k)^{-2},$$

так как $\ln(1 + x) \leq x$. Следовательно, $\ln f(p) \leq \ln \|f_0\| + 9$ при $1 \leq p < 2$. Наконец, для $p \geq 2$, $p \in]n + 1/3, n + 2/3[$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, имеем

$$\ln f(p) \leq \ln \|f_0\| + 9 + \sum_{k=1}^{n-1} (n - k)^{-2} \leq \ln \|f_0\| + 9 + \frac{\pi^2}{6}.$$

Подводя итоги, получим неравенство

$$0 \leq f(p) \leq \|f_0\| e^{9 + \pi^2/6},$$

что завершает доказательство теоремы.

3. Неравенство $\mathcal{T}_t(M_e) \leq e^t M$. Неограниченный оператор M , равный $q^2 + 1$, т.е. оператор умножения на $x^2 + 1$ (формально) удовлетворяет условию $\mathcal{L}(M) = 1 \leq M$ в силу (7), но не удовлетворяет условию $\sum_l L_l^* L_l \leq M$, и минимальная полугруппа $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ не является консервативной.

Покажем, что это не просто техническая задача, возникающая из того, что для доказательства консервативности условия на области определения обычно добавляются к условиям $\mathcal{L}(C) \leq bC$ и $\sum_{\ell} L_{\ell}^* L_{\ell} \leq C$, так как при всех $\epsilon > 0$, полагая $M_{\epsilon} = M(1 + \epsilon M)^{-1}$, также получим

$$\mathcal{T}_t(M_{\epsilon}) \leq e^{t/(1+\epsilon)} M_{\epsilon}.$$

Через M'_{ϵ} и M''_{ϵ} обозначим ограниченные операторы умножения на первую и вторую производные функции $M_{\epsilon} = (x^2 + 1)/(1 + \epsilon(x^2 + 1))$, именно,

$$\frac{2x}{(1 + \epsilon(x^2 + 1))^2} \quad \text{и} \quad \frac{2(1 - 3\epsilon x^2 + \epsilon)}{(1 + \epsilon(x^2 + 1))^3}.$$

ЛЕММА 3.1. *При всех $v \in \text{Dom}(G)$ выполняются соотношения $M_{\epsilon}v \in \text{Dom}(G)$, $M_{\epsilon}Lv \in \text{Dom}(L^*)$ и*

$$\langle v, (GM_{\epsilon} + M_{\epsilon}G)v \rangle = -\langle v, L^*M_{\epsilon}Lv \rangle + \frac{1}{2}\langle v, M''_{\epsilon}v \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $M_{\epsilon}v \in \text{Dom}(G)$ и $M_{\epsilon}Lv \in \text{Dom}(L^*)$, так как M_{ϵ} имеет гладкие производные всех порядков, обращающиеся в нуль на бесконечности.

При всех $v \in \text{Dom}(G)$ имеем

$$LM_{\epsilon}v = M_{\epsilon}Lv - ie^{iq}M'_{\epsilon}v, \quad M_{\epsilon}L^*v = L^*M_{\epsilon}v + ie^{-iq}M'_{\epsilon}v.$$

Такие образом,

$$\begin{aligned} GM_{\epsilon}v &= -\frac{1}{2}L^*(LM_{\epsilon}v) = -\frac{1}{2}L^*M_{\epsilon}Lv + \frac{i}{2}L^*e^{iq}M'_{\epsilon}v \\ M_{\epsilon}Gv &= -\frac{1}{2}M_{\epsilon}L^*(Lv) = -\frac{1}{2}L^*M_{\epsilon}Lv - \frac{i}{2}M'_{\epsilon}e^{-iq}Lv, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$i(L^*e^{iq}M'_{\epsilon}v - M'_{\epsilon}e^{-iq}Lv) = i(pM'_{\epsilon}v - M'_{\epsilon}pv) = M''_{\epsilon}v.$$

ЛЕММА 3.2. *При всех $u \in \text{Dom}(G)$ выполняется соотношение*

$$\langle P_t u, M_{\epsilon} P_t u \rangle = \langle u, M_{\epsilon} u \rangle - \int_0^t \langle LP_s u, M_{\epsilon} LP_s u \rangle ds + \frac{1}{2} \int_0^t \langle P_s u, M''_{\epsilon} P_s u \rangle ds$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.1 производная по времени от функции $\langle P_t u, M_{\epsilon} P_t u \rangle$ имеет вид

$$\langle P_t u, (GM_{\epsilon} + M_{\epsilon}G)P_t u \rangle = -\langle P_t u, L^*M_{\epsilon}LP_t u \rangle + \frac{1}{2}\langle P_t u, M''_{\epsilon}P_t u \rangle.$$

После интегрирования получим требуемую формулу.

Заметим, что

$$\frac{M''_{\epsilon}}{M_{\epsilon}} \leq \sup_{x>0} \frac{2(1 - 3\epsilon x^2 + \epsilon)}{(x^2 + 1)(1 + \epsilon(x^2 + 1))^2} = \frac{2}{1 + \epsilon}. \quad (9)$$

Действительно, при $x = 0$ имеем $2/(1 + \epsilon)$ и

$$\frac{2(1 - 3\epsilon x^2 + \epsilon)}{(x^2 + 1)(1 + \epsilon(x^2 + 1))^2} \leq \frac{2(1 + \epsilon)}{(x^2 + 1)(1 + \epsilon(x^2 + 1))^2} \leq \frac{2}{1 + \epsilon}.$$

Следовательно, приходим к следующему утверждению.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. При всех $u \in D(G)$ выполняется неравенство

$$\langle P_t u, M_\epsilon P_t u \rangle \leq e^{t/(1+\epsilon)} \langle u, M_\epsilon u \rangle. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.2 получим

$$\langle P_t u, M_\epsilon P_t u \rangle \leq \langle u, M_\epsilon u \rangle + \frac{1}{2} \int_0^t \langle P_s u, M_\epsilon'' P_s u \rangle ds. \quad (11)$$

Теперь при всех s из (9) следует, что

$$\langle P_s u, M_\epsilon'' P_s u \rangle = \left\langle P_s u, M_\epsilon \frac{M_\epsilon''}{M_\epsilon} P_s u \right\rangle \leq \frac{2}{1+\epsilon} \langle P_s u, M_\epsilon P_s u \rangle.$$

Таким образом, подинтегральное выражение в правой части неравенства (11) не превышает $\langle P_s u, M_\epsilon P_s u \rangle / (1+\epsilon)$, и требуемое утверждение следует из леммы Гронолла.

ТЕОРЕМА 3.4. Минимальная полугруппа $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$, построенная с помощью операторов G и L , определенных выражениями (5) и (6), удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{T}_t(M_\epsilon) \leq e^{t/(1+\epsilon)} M_\epsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положительное отображение $\mathcal{T}_t$ минимальной полугруппы можно определить (см. [3; раздел 2]) как верхнюю грань возрастающей последовательности $(\mathcal{T}_t^{(n)})_{n \geq 0}$ положительных отображений таких, что $\mathcal{T}_t^{(0)}(x) = P_t^* x P_t$.

В силу следствия 3.3 доказываемое неравенство выполняется при $n = 0$. Предположим, что это утверждение доказано для n , тогда при всех $u \in \text{Dom}(G)$ имеем

$$\begin{aligned} \langle u, \mathcal{T}_t^{(n+1)}(M_\epsilon)u \rangle &= \langle P_t u, M_\epsilon P_t u \rangle + \int_0^t \langle L P_{t-s} u, \mathcal{T}_s^{(n)}(M_\epsilon) L P_{t-s} u \rangle ds \\ &\leq \langle P_t u, M_\epsilon P_t u \rangle + \int_0^t e^{s/(1+\epsilon)} \langle L P_{t-s} u, M_\epsilon L P_{t-s} u \rangle ds \\ &= \langle P_t u, M_\epsilon P_t u \rangle \\ &\quad - \int_0^t e^{s/(1+\epsilon)} (\langle G P_{t-s} u, M_\epsilon P_{t-s} u \rangle + \langle P_{t-s} u, M_\epsilon G P_{t-s} u \rangle) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t e^{s/(1+\epsilon)} \langle P_{t-s} u, M_\epsilon'' P_{t-s} u \rangle ds \\ &= \langle P_t u, M_\epsilon P_t u \rangle + \int_0^t e^{s/(1+\epsilon)} \frac{d}{ds} \langle P_{t-s} u, M_\epsilon P_{t-s} u \rangle ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t e^{s/(1+\epsilon)} \langle P_{t-s} u, M_\epsilon'' P_{t-s} u \rangle ds, \end{aligned} \quad (12)$$

и равенство (12) следует из леммы 3.1.

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \langle u, \mathcal{T}_t^{(n+1)}(M_\epsilon)u \rangle &= \langle P_t u, M_\epsilon P_t u \rangle + [e^{s/(1+\epsilon)} \langle P_{t-s} u, M_\epsilon P_{t-s} u \rangle]_0^t \\ &\quad - \int_0^t e^{s/(1+\epsilon)} \langle P_{t-s} u, M_\epsilon P_{t-s} u \rangle \frac{1}{1+\epsilon} ds \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t e^{s/(1+\epsilon)} \langle P_{t-s} u, M_\epsilon'' P_{t-s} u \rangle ds.$$

Сумма двух последних членов равна

$$- \int_0^t e^{s/(1+\epsilon)} \left\langle P_{t-s} u, M_\epsilon \left(\frac{1}{1+\epsilon} - \frac{1}{2} \frac{M_\epsilon''}{M_\epsilon} \right) P_{t-s} u \right\rangle ds,$$

а это отрицательная величина в силу (9).

Таким образом, имеем

$$\langle u, \mathcal{T}_t^{(n+1)}(M_\epsilon) u \rangle \leq e^{t/(1+\epsilon)} \langle u, M_\epsilon u \rangle$$

и, чтобы завершить доказательство, устремим n к бесконечности.

Так как отображения $\mathcal{T}_t$ положительны, $M = \sup_\epsilon M_\epsilon$, являющиеся соответствующими расширениями отображений $\mathcal{T}_t$, также удовлетворяют неравенству $\mathcal{T}_t(M) \leq e^t M$. Другие применения неравенств этого типа можно найти в работе [7].

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Хорошо известно, что консервативными являются минимальные полугруппы, возникающие при дилатации и квантовом расширении классических процессов диффузии на $\mathbb{R}$, как, например,

$$G = \frac{1}{2} \sigma(x)^2 \frac{d^2}{dx^2}, \quad L = \sigma(x) \frac{d}{dx},$$

где σ — действительнoзначная ограниченная гладкая функция на $\mathbb{R}$ с ограниченными производными всех порядков. Ясно, что это также имеет место, если σ умножается на комплексную фазу, не зависящую от x .

Наш пример показывает, что, как ни удивительно, этот факт не имеет места при $\sigma(x) = e^{ix}$, хотя $|\sigma(x)|^2 = 1$ и классический процесс диффузии, естественно соответствующий этому случаю, а именно, стандартное броуновское движение, является консервативным.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Чеботарев, “Достаточные условия консервативности диссипативных динамических полугрупп”, *ТМФ*, **80**:2 (1989), 192–211.
- [2] А. М. Чеботарев, “О достаточных условиях консервативности минимальной динамической полугруппы”, *Матем. заметки*, **52**:4 (1992), 112–127.
- [3] A. M. Chebotarev, F. Fagnola, “Sufficient conditions for conservativity of minimal quantum dynamical semigroups”, *J. Funct. Anal.*, **153**:2 (1998), 382–404.
- [4] F. Fagnola, R. Rebolledo, “The approach to equilibrium of a class of quantum dynamical semigroups”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **1**:4 (1998), 561–572.
- [5] D. W. Stroock, S. R. S. Varadhan, *Multidimensional Diffusion Processes*, Grundlehren Math. Wiss., **233**, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [6] J. C. García, R. Quezada, “Hille–Yosida estimate and nonconservativity criteria for quantum dynamical semigroups”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **7**:3 (2004), 383–394.

- [7] A. Dhahri, F. Fagnola, R. Rebolledo, “The decoherence-free subalgebra of a quantum Markov semigroup with unbounded generator”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **13**:3 (2010), 413–433.

Ф. Фаньола

Politecnico di Milano, Италия

E-mail: franco.fagnola@polimi.it

Поступило

10.03.2011

Л. Панталеон Мартинес

National Autonomous University of Mexico, Мексика

E-mail: polo3951@unam.mx