Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Зайцев, Д. Реповш, Четырехмерная простая алгебра с дробной PI-экспонентой, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 4, 538–553

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9387>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 17:51:51

Четырехмерная простая алгебра с дробной PI-экспонентой

М. В. Зайцев, Д. Реповш

В работе изучаются числовые характеристики тождеств конечномерных неассоциативных алгебр. Основным результатом является построение четырехмерной простой алгебры с единицей, имеющей дробную PI-экспоненту, строго меньшую ее размерности.

Библиография: 21 название.

DOI: 10.4213/mzm9387

1. Введение. В работе изучаются тождества неассоциативных алгебр над полем F нулевой характеристики. Все необходимые сведения по тождествам в алгебрах можно найти в книгах [1]–[3].

С каждой алгеброй A можно связать целочисленную последовательность $\{c_n(A)\}$, $n = 1, 2, \dots$, которую называют *последовательностью коразмерностей* (все необходимые определения мы дадим ниже). Если данная последовательность растет экспоненциально, как, например, в конечномерном случае, то возникает вопрос о существовании предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$. Существование и целочисленность такого предела были доказаны ранее для всех ассоциативных PI-алгебр [4], [5], для конечномерных алгебр Ли [6], [7], для конечномерных йордановых и альтернативных алгебр [8], [9] и целого ряда других. В бесконечномерном случае этот предел, называемый *PI-экспонентой*, может быть как дробной, так и целой величиной даже в классе алгебр Ли (см. [10]–[12]), а в классе супералгебр Ли недавно обнаружены конечномерные алгебры с дробной экспонентой [13].

В общем случае PI-экспонента конечномерной алгебры не превосходит ее размерности и может быть сколь угодно близкой к единице [14], [15]. Однако для двумерных алгебр PI-экспонента либо равна двум, либо единице (тогда $c_n(A) \leq n + 1$), либо равна 0 (в этом случае $c_n(A) = 0$ для всех достаточно больших n) [16]. Для трехмерных алгебр вопрос о целочисленности открыт, однако известно, что либо $c_n(A) \geq 2^n$ асимптотически, либо эта последовательность полиномиально ограничена. Однако для трехмерной алгебры с единицей PI-экспонента всегда существует и целочисленна [17]. Минимальная известная до недавних пор размерность, в которой появляется дробная экспонента, равна 5 [18], а в случае супералгебр Ли – семи [13]. В тезисах [19] анонсирован результат о существовании четырехмерной коммутативной алгебры с дробной экспонентой.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00234а) и Словенского исследовательского агентства (грант № P1-0292-0101).

Особое место занимает вопрос о существовании и значении PI-экспоненты простой конечномерной алгебры над алгебраически замкнутым полем. В большинстве изученных классов алгебр (ассоциативных [20], лиевских [6], йордановых, альтернативных и некоторых других [8], [9]) эта величина равна размерности самой алгебры. Первые примеры простых алгебр, у которых PI-экспонента строго меньше размерности, приведены в [13]. Минимальная размерность среди алгебр, предъявленных в [13], равна 17. Но остался нерешенным вопрос об их целочисленности.

В данной работе построен пример четырехмерной простой алгебры с единицей с дробной PI-экспонентой (теорема 1).

2. Основные понятия и определения. На протяжении всей статьи F означает поле нулевой характеристики, и все алгебры рассматриваются над F . При этом мы будем придерживаться соглашения, что в левонормированном произведении скобки опускаются, т.е. $abc = (ab)c$.

Обозначим через $F\{X\}$ свободную неассоциативную алгебру над F со счетным множеством порождающих X . Напомним, что если A – некоторая алгебра над F , а $f = f(x_1, \dots, x_n)$ – неассоциативный полином из $F\{X\}$, то f называют *тождеством* A , если

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0 \quad \text{для любых } a_1, \dots, a_n \in A.$$

Совокупность всех тождеств алгебры A образует идеал в $F\{X\}$, который мы будем обозначать как $\text{Id}(A)$.

Обозначим через $P_n = P_n(x_1, \dots, x_n)$ подпространство всех полилинейных полиномов от $x_1, \dots, x_n$ в $F\{X\}$. Тогда $P_n \cap \text{Id}(A)$ является подпространством всех полилинейных тождеств алгебры A от n переменных.

Напомним, что n -й *коразмерностью тождеств* алгебры A (или просто n -й *коразмерностью* A) называется величина

$$c_n(A) = \dim \frac{P_n}{P_n \cap \text{Id}(A)}.$$

В широком ряде случаев последовательность $\{c_n(A)\}$ растет не быстрее экспоненциальной функции от n , т.е.

$$c_n(A) < a^n$$

для некоторого $a > 1$. Тогда последовательность коразмерностей удовлетворяет условиям

$$0 \leq \sqrt[n]{c_n(A)} \leq a,$$

и это позволяет дать следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Нижней PI-экспонентой* алгебры A называется нижний предел

$$\underline{\exp}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)}.$$

Верхний предел

$$\overline{\exp}(A) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$$

называется *верхней* PI-экспонентой алгебры A . Если $\exp(A)$ и $\overline{\exp}(A)$ равны, т.е. последовательность $\{\sqrt[n]{c_n(A)}\}$ имеет обычный предел, то он называется PI-экспонентой алгебры A ,

$$\exp(A) = \overline{\exp}(A) = \underline{\exp}(A).$$

Пространство P_n наделено естественным действием группы подстановок S_n :

$$\sigma f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}),$$

которое превращает P_n в модуль над групповым кольцом FS_n , или, для краткости, в S_n -модуль. При этом $P_n \cap \text{Id}(A)$ является S_n -подмодулем в P_n . Напомним, что степень характера $\chi(M)$ некоторого S_n -модуля M – это размерность M , т.е. $\deg \chi(M) = \dim M$. Кроме того, неприводимые характеры, т.е. характеры неприводимых представлений, однозначно задаются разбиениями $\lambda \vdash n$ числа n , где

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k), \quad \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > 0, \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$$

(все необходимые сведения по теории представлений симметрических групп можно найти в [21], а по ее применению в теории тождеств – в [1], [2]).

Любой S_n -модуль M раскладывается в сумму неприводимых, и в терминах характеров это можно записать следующим образом:

$$\chi(M) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda,$$

где χ_λ – характер неприводимого модуля, соответствующего λ , а m_λ – его кратность в разложении M . Отсюда

$$\deg \chi(M) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \deg \chi_\lambda.$$

В частности, для S_n -модуля $P_n/P_n \cap \text{Id}(A)$ получаем

$$\chi_n(A) = \chi\left(\frac{P_n}{P_n \cap \text{Id}(A)}\right) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda, \quad (1)$$

$$c_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \deg \chi_\lambda. \quad (2)$$

Разложение (1) называется n -м кохарактером A , а формула (2) позволяет получать оценки величины $c_n(A)$. Будем говорить, что характер $\chi(M) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ модуля M *лежит в полосе ширины d* , если все разбиения λ с ненулевыми кратностями m_λ имеют не более d частей, т.е. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ и $k \leq d$. Для таких разбиений известно, что $\deg \chi_\lambda \leq d^n$.

Если A – конечномерная F -алгебра, $\dim A = d$, то известно (см., например, [2; теорема 4.6.2] и [15]), что ее кохарактер $\chi_n(A)$ лежит в полосе ширины d и что сумма

$$l_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda,$$

называемая n -й *кодливой*, в (1) ограничена полиномиальной функцией от n . Более точно, в теореме 1 из [15] доказано, что

$$l_n(A) \leq d(n+1)^{d^2+d}. \quad (3)$$

Это, в частности, означает, что при экспоненциальном росте коразмерностей ключевую роль играют только максимальные размерности $\deg \chi_\lambda$. Для получения их оценок удобно использовать следующие функции $\Phi(\lambda)$, связанные с разбиениями $\lambda \vdash n$. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$, $k \leq d$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$. Положим

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{(\lambda_1/n)^{\lambda_1/n} \dots (\lambda_d/n)^{\lambda_d/n}}.$$

(Если k строго меньше d , то соответствующие множители 0^0 равны 1).

В работе [13] отмечалась связь между значением функции $\Phi(\lambda)$ и степенью характера $\deg \chi(\lambda)$ (см. лемму 1). Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$, $n \geq 100$ и $k \leq d$. Тогда

$$\frac{\Phi(\lambda)^n}{n^{d^2+d}} \leq \deg \chi_\lambda \leq n\Phi(\lambda)^n. \quad (4)$$

Пусть теперь A – произвольная конечномерная алгебра над F . Рассмотрим ее n -й кохарактер (1) и обозначим через $\Phi_{\max}^{(n)}$ максимальное значение $\Phi(\lambda)$ по всем $\lambda \vdash n$, у которых $m_\lambda \neq 0$ в (1). Комбинируя соотношения (2), (3) и (4), мы получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть $\dim A = d$. Тогда

$$\frac{1}{n^{d^2+d}} (\Phi_{\max}^{(n)})^n \leq c_n(A) \leq (n+1)^{d^2+d+1} (\Phi_{\max}^{(n)})^n$$

для всех $n \geq 100d$.

Нам также потребуется следующее свойство функции $\Phi(\lambda)$. Если $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ и $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q)$ – два разбиения одного и того же целого числа n , то *диаграммой Юнга* D_λ , отвечающей разбиению λ , называется таблица из λ_1 клеток в 1-й строке, λ_2 клеток во 2-й строке, и т.д. Аналогично строится и диаграмма D_μ по разбиению $\mu \vdash n$. Мы будем говорить, что диаграмма D_μ получена из диаграммы D_λ *выталкиванием вниз одной клетки*, если существуют такие $1 \leq i < j \leq q$, что $\mu_i = \lambda_i - 1$, $\mu_j = \lambda_j + 1$ и $\mu_p = \lambda_p$ для всех остальных $1 \leq p \leq q$. Если же $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q) \vdash n$, а $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q, 1) \vdash n$, то D_μ получена из D_λ *выталкиванием вниз одной клетки*, если одна из строк D_μ на одну клетку короче, чем у D_λ , а все остальные (кроме последней) имеют такую же длину.

ЛЕММА 2. Пусть D_μ получена из D_λ *выталкиванием вниз одной клетки*. Тогда $\Phi(\mu) \geq \Phi(\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ и $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{q'})$ – два разбиения n , где $q' = q$ или $q + 1$. Тогда

$$\Phi(\lambda)^n = \frac{n^n}{\lambda_1^{\lambda_1} \dots \lambda_q^{\lambda_q}}. \quad (5)$$

Если $q = q'$, то в аналогичном выражении для $\Phi(\mu)^n$ знаменатель получается из знаменателя в (5) заменой одного произведения вида $a^a b^b$, $a \geq b + 2$, на $(a - 1)^{a-1} \times (b + 1)^{b+1}$. В этом случае неравенство $\Phi(\mu)^n \geq \Phi(\lambda)^n$ следует из того, что функция $f(x) = x^x (c - x)^{c-x}$ убывает на интервале $(c/2; 0)$. Если же $q' = q + 1$, то в знаменателе (5) мы заменяем множитель a^a на $(a - 1)^{a-1} \cdot 1^1 < a^a$ и снова получаем $\Phi(\mu)^n > \Phi(\lambda)^n$. Поскольку $\Phi(\lambda), \Phi(\mu) > 0$, отсюда следует утверждение леммы.

3. Четырехмерная алгебра и ее кохарактер. Рассмотрим четырехмерное векторное пространство W с базисом $\{e_{-1}, e_0, e_1, e_2\}$ и введем на нем умножение следующим образом:

- (а) $e_i e_0 = e_0 e_i = e_i$ для всех $-1 \leq i \leq 2$;
- (б) при $i, j \neq 0$ положим $e_i e_j = 0$, если $i > j$ или $i + j < -1$, или $i + j > 2$;
- (в) $e_i e_j = e_{i+j}$ во всех остальных случаях.

Легко заметить, что W – простая алгебра с единицей e_0 и что разложение

$$W = W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2,$$

где $W_i = \langle e_i \rangle$, $i = -1, \dots, 2$, является $\mathbb{Z}$ -градуировкой на W .

Рассмотрим кохарактер

$$\chi_n(W) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda \quad (6)$$

алгебры W . Поскольку $\dim W = 4$, ее кохарактер лежит в полосе ширины 4, т.е. $\lambda_5 = 0$ для любого разбиения $\lambda \vdash n$, если $m_\lambda \neq 0$ в (6).

Напомним, что *таблицей Юнга* T_λ называется диаграмма D_λ , в клетках которой расставлены числа $\{1, \dots, n\}$. Любой неприводимый модуль над групповой алгеброй $R = FS_n$ изоморфен минимальному левому идеалу Re_{T_λ} , где e_{T_λ} – элемент R , построенный по следующему правилу.

Назовем *стабилизатором по строкам* R_{T_λ} подгруппу всех подстановок из S_n , перемещающих символы $1, \dots, n$ только в пределах своих строк, а *стабилизатором по столбцам* C_{T_λ} – подгруппу, переставляющую символы внутри столбцов. Обозначим

$$R(T_\lambda) = \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma, \quad C(T_\lambda) = \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (\text{sgn } \tau) \tau, \quad e_{T_\lambda} = R(T_\lambda)C(T_\lambda).$$

Тогда e_{T_λ} – квазиидемпотент группового кольца FS_n , т.е. $e_{T_\lambda}^2 = \alpha e_{T_\lambda}$, $\alpha \neq 0$, и $FS_n e_{T_\lambda}$ – неприводимый S_n -модуль с характером χ_λ . Более того, если M – некоторый FS_n -модуль и

$$\chi(M) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda,$$

то $m_\lambda \neq 0$ тогда и только тогда, когда $e_{T_\lambda} M \neq 0$.

Пусть теперь f – полилинейный многочлен степени n , порождающий неприводимый FS_n -подмодуль M в P_n с характером χ_λ . Можно считать, что $e_{T_\lambda} f \neq 0$ для некоторой таблицы Юнга T_λ . Тогда и многочлен $g = C(T_\lambda)f$ тоже порождает M как R -модуль. Входящие в g переменные разбиваются на m непересекающихся подмножеств

$$\{x_1, \dots, x_n\} = X_1 \cup \dots \cup X_m,$$

где m – число столбцов диаграммы Юнга D_λ , а X_j – набор переменных, номера которых записаны в j -м столбце. При этом g кососимметричен по каждому из наборов $X_1, \dots, X_m$. Другими словами, любой неприводимый FS_n -подмодуль в P_n с характером χ_λ порождается полилинейным многочленом, зависящим от m непересекающихся кососимметричных наборов переменных мощности $\lambda'_1, \dots, \lambda'_m$ соответственно, где $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_m)$ – сопряженное к λ разбиению (т.е. $\lambda'_1, \dots, \lambda'_m$ – высоты столбцов D_λ).

Чтобы получить более сильные ограничения (чем $\lambda_5 = 0$) на кохарактер W , введем для разбиений еще одну числовую характеристику. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$. Запишем во все клетки 1-й строки число -1 , второй – 0 , и т.д., т.е. в клетках k -й строки стоит число $k - 2$. Тогда *весом диаграммы* D_λ назовем сумму всех чисел в D_λ . Эту же величину назовем *весом* $wt(\lambda)$ *разбиения* λ . Другими словами,

$$wt(\lambda) = \sum_{i=1}^k (i - 2)\lambda_i.$$

ЛЕММА 3. Если $m_\lambda \neq 0$ в разложении (6), то

- $\lambda_5 = 0$;
- $wt(\lambda) \leq 2$, т.е. $\lambda_1 - \lambda_3 - 2\lambda_4 \geq -2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $\lambda_5 = 0$ уже показано ранее. Докажем второе утверждение леммы. Пусть $m_\lambda \neq 0$, т.е. существует неприводимый FS_n -подмодуль в P_n с характером χ_λ , не лежащий в идеале тождеств алгебры W . Как отмечено выше, это означает, что существует полилинейный многочлен $g = g(x_1, \dots, x_n)$, кососимметричный по переменным каждого из столбцов T_λ , не равный нулю тождественно в W . Но тогда существует подстановка $\varphi: X \rightarrow \{e_{-1}, e_0, e_1, e_2\}$, при которой $\varphi(g) \neq 0$. В силу кососимметричности g вместо переменных одного столбца мы вынуждены подставлять различные базисные элементы алгебры W . В частности, если $x_{i_1}, \dots, x_{i_4}$ – переменные одного столбца высоты 4, то суммарный вес элементов $\varphi(x_{i_1}), \dots, \varphi(x_{i_4})$ равен $-1 + 0 + 1 + 2 = 2$ в $\mathbb{Z}$ -градуировке W . Поэтому минимальный возможный вес $\varphi(g)$ в $\mathbb{Z}$ -градуировке равен

$$wt(\lambda) = -\lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_4.$$

Поскольку все компоненты алгебры W_k при $k \geq 3$ равны нулю, это и означает, что $-\lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_4 \leq 2$, и лемма доказана.

Нам потребуется в дальнейшем одно достаточное условие, при котором кратность не равна нулю. Рассмотрим разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ и перепишем его в виде

$$\lambda = (k + l + m + t, k + l + m, k + l, k).$$

Диаграмма этого разбиения выглядит следующим образом:

k	l	m	t

При этом $n = 4k + 3l + 2m + t$, вес разбиения λ равен $-m - t + 2k$, а необходимое условие для неравенства $m_\lambda \neq 0$ принимает вид

$$m + t \geq 2k - 2.$$

ЛЕММА 4. Пусть $m + t \geq 2k$ и $m \leq 2k$. Тогда $m_\lambda \neq 0$ в разложении (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать лемму, достаточно построить полилинейный полином f степени n , зависящий от

- k кососимметричных наборов переменных $\{x_1^{(i)}, \dots, x_4^{(i)}\}$, $1 \leq i \leq k$;
- l кососимметричных наборов $\{y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, y_3^{(i)}\}$, $1 \leq i \leq l$;
- m кососимметричных наборов $\{z_1^{(i)}, z_2^{(i)}\}$, $1 \leq i \leq m$,
- t переменных $u_1^{(i)}$, $1 \leq i \leq t$,

такой, что после его симметризации по наборам

$$\{x_1^{i_1}, y_1^{i_2}, z_1^{i_3}, u_1^{i_4}\}, \quad \{x_2^{i_1}, y_2^{i_2}, z_2^{i_3}\}, \quad \{x_3^{i_1}, y_3^{i_2}\}, \quad \{x_4^{i_4}\},$$

где $1 \leq i_1 \leq k$, $1 \leq i_2 \leq l$, $1 \leq i_3 \leq m$, $1 \leq i_4 \leq t$, получается полином, не равный нулю тождественно в W .

Для обозначения кососимметричных наборов удобно пометать входящие в него переменные одним и тем же символом сверху. Например,

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 &= \sum_{\sigma \in S_3} (\operatorname{sgn} \sigma) x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)}, \\ \bar{a}_1 \bar{b}_1 \bar{a}_2 \bar{b}_2 &= a_1 b_1 a_2 b_2 - a_1 b_2 a_2 b_1 - a_2 b_1 a_1 b_2 + a_2 b_2 a_1 b_1, \\ (\bar{x} \bar{x})(\bar{y} \bar{y}) &= (xx)(yy) - (yx)(xy) - (xy)(yx) + (yy)(xx). \end{aligned}$$

Мы будем использовать данное соглашение и для элементов алгебры W , а не только для переменных. Например,

$$\begin{aligned} \bar{e}_{-1}(\bar{e}_1 \bar{e}_2) &= e_{-1}(\bar{e}_1 \bar{e}_2) - e_1(\bar{e}_{-1} \bar{e}_2) - e_2(\bar{e}_1 \bar{e}_{-1}) = 0 - e_1(e_{-1} e_2) + e_2(e_{-1} e_1) \\ &= -e_1^2 + e_2 e_0 = -e_2 + e_2 = 0. \end{aligned}$$

Сначала построим выражение, кососимметричное по e_{-1} , e_0 , e_1 , e_2 и содержащее два дополнительных базисных элемента e_{-1} . Положим

$$f_1 = e_{-1}[\bar{e}_{-1}((\bar{e}_0 e_{-1})(\bar{e}_1 \bar{e}_2))].$$

Этот элемент является значением полинома

$$x_{-1}[\bar{x}_{-1}((\bar{x}_0 x_{-1})(\bar{x}_1 \bar{x}_2))]$$

от переменных x_{-1} , x_0 , x_1 , x_2 и равен

$$\begin{aligned} f_1 &= e_{-1}[\bar{e}_{-1}((e_0 e_{-1})(\bar{e}_1 \bar{e}_2))] = e_{-1}[\bar{e}_{-1}(e_{-1}(\bar{e}_1 \bar{e}_2))] \\ &= e_{-1}[e_{-1}(e_{-1}(\bar{e}_1 \bar{e}_2)) - e_1(e_{-1}(\bar{e}_{-1} \bar{e}_2)) - e_2(e_{-1}(\bar{e}_1 \bar{e}_{-1}))] \\ &= e_{-1}[0 - e_1(e_{-1}(e_{-1} e_2)) + e_2(e_{-1}(e_{-1} e_1))] \\ &= e_{-1}[-e_1(e_{-1} e_1) + e_2(e_{-1} e_0)] \\ &= e_{-1}[-e_1 e_0 + e_2 e_{-1} = e_{-1}[-e_1 + 0] = -e_0. \end{aligned}$$

Обозначим

$$g(x_{-1}, x_0, x_1, x_2, y, z) = y[\bar{x}_{-1}((\bar{x}_0 z)(\bar{x}_1 \bar{x}_2))].$$

Тогда левонормированная степень f_1^k является значением симметризации многочлена

$$g(x_{-1}^{(1)}, x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, y_1^{(1)}, z_1^{(1)}) \cdots g(x_{-1}^{(k)}, x_0^{(k)}, x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, y_1^{(k)}, z_1^{(k)}),$$

косометричного по $\{x_{-1}^{(i)}, x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)}\}$, $i = 1, \dots, k$. Симметризация же проведена по четырем наборам

$$\begin{aligned} \{x_{-1}^{(1)}, \dots, x_{-1}^{(k)}, y_1^{(1)}, z_1^{(1)}, \dots, y_1^{(k)}, z_1^{(k)}\}, & \quad \{x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(k)}\}, \\ \{x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(k)}\}, & \quad \{x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(k)}\}. \end{aligned}$$

Аналогично, значением 3-альтерированного полинома является

$$f_2 = \bar{e}_{-1} \bar{e}_0 \bar{e}_1 = (\bar{e}_{-1} \bar{e}_0) e_1 + (\bar{e}_0 \bar{e}_1) e_{-1} + (\bar{e}_1 \bar{e}_{-1}) e_0 = 0 + 0 - e_{-1} e_1 e_0 = -e_0.$$

Положим также

$$f_3 = e_{-1}[\bar{e}_{-1}((\bar{e}_0 \tilde{e}_{-1})(\bar{e}_1 \bar{e}_2))]\tilde{e}_0.$$

Это выражение содержит кососимметричный набор e_{-1}, e_0, e_1, e_2 , отмеченный чертой сверху, и кососимметричный набор e_{-1}, e_0 , помеченный волной. Поскольку $W_+ e_{-1} = 0$, где $W_+ = W_1 \oplus W_2$, то

$$f_3 = f_1 e_0 = f_1 = -e_0.$$

Наконец, пусть

$$f_4 = \bar{e}_{-1}[[\bar{e}_{-1}((\bar{e}_0 \tilde{e}_{-1})(\bar{e}_1 \bar{e}_2))]\tilde{e}_0 \bar{e}_0].$$

Здесь мы имеем один кососимметричный набор $\{e_{-1}, e_0, e_1, e_2\}$ и два кососимметричных набора $\{e_{-1}, e_0\}$. Обозначим

$$a = [\bar{e}_{-1}((\bar{e}_0 \tilde{e}_{-1})(\bar{e}_1 \bar{e}_2))]\tilde{e}_0.$$

Тогда степень a в $\mathbb{Z}$ -градуировке равна 1, и поэтому из условия $W_+ e_{-1} = 0$ и вычислений, проведенных выше для f_1 , следует, что $a = -e_1$ и

$$f_4 = e_{-1}(a e_0) - e_0(a e_{-1}) = e_{-1} a = -e_0.$$

Сначала рассмотрим частный случай $m = 2k$, $t = 0$. Положим

$$f = f(\underbrace{e_{-1}, \dots, e_{-1}}_{\alpha}, \underbrace{e_0, \dots, e_0}_{\beta}, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{\gamma}, \underbrace{e_2, \dots, e_2}_{\delta}) = (f_2^l)(f_4)^k. \quad (7)$$

В записи f элемент e_{-1} встречается в k кососимметричных наборах порядка 4, в $2k = m$ кососимметричных наборах порядка 2 и в l кососимметричных наборах порядка 3. Неальтернируемые e_{-1} в f отсутствуют. Общая степень α по e_{-1} у f равна $k + l + m$. Элемент e_0 встречается тоже k раз в 4-альтернированных наборах, $m = 2k$ раз – в 2-альтернированных и l раз – в 3-альтернированных наборах, всего $k + l + m$ раз. Наконец, e_1 входит в k кососимметричных наборов порядка 4 и в l кососимметричных наборов порядка 3, а e_2 – в k кососимметричных наборов порядка 4.

Это и означает, что f является значением полинома, порождающего неприводимый модуль, соответствующий разбиению

$$\lambda = (k + l + m + t, k + l + m, k + l, k), \quad \text{где } m = 2k, \quad t = 0.$$

Следовательно, $m_\lambda \neq 0$ для этого разбиения, так как $f = (-e_0)^{k+l} = \pm e_0$.

Рассмотрим более общий случай, когда $m = 2k$ и $t > 0$. Положим $n_0 = n - t$ и для разбиения

$$\lambda_0 = (k + l + m, k + l + m, k + l, k) \vdash n_0$$

построим многочлен f , указанный в (7). Тогда

$$\begin{aligned} g &= f(\underbrace{e_{-1} + e_0, \dots, e_{-1} + e_0}_\alpha, e_0, \dots, e_2) \underbrace{(e_{-1} + e_0) \cdots (e_{-1} + e_0)}_t \\ &= f(e_{-1} + e_0, \dots, e_{-1} + e_0, e_0, \dots, e_2) + f', \end{aligned}$$

где $f' = tf(e_{-1}, \dots, e_{-1}, e_0, \dots, e_2)e_{-1} \in W_{-1}$ поскольку $(W_{-1} \oplus W_1 \oplus W_2)e_{-1} = 0$. Кроме того,

$$f(e_{-1} + e_0, \dots, e_{-1} + e_0, e_0, \dots, e_2) = f(e_{-1}, \dots, e_{-1}, e_0, \dots, e_2) + f'',$$

где $f'' \in W_1 \oplus W_2$. Отсюда следует, что $g = \pm e_0 + f' + f'' \neq 0$, и g является значением полинома, порождающего неприводимый FS_n -модуль с характером χ_λ . Следовательно, $m_\lambda \neq 0$ в (6).

Теперь пусть $m = 2q < 2k$ и $t \neq 0$. Рассмотрим произведение

$$(f_1)^{k-q}(f_2)^l(f_4)^q = f_0 = f_0(\underbrace{e_{-1}, \dots, e_{-1}}_\alpha, \underbrace{e_0, \dots, e_0}_\beta, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_\gamma, \underbrace{e_2, \dots, e_2}_\delta).$$

Как и выше, $\delta = k$ и все e_2 входят в кососимметричные наборы порядка 4, $\gamma = k + l$, $\beta = k + l + m$ и все e_1, e_0 входят в кососимметричные наборы, причем k из них для e_1 – наборы порядка 4, а l – порядка 3. Для e_0 число наборов порядка 4, 3 и 2 равно k, l и m соответственно. Элемент e_{-1} тоже встречается в кососимметричных наборах порядка 4, 3 и 2, число которых равно $k - q + q = k, l$ и $2q = m$ соответственно. Но кроме этого e_{-1} встречается еще $2(k - q)$ раз вне кососимметричных наборов за счет множителя f_1^{k-q} . В частности,

$$\alpha = k + l + m + t_0,$$

где $t_0 = 2(k - q)$, т.е. $m + t_0 = 2k$.

Рассмотрим выражение

$$f'_0 = f_0(\underbrace{e_{-1} + e_0, \dots, e_{-1} + e_0}_\alpha, \underbrace{e_0, \dots, e_0}_{\beta=k+l+m}, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{\gamma=k+l}, \underbrace{e_2, \dots, e_2}_{\delta=k}),$$

а вместе с ним и выражение

$$f = f'_0 \underbrace{(e_{-1} + e_0) \cdots (e_{-1} + e_0)}_{t-t_0}.$$

Как и в предыдущем случае,

$$f = f_0 + f' + f'',$$

где $f_0 = \pm e_0$, $f' \in W_{-1}$ а $f'' \in W_+$, т.е. $f \neq 0$. Тогда f является ненулевым значением полинома, отвечающего разбиению

$$\lambda = (k + l + m + t, k + l + m, k + l, k) \quad \text{с} \quad m = 2q < 2k.$$

Значит, и для таких разбиений λ кратности в (6) ненулевые.

Наконец, при нечетном $m = 2q + 1 < 2k$ мы сначала берем произведение

$$f_0 = f_1^{k-q-1} f_2^l f_3 f_4^q,$$

а затем заменяем в нем e_{-1} на $e_{-1} + e_0$ и берем

$$f = f_0(e_{-1} + e_0, \dots, e_{-1} + e_0, e_0, \dots, e_0, \dots, e_2, \dots, e_2) \underbrace{(e_{-1} + e_0) \dots (e_{-1} + e_0)}_{t-t_0},$$

где $t_0 = 2(k - q) - 1$. Тогда $e'_{-1} = e_{-1} + e_0$ в записи f_0 входит в k кососимметричных наборов из четырех элементов, в l наборов из 3-х элементов, в $m = 2q + 1$ наборов из 2-х элементов и вне альтернированных наборов встречается t раз. Для e_0, e_1, e_2 выполняются те же условия, что и в предыдущем случае. Поскольку $f_0 = \pm e_0$, а $f = f_0 + f'$, где $f' \in W_{-1} \oplus W_1 \oplus W_2$, то $f \neq 0$. Другими словами, кратность m_λ не равна нулю и для $\lambda = (k + l + m + t, k + l + m, k + l, k)$ с нечетным $m < 2k$, если $m + t \geq 2k$. Таким образом, для $k \neq 0$ лемма доказана.

Если же $k = 0$, то и $m = 0$ и разбиение λ имеет вид $\lambda = (l + t, l, l)$. Для него полилинейный многочлен строится аналогичным образом. Сначала возьмем

$$f = f_2^l = f(e_{-1}, \dots, e_{-1}, e_0, \dots, e_0, e_1, \dots, e_1)$$

степени l по каждому из базисных элементов e_{-1}, e_0, e_1 . Затем положим

$$f' = f(e_{-1} + e_0, \dots, e_{-1} + e_0, e_0, \dots, e_1) \underbrace{(e_{-1} + e_0) \dots (e_{-1} + e_0)}_t.$$

Тогда, как и прежде, f' не является тождеством W и порождает S_n -модуль с характером χ_λ .

4. Оценки PI-экспоненты. Поскольку алгебра W проста, то ее PI-экспонента существует (см. [13; теорема 3]). Для ее оценки, в частности, для доказательства ее нецелочисленности введем следующую величину.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_4) \vdash n$ и m_λ – кратность λ в кохарактере (6). Положим

$$a_n = \max\{\Phi(\lambda) \mid m_\lambda \neq 0\}.$$

Тогда в силу леммы 1

$$\overline{\exp(A)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \underline{\exp(A)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (8)$$

для любой четырехмерной алгебры.

Рассмотрим теперь последовательность $\{a_n\}$ для алгебры W . Тогда в силу (8) и [13; теорема 3] последовательность $\{a_n\}$ имеет предел при $n \rightarrow \infty$. Нам потребуется еще одно свойство этой последовательности.

ЛЕММА 5. Пусть $a_n = \Phi(\lambda^{(0)})$. Тогда можно выбрать разбиение $\lambda^{(0)}$ таким, что $wt(\lambda^{(0)}) \geq 0$ для достаточно больших n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda^{(0)}$ — одна из точек максимума $\Phi(\lambda)$, определяющих a_n . Можно считать, что для всех таких $\lambda \vdash n$ с $\Phi(\lambda) = a_n$ это разбиение максимального веса. Как и раньше, запишем $\lambda^{(0)}$ в виде

$$\lambda^{(0)} = (k + l + m + t, k + l + m, k + l, k).$$

Предположим, что $wt(\lambda^{(0)}) = -m - t + 2k < 0$, т.е. $m + t > 2k$.

Заметим сначала, что $k \neq 0$ у $\lambda^{(0)}$. Действительно, нетрудно заметить, что $\Phi(\lambda^{(0)}) \leq 3$ при $k = 0$. В то же время для разбиения $\lambda = (3p, p, p, p)$ мы имеем

$$\Phi(\lambda) = \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{6} \right)^{3/6} \right)^{-1} = \sqrt{12} > 3.4.$$

Поскольку последовательность $\{a_n\}$ сходится, а для любого n найдется такое p , что $|n - 6p| \leq 5$, то $a_n > 3$ при всех достаточно больших n , и $k \neq 0$.

Заметим теперь, что если в диаграмме D_λ перенести одну клетку из 2-й строки в 3-ю, то получим D_μ , где

$$\mu = (k' + l' + m' + t', k' + l' + m', k' + l', k') \quad \text{с} \quad k' = k, \quad t' = t + 1, \quad m' = m - 2.$$

Поэтому либо $m' - 2k' > 0$, и тогда $m' + t' - 2k' > 0$, либо $m' - 2k' = 0$ или -1 . В последних двух случаях выполняется неравенство $m' + t' - 2k' \geq 0$. Таким образом, при $m \geq 2$, выталкивая вниз одну или несколько клеток, мы переходим к разбиению μ большего веса, для которого $\Phi(\mu) \geq \Phi(\lambda^{(0)})$ по лемме 2. При этом μ удовлетворяет условиям леммы 4, и поэтому $m_\mu \neq 0$ в (6). В силу максимальнойности веса $\lambda^{(0)}$ мы получаем условие $m \leq 1$.

Но тогда $t \geq 2k \geq 2$ и, перебрасывая одну клетку у $D_{\lambda^{(0)}}$ из 1-й строки во 2-ю, мы получим диаграмму D_μ , для которой $\Phi(\mu) \geq \Phi(\lambda^{(0)})$ и $wt(\mu) > wt(\lambda^{(0)})$. При этом μ тоже удовлетворяет условиям леммы 4 и $m_\mu \neq 0$. Отсюда следует, что $m + t - 2k \leq 0$ у $\lambda^{(0)}$, и лемма доказана.

Ранее мы отмечали, что если диаграмма D_μ получена из диаграммы D_λ выталкиванием вниз одной клетки, то $\Phi(\mu) \geq \Phi(\lambda)$. Теперь мы оценим, насколько велико это отклонение.

ЛЕММА 6. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ и $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{q'})$ — два разбиения числа n , где $q' = q$ или $q + 1$ и D_μ получена из D_λ выталкиванием вниз одной клетки. Тогда

$$\Phi(\lambda) \geq \frac{1}{n(q^2 + 3q + 4)/n} \Phi(\mu).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Процедура выталкивания клетки можно осуществить в два шага. Сначала вырезаем клетку из D_λ и получаем $D_{\lambda'}$, где $\lambda' \vdash n - 1$, а затем, подклеивая одну клетку к $D_{\lambda'}$, получаем D_μ . Тогда по лемме 6.2.4 из [2]

$$\deg \chi_{\lambda'} \leq \deg \chi_\lambda \leq n \deg \chi_{\lambda'}, \quad \deg \chi_{\lambda'} \leq \deg \chi_\mu \leq n \deg \chi_{\lambda'},$$

откуда легко вытекает, что

$$\deg \chi_\lambda \geq \frac{1}{n} \deg \chi_\mu. \quad (9)$$

Тогда из (9) и формулы (4) получаем

$$\Phi(\lambda)^n \geq \frac{1}{n} \deg \chi_\lambda \geq \frac{1}{n^2} \deg \chi_\mu \geq \frac{1}{n^{(q+1)^2+q+1+2}} \Phi(\mu)^n,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Докажем еще одно соотношение, связывающее значения функции Φ для разных разбиений.

ЛЕММА 7. Пусть диаграмма Юнга разбиения

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \vdash (n-1)$$

получена из диаграммы D_μ вычеркиванием одной клетки. Тогда

$$\Phi(\lambda) \leq n^{(d^2+d+2)/n} \Phi(\mu)$$

при $n \geq d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле (4)

$$\Phi(\lambda)^{n-1} \leq (n-1)^{d^2+d} \deg \chi_\lambda \leq n^{d^2+d} \deg \chi_\lambda, \quad \deg \chi_\mu \leq n \Phi(\mu)^n.$$

С другой стороны, $\deg \chi_\lambda \leq \deg \chi_\mu$ согласно [2; лемма 6.2.4]. Поскольку максимальное значение $\Phi(\lambda)$ равно d , то отсюда получаем

$$\Phi(\lambda) \leq n^{(d^2+d+2)/n} \Phi(\mu).$$

Определим еще одну последовательность, связанную с W . Пусть $n \geq 6$. Положим

$$b_n = \max\{\Phi(\lambda) \mid \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_4) \vdash n, m_\lambda \neq 0, \lambda_1 - \lambda_3 = 2\lambda_4\},$$

если n допускает разбиение λ с $\lambda_1 - \lambda_3 = 2\lambda_4$ и с $m_\lambda \neq 0$ в (6). В противном случае положим $b_n = \min\{b_{n-1}, a_n\}$. Заметим, что согласно лемме 4 при $n = 6k$ разбиение $\lambda = (3k, k, k, k)$ удовлетворяет необходимым условиям.

ЛЕММА 8. Имеют место равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \exp(W).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [13; теорема 3] РИ-экспонента любой конечномерной простой алгебры существует и, следовательно, существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \exp(W)$, как вытекает из (8). Теперь чтобы доказать лемму, достаточно найти такую функцию $\psi = \psi(n)$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = 1$ и

$$\psi(n)a_n \leq b_n \leq a_n \quad (10)$$

для всех достаточно больших n .

Зафиксируем n и возьмем такое разбиение $\lambda \vdash n$, что $\Phi(\lambda) = a_n$. По лемме 5 можно выбрать λ так, что $wt(\lambda) \geq 0$. Но тогда из леммы 3 вытекает, что $wt(\lambda)$ равняется 0, 1 или 2.

Если $wt(\lambda) = 0$, то $b_n = a_n$. Пусть $wt(\lambda) = 1$. Запишем λ как

$$\lambda = (k + l + m + t, k + l + m, k + l, k).$$

Тогда $m + t = 2k - 1$. Если $m \neq 0$, то можно перенести одну клетку из 2-й строки в 1-ю в диаграмме D_λ и получить диаграмму D_μ , $\mu = (k + l + m' + t', k + l + m', k + l, k)$, у которой $m' = m - 1$, $t' = t + 2$, а $wt(\mu) = 0$. Тогда по лемме 4 μ имеет ненулевую кратность в $\chi_n(W)$. Как отмечалось в доказательстве леммы 5, разбиение λ имеет ненулевую компоненту k . Поэтому с учетом леммы 6 мы имеем

$$b_n \geq \Phi(\mu) \geq \frac{\Phi(\lambda)}{n^{32/n}} = \frac{a_n}{n^{32/n}}. \quad (11)$$

Если $m = 0$, но $l > 0$ и $t > 0$, то разбиение μ с нулевым весом можно получить переносом одной клетки из 3-й строки во 2-ю у D_λ , и мы снова получаем неравенство (11) для b_n . Заметим, что случай $m = 0$, $l > 0$, $t = 0$ невозможен, так как $m + t = 2k - 1$.

Единственное разбиение λ с $wt(\lambda) = 1$, которое не допускает указанных переносов, — это разбиение $(3k - 1, k, k, k)$. Но тогда

$$\Phi(\lambda) \leq n^{22/n} \Phi(\mu) \quad (12)$$

по лемме 7, где $\mu = (3k, k, k, k)$. Поскольку $\Phi(\mu) = \sqrt{12} < 3.48$, то мы получаем

$$\Phi(\lambda) < n^{22/n} \cdot 3.48.$$

Заметим теперь, что разбиение вида $\rho = (3q, 3q, q, q)$ удовлетворяет условиям леммы 4 и

$$\Phi(\rho) = \frac{8}{\sqrt[4]{27}} > 3.5,$$

поэтому $\Phi(\lambda)$ не может удовлетворять неравенству (12) при достаточно больших n , т.е. $\lambda \neq (3k - 1, k, k, k)$, и неравенство (11) выполнено, если $wt(\lambda) = 1$.

Пусть теперь $wt(\lambda) = 2$. Тогда будем поднимать два раза по одной клетке на одну строку выше в диаграмме D_λ . Этого нельзя сделать, только если $\lambda = (3k - 2, k, k, k)$, либо $\lambda = (q, q, q, 1)$, либо после переноса одной клетки вверх мы получим разбиение $\mu = (3k - 1, k, k, k)$. Первый и третий случаи исключаются так же, как и при $wt(\lambda) = 1$, поскольку такие разбиения не могут дать максимальное значение $\Phi(\lambda)$, а второй невозможен, поскольку $\deg \chi_\lambda \leq n \deg \chi_\mu$, если $\lambda = (q, q, q, 1) \vdash n$ и $\mu = (q, q, q) \vdash (n - 1)$, а $\Phi(\mu) = 3$.

Во всех остальных случаях двукратное применение леммы 6 дает нам соотношение

$$b_n \geq \frac{a_n}{n^{64/n}}. \quad (13)$$

Из (11) и (13) получаем требуемое условие (10), и лемма доказана.

Чтобы сформулировать и доказать основные результаты статьи, расширим область определения функции Φ . Для любых $0 \leq x_1, \dots, x_4 \leq 1$ положим

$$\Phi(x_1, \dots, x_4) = \frac{1}{x_1^{x_1} \dots x_4^{x_4}} \quad (14)$$

и рассмотрим внутри области определения Φ замкнутое подмножество T , заданное условиями

$$\begin{cases} x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 = 2x_4. \end{cases} \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 1. *PI-Экспонента алгебры W существует и равна*

$$\exp(W) = \max\{\Phi(x_1, \dots, x_4) \mid (x_1, \dots, x_4) \in T\}. \quad (16)$$

В частности, $\exp(W) \approx 3.610718614$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование экспоненты уже отмечалось ранее, поскольку W проста. Кроме того,

$$\exp(W) = b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

по лемме 8. Осталось показать, что $b = M$, где

$$M = \max\{\Phi(x_1, \dots, x_4) \mid (x_1, \dots, x_4) \in T\}.$$

Пусть $Z = (z_1, \dots, z_4)$ – точка максимума Φ на T . Ясно, что можно найти точку $A = (a_1, \dots, a_4) \in T$ с рациональными коэффициентами, сколь угодно близкую к Z . Обозначим через m общий знаменатель рациональных чисел $a_1, \dots, a_4$. Тогда $\lambda_1 = a_1 m, \dots, \lambda_4 = a_4 m$ – неотрицательные целые числа, причем $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_4$. Другими словами, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_4)$ – разбиение числа m , удовлетворяющее условию $\lambda_1 - \lambda_3 = 2\lambda_4$. Более того, для любого $t = 1, 2, \dots$ разбиение $t\lambda = (t\lambda_1, \dots, t\lambda_4)$ числа $n_t = tm$ удовлетворяет тому же условию. Отсюда следует, что

$$b_{n_t} \geq \Phi(t\lambda) = \Phi(\lambda). \quad (17)$$

Поскольку последовательность $\{b_i\}$ сходится, а $\Phi(\lambda)$ в (17) можно сделать сколь угодно близкой к M , то $b \geq M$. Так как обратное условие очевидно, то мы доказали соотношение $b = M$.

Для полного завершения доказательства осталось обосновать приближенную оценку для $\exp(W)$. В работе [11] был построен пример бесконечномерной алгебры Ли L , у которой $3.1 < \exp(L) \leq \exp(L) < 3.9$. Недавно [12] было доказано существование обычной PI-экспоненты L , т.е. равенство $\exp(L) = \overline{\exp(L)}$. Более того, оказалось что

$$\exp(L) = \max\{\Phi(x_1, \dots, x_4) \mid (x_1, \dots, x_4) \in T\},$$

где Φ – функция, определенная в (14), а область T задана соотношениями (15). В той же работе было показано, что

$$M = \Phi(\beta_1, \dots, \beta_4),$$

где β_4 – положительный корень уравнения $16t^3 - 24t^2 + 11t - 1 = 0$, $\beta_4 \approx 0.276953179$, а

$$\beta_3 = 2\beta_4 - 4\beta_4^2, \quad \beta_2 = \frac{\beta_3^2}{\beta_4}, \quad \beta_1 = \frac{\beta_3^3}{\beta_4^2}.$$

Отсюда $\exp(W) = \exp(L) \approx 3.610718614$, и теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Существуют конечномерные простые алгебры с единицей с дробной экспонентой, строго меньшей их размерности.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Наименьшая размерность алгебр с единицей, в которой встречаются дробные PI-экспоненты, равна 4.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема 1 показывает, что в размерности 4 примеры существуют. То, что они отсутствуют среди двумерных и трехмерных алгебр, следует из результатов [17].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. А. Бахтурин, *Тождества в алгебрах Ли*, Наука, М., 1985.
- [2] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, Math. Surveys Monogr., **122**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [3] К. А. Жевлаков, А. М. Слинко, И. П. Шестаков, А. И. Ширшов, *Кольца, близкие к ассоциативным*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.
- [4] A. Giambruno, M. Zaicev, “On codimension growth of finitely generated associative algebras”, *Adv. Math.*, **140**:2 (1998), 145–155.
- [5] A. Giambruno, M. Zaicev, “Exponential codimension growth of PI algebras: an exact estimate”, *Adv. Math.*, **142**:2 (1999), 221–243.
- [6] A. Giambruno, A. Regev, M. V. Zaicev, “Simple and semisimple Lie Algebras and codimension growth”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**:4 (2000), 1935–1946.
- [7] М. В. Зайцев, “Целочисленность экспонент роста тождеств конечномерных алгебр Ли”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:3 (2002), 23–48.
- [8] A. Giambruno, M. Zaicev, “Codimension growth of special simple Jordan algebras”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **362**:6 (2010), 3107–3123.
- [9] A. Giambruno, I. Shestakov, M. Zaicev, “Finite dimensional nonassociative algebras and codimension growth”, *Adv. Appl. Math.*, **47**:1 (2011), 125–139.
- [10] S. P. Mishchenko, A. Regev, M. Zaicev, “Integrality of exponents of some abelian-by-nilpotent varieties of Lie algebras”, *Comm. Algebra*, **28**:9 (2000), 4105–4130.
- [11] M. V. Zaicev, S. P. Mishchenko, “An example of a variety of Lie algebras with a fractional exponent”, *J. Math. Sci.*, **93**:6 (1999), 977–982.
- [12] А. Б. Веревкин, М. В. Зайцев, С. П. Мищенко, “Достаточное условие совпадения нижней и верхней экспонент многообразия линейных алгебр”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2011, № 2, 36–39.
- [13] A. Giambruno, M. Zaicev, “On codimension growth of finite-dimensional Lie superalgebras”, *J. London Math. Soc.* (2), **85** (2012), 534–548.
- [14] A. Giambruno, S. Mishchenko, M. Zaicev, “Algebras with intermediate growth of the codimensions”, *Adv. Appl. Math.*, **37**:3 (2006), 360–377.
- [15] A. Giambruno, S. Mishchenko, M. Zaicev, “Codimensions of Algebras and Growth Functions”, *Adv. Math.*, **217**:3 (2008), 1027–1052.
- [16] A. Giambruno, S. Mishchenko, M. Zaicev, “Codimension growth of two dimensional algebras”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135**:11 (2007), 3405–3415.
- [17] М. В. Зайцев, “Тождества конечномерных унитарных алгебр”, *Алгебра и логика*, **50**:5 (2011), 563–594.

- [18] A. Giambruno, S. Mishchenko, M. Zaicev, “Polynomial identities of algebras of small dimension”, *Comm. Algebra*, **37**:6 (2009), 1934–1948.
- [19] С. С. Мищенко, “Рост коразмерностей коммутативных и некоммутативных алгебр”, *Алгебра и математическая логика*, Материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора В. В. Морозова, и молодежной школы-конференции “Современные проблемы алгебры и математической логики” (Казань, 25–30 сентября 2011), КФУ, Казань, 2011, 144–145.
- [20] A. Regev, “Codimensions and trace codimensions of matrices are asymptotically equal”, *Israel J. Math.*, **47**:2-3 (1984), 246–250.
- [21] Г. Джеймс, *Теория представлений симметрических групп*, Математика. Новое в зарубежной науке, **32**, Наука, М., 1982.

М. В. Зайцев

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: zaicevmv@mail.ru

Поступило

02.04.2012

Исправленный вариант

03.06.2013

Д. Реповш

University of Ljubljana, Словения
E-mail: dusan.repovs@guest.arnes.si