Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Малыхин, Скобочная энтропия и VC-размерность, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 6, 853–860

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9388>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 14:34:19

Скобочная энтропия и VC-размерность

Ю. В. Малыхин

Исследуется связь между двумя характеристиками функциональных классов – псевдоразмерностью и скобочной энтропией. (Псевдоразмерность есть обобщение VC-размерности на классы функций. Скобочная энтропия характеризует L_1 -погрешность односторонней аппроксимации класса конечными множествами.) Показано, что классы непрерывных функций с конечной псевдоразмерностью обладают конечной скобочной ε -энтропией при любом $\varepsilon > 0$. Установлен общий результат о связи VC-размерности классов множеств и скобочной энтропии.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. В данной работе рассматриваются измеримые функции $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Для двух таких функций P, Q введем обозначение “скобки” (англ. “bracket”)

$$[P, Q] := \{f : \forall x \in [0, 1] \ P(x) \leq f(x) \leq Q(x)\}.$$

Пусть $\mathcal{F}$ – некоторый класс функций, $\varepsilon > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скобочным энтропийным числом $N_{[]}(\mathcal{F}, \varepsilon)$ класса $\mathcal{F}$ называется минимальное число N , при котором существуют функции $P_1, \dots, P_N$ и $Q_1, \dots, Q_N$ такие, что

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{i=1}^N [P_i, Q_i] \quad \text{и} \quad \int_0^1 |P_i(x) - Q_i(x)| dx \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

Класс $\mathcal{F}$ называется *скобочно-компактным*, если $N_{[]}(\mathcal{F}, \varepsilon) < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Псевдоразмерностью $\dim_{\mathcal{P}} \mathcal{F}$ класса $\mathcal{F}$ называется максимальное число d такое, что существуют точки $x_1, \dots, x_d \in [0, 1]$ и числа $y_1, \dots, y_d \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию: для любого набора знаков $\sigma_1, \dots, \sigma_d \in \{-1, 1\}$ найдется функция $f \in \mathcal{F}$ такая, что

$$\sigma_i(f(x_i) - y_i) > 0, \quad i = 1, \dots, d. \quad (2)$$

Если таких d бесконечно много, то $\dim_{\mathcal{P}} \mathcal{F} = \infty$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-12173-офи-м).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Первоначальное определение было дано Вапником и Червоненкисом [1] для семейств множеств, а не функций. Соответствующая величина получила название VC-размерности. Современное определение для классов функций принадлежит Хаусслеру [2].

Оба приведенных понятия – скобочная энтропия и псевдоразмерность – используются в достаточных условиях различных форм равномерного закона больших чисел. Пусть $X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Тогда в силу закона больших чисел для любой функции f с $E|f(X_1)| < \infty$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) - Ef(X_1) \right| \rightarrow 0 \quad \text{п.в.}$$

Равномерный закон больших чисел (РЗБЧ) означает, что сходимость равномерна по классу $\mathcal{F} \ni f$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) - Ef(X_1) \right| = 0 \quad \text{п.в.} \quad (3)$$

Блюм [3] и позднее Дехардт [4] доказали, что скобочная компактность $\mathcal{F}$ достаточна для выполнения (3); при этом мера в определении $N_{[]}$ берется не лебеговой, а совпадающей с распределением X_1 . Вапник и Червоненкис [1] доказали, что для РЗБЧ достаточно конечности VC-размерности соответствующего класса и равномерной ограниченности.

В силу вышесказанного представляет интерес вопрос о том, как скобочная компактность и псевдоразмерность связаны между собой; этому и посвящена настоящая работа.

Легко видеть, что скобочная компактность не влечет конечности псевдоразмерности: класс функций, принимающих значения ± 1 в точках $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ и 0 в остальных точках, имеет бесконечную псевдоразмерность, однако покрывается одной скобкой

$$[-\mathbf{1}_{\{1/n : n \in \mathbb{N}\}}, \mathbf{1}_{\{1/n : n \in \mathbb{N}\}}].$$

Обратно, класс

$$\mathcal{F} = \{n^2 \mathbf{1}_{[1/(n+1), 1/n)} : n \in \mathbb{N}\}$$

не компактен в $L_1[0, 1]$, поэтому и не скобочно-компактен, хотя $\dim_{\mathcal{P}} \mathcal{F} = 1$. Конечно, этот пример не очень интересен, поскольку в большинстве приложений класс $\mathcal{F}$ предполагается равномерно ограниченным или хотя бы мажорируемым функцией из L_1 .

ПРИМЕР 1. Для $k = 1, 2, \dots$ построим наборы точек $\{x_1^{(k)}, \dots, x_k^{(k)}\} \subset (0, 1)$. При $k = 1$ возьмем $x_1^{(1)}$ произвольно. На k -м шаге выберем точки так, что

$$x_l^{(k)} \in \left(\frac{l-1}{k}, \frac{l}{k} \right), \quad l = 1, 2, \dots, k,$$

и

$$x_{l_1}^{(k)} - x_{l_2}^{(k)} \not\equiv x_{l_3}^{(k')} - x_{l_4}^{(k')} \pmod{1}$$

при $k' < k$, $l_1 \neq l_2$, $l_3 \neq l_4$ и при $k' = k$, $l_1 \neq l_2$, $l_3 \neq l_4$, $(l_1, l_2) \neq (l_3, l_4)$.

Пусть $\mathcal{F}$ – множество характеристических функций всевозможных сдвигов $\pmod{1}$ множеств $\{x_1^{(k)}, \dots, x_k^{(k)}\}$. Тогда $\dim_{\mathcal{P}} \mathcal{F} \leq 2$, но $\mathcal{F}$ не скобочно компактен.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Говоря о сдвигах $\bmod 1$ и инвариантности класса относительно сдвигов, будем предполагать, что $f(1) = f(0)$.

Псевдоразмерность класса $\mathcal{F}$ из примера легко вычисляется; что же касается скобочной компактности, для классов, инвариантных относительно сдвигов, имеется общий критерий в терминах *усредненного модуля непрерывности*

$$\tau(f, \delta) := \int_0^1 \left(\sup_{|x-t| \leq \delta/2} f(x) - \inf_{|x-t| \leq \delta/2} f(x) \right) dt.$$

ТЕОРЕМА 1 [5]. Класс $\mathcal{F}$, инвариантный относительно сдвигов, является скобочно-компактным, если и только если выполнены следующие условия:

- $\mathcal{F}$ равномерно ограничен: $\sup_{f \in \mathcal{F}, x \in [0,1]} |f(x)| < \infty$;
- усредненные модули непрерывности функций из $\mathcal{F}$ равномерно стремятся к нулю:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{f \in \mathcal{F}} \tau(f, \delta) = 0.$$

В случае непрерывных функций ситуация меняется.

ТЕОРЕМА 2. Если $\mathcal{F} \subset C[0, 1]$ имеет мажоранту из $L_1[0, 1]$ и $\dim_{\mathcal{P}} \mathcal{F} < \infty$, то $\mathcal{F}$ скобочно-компактен.

Дело осложняется тем, что в отличие от обычной L_1 -энтропии (см. [6]) скобочную энтропию нельзя оценить через псевдоразмерность. В следующем примере показан класс кусочно-линейных функций, ограниченных по модулю единицей, с фиксированной псевдоразмерностью, но сколь угодно большой энтропией.

ПРИМЕР 2. Пусть p – простое число, большее 2. Положим $n = p^2$,

$$i(u, v) = u + pv \in \{0, \dots, n-1\} \quad \text{для } u, v \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} - \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

и сдвиги φ_i , где $\varphi_i(x) := \varphi(nx - i)$ при $x \in [i/n, (i+1)/n]$ и 0 при остальных x . Для $a, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ определим функцию

$$f_{a,b} := \sum_{au+bv \equiv 1 \bmod p} \varphi_{i(u,v)}.$$

Наконец, пусть

$$\mathcal{F} := \{f_{a,b} : a, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, (a, b) \neq (0, 0)\}.$$

Тогда $\dim_{\mathcal{P}} \mathcal{F} = 2$ и $N_{[]}(\mathcal{F}, 1/8) > p$.

Идея примера проста: строятся $p^2 - 1$ множеств

$$M_{a,b} = \{(u, v) : au + bv \equiv 1 \bmod p\}$$

мощности $|M_{a,b}| = p$, удаленные друг от друга:

$$|M_{a,b} \cap M_{a',b'}| \leq 1.$$

Легко показать, что мощность объединения k таких множеств не менее, чем $pk - k(k-1)/2$; при $k = p$ отсюда вытекает требуемый результат.

2. Семейства множеств. В данном пункте мы будем рассматривать произвольные семейства измеримых множеств, а не функции, заданные на $[0, 1]$. Данные во введении определения переносятся на этот случай. Приведенные здесь результаты нужны для доказательства теоремы 2, но представляют также и самостоятельный интерес.

Пусть (X, Ω, μ) – вероятностное пространство, $\mathcal{A} \subset \Omega$ – семейство измеримых множеств. Можно определить $N_{[\cdot]}(\mathcal{A}, \varepsilon)$ аналогично случаю функций, при этом роль “скобок” будут играть семейства

$$[B, C] = \{A: B \subset A \subset C\}.$$

Далее, VC-размерность семейства множеств – это просто псевдоразмерность класса характеристических функций этих множеств. Будем обозначать VC-размерность через $\dim_{\text{vc}}$.

Теорема 2, как будет показано, вытекает из следующего результата.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$. Рассмотрим конечные семейства измеримых множеств $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$. Если $N > N(d, \varepsilon)$ достаточно велико, и $N_{[\cdot]}(\mathcal{A}_i, \varepsilon)$ достаточно велико по сравнению с $|\mathcal{A}_{i-1}|$, то

$$\dim_{\text{vc}}\left(\bigcup_{i=1}^N \mathcal{A}_i\right) \geq d.$$

При написании данной статьи автор узнал о работе [7], из которой также следует теорема 2. Адамс и Нобель доказывают следующее.

ТЕОРЕМА А [7]. Если семейство $\mathcal{A}$ счетно и $\dim_{\text{vc}}(\mathcal{A}) < \infty$, то $\mathcal{A}$ скобочно-компактно, т.е. $N_{[\cdot]}(\mathcal{A}, \varepsilon) < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

Отметим, что теорема 3 влечет теорему А и была получена автором независимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Мы выведем теорему 2 из теоремы 3 по следующей схеме:

$$\text{теорема 3} \implies \text{теорема А} \implies \text{теорема 2}.$$

(Теорема 3 будет доказана в следующем пункте.) Покажем сначала, что следует из теоремы А. Предположим, $N_{[\cdot]}(\mathcal{F}, \varepsilon_0) = \infty$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$. В силу сепарабельности пространства $C[0, 1]$ существует счетное подмножество $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ такое, что

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad \exists f_0 \in \mathcal{F}_0: \quad \|f - f_0\|_C \leq \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Если $\mathcal{F}_0 \subset \bigcup_{i=1}^N [P_i, Q_i]$, то

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{i=1}^N \left[P_i - \frac{\varepsilon_0}{4}, Q_i + \frac{\varepsilon_0}{4} \right],$$

поэтому $N_{[\cdot]}(\mathcal{F}_0, \varepsilon_0/2) = \infty$ и задача сводится к счетному классу $\mathcal{F}_0$.

Пусть f^* – суммируемая мажоранта для $\mathcal{F}$: $|f(x)| \leq f^*(x)$, $f \in \mathcal{F}$. Перейдем от функций к множествам следующим образом:

$$\mathcal{F} \ni f \mapsto s(f) := \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, f(x) \leq y \leq f^*(x)\}.$$

Пусть $\mathcal{S}_0 = \{s(f) : f \in \mathcal{F}_0\}$. Легко видеть, что

$$\dim_{\mathcal{P}} \mathcal{S}_0 = \dim_{\mathcal{P}} \mathcal{F}_0 \leq \dim_{\mathcal{P}} \mathcal{F} < \infty.$$

Семейство $\mathcal{S}_0$ состоит из множеств, измеримых относительно меры $\lambda_2/(2\|f^*\|_1)$, где λ_2 – двумерная мера Лебега. Покажем, что

$$N_{[]}(\mathcal{S}_0, \varepsilon_1) = \infty \quad \text{для} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_0/(4\|f^*\|_1).$$

Действительно, из покрытия $\mathcal{S}_0$ скобками $[P, Q]$ можно составить покрытие $\mathcal{S}_0$ скобками $[P', Q']$, где $P' \supset P$, $Q' \subset Q$ – множества вида $s(f)$. А это уже даст соответствующее покрытие для $\mathcal{F}_0$. Итак, мы можем применить к $\mathcal{S}_0$ теорему А и получить противоречие.

Итак, мы показали, что теорема 2 следует из теоремы А. Докажем теперь теорему А, пользуясь теоремой 3. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots\}$ – счетное семейство множеств. Установим сначала, что

$$\text{если} \quad N_{[]}(\{A_1, \dots, A_k\}, \varepsilon) \leq N, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{то} \quad N_{[]}(\mathcal{A}, \varepsilon) \leq N.$$

Действительно, зафиксируем для каждого k нумерацию скобок $\pi_k : \{A_1, \dots, A_k\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$. Выберем в π_k подпоследовательность π_{k_n} , стабилизирующуюся на каждом A_k :

$$\pi_{k_n}(A_k) = \pi(A_k) \quad \text{при} \quad n > n(k).$$

Тогда, как нетрудно проверить, скобки $[P_i(\pi), Q_i(\pi)]$, определенные ниже, дадут нужное покрытие:

$$P_i(\pi) := \bigcap_{\pi(A_k)=i} A_k, \quad Q_i(\pi) := \bigcup_{\pi(A_k)=i} A_k.$$

Итак, пусть $N_{[]}(\mathcal{A}, \varepsilon) = \infty$. Зафиксируем $d \in \mathbb{N}$. Как мы только что установили, можно выбрать семейство $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ с большим $N_{[]}(\mathcal{A}_1, \varepsilon)$. Далее, выберем $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ с $N_{[]}(\mathcal{A}_2, \varepsilon)$ достаточно большим по сравнению с $|\mathcal{A}_1|$ (так, как это требуют условия теоремы 3). Продолжая этот процесс, мы получим последовательность $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$, $N > N(d, \varepsilon)$, к которой можно применить теорему 3 и вывести, что $\dim_{vc}(\mathcal{A}) \geq d$. Поскольку d можно заранее выбрать сколь угодно большим, $\dim_{vc}(\mathcal{A}) = \infty$ и теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 3. Нам потребуется несколько определений. Напомним, что мы имеем дело с вероятностным пространством (X, Ω, μ) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть задан набор непересекающихся множеств $\mathcal{B}$. Будем говорить, что

- множество A *рассекает* $\mathcal{B}$, если $B \cap A \neq \emptyset$, $B \setminus A \neq \emptyset$ для всех $B \in \mathcal{B}$;
- кортеж $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$ *рассекает* $\mathcal{B}$, если $B' := B \cap A_k \neq \emptyset$, $B'' := B \setminus A_k \neq \emptyset$ для всех $B \in \mathcal{B}$, и $\langle A_1, \dots, A_{k-1} \rangle$ *рассекает* $\{B', B'' : B \in \mathcal{B}\}$.

ЛЕММА 1. Если $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$ *рассекает* некоторый набор $\mathcal{B}$, то всевозможные множества вида

$$\bigcup_{i \in I} A_i \setminus \bigcup_{i \notin I} A_i$$

непусты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $A^0 = X \setminus A$, $A^1 = A$. Нужно доказать, что

$$A_1^{\varepsilon_1} \cap A_2^{\varepsilon_2} \cap \dots \cap A_k^{\varepsilon_k} \neq \emptyset$$

(где $\varepsilon_i = 1$ при $i \in I$, $\varepsilon_i = 0$ иначе). Возьмем произвольное $B \in \mathcal{B}$. Имеем $B \cap A_k^{\varepsilon_k} \neq \emptyset$ (так как это B' или B''), причем $\langle A_1, \dots, A_{k-1} \rangle$ пересекает $\{B \cap A_k^{\varepsilon_k}\}$. Поэтому

$$(B \cap A_k^{\varepsilon_k}) \cap A_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}} \neq \emptyset$$

и т.д.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Имеет место неравенство*

$$\dim_{\text{vc}}(\{A_1, \dots, A_k\}) \geq \lfloor \log_2 k \rfloor.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k = 2^d$. Перенумеруем A_i в виде $A_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)}$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$. Возьмем точки $x_1, \dots, x_d$ из условия

$$x_i \in \bigcup_{\varepsilon_i=1} A_\varepsilon \setminus \bigcup_{\varepsilon_i=0} A_\varepsilon.$$

Тогда $\dim_{\text{vc}}(\{A_\varepsilon\}) = d$ за счет точек $\{x_1, \dots, x_d\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ – разбиение множества X . Скажем, что

- множество $A \subset X$ измеримо относительно $\mathcal{U}$, если $U_i \cap A = \emptyset$ или $U_i \setminus A = \emptyset$ для всех i ; семейство $\mathcal{A}$ измеримо относительно $\mathcal{U}$, если таково каждое $A \in \mathcal{A}$;
- множество $B \subset X$ подчинено $\mathcal{U}$, если $B \subset U_i$ для некоторого i ; семейство $\mathcal{B}$ подчинено $\mathcal{U}$, если таково каждое $B \in \mathcal{B}$.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $\mathcal{U}_i$ – разбиение, порожденное семействами $A_1, \dots, A_i$. Мы имеем следующие свойства:

- $\mathcal{U}_{i-1}$ измеримо относительно $\mathcal{U}_i$;
- $\mathcal{A}_i$ измеримо относительно $\mathcal{U}_i$;
- $N_{[]}(\mathcal{A}_i, \varepsilon)$ достаточно велико по сравнению с мощностью $\mathcal{U}_{i-1}$.

Мы можем считать, что фиксировано не $d \in \mathbb{N}$, а $k \in \mathbb{N}$, и доказывать следующее.

Существует набор непересекающихся множеств $\mathcal{B}$ такой, что

- $\mathcal{B}$ подчинен некоторому $\mathcal{U}_s$;
- $\sum_{B \in \mathcal{B}} \mu(B) \geq c(k, \varepsilon) > 0$;
- существуют $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A} := \bigcup_{i=1}^N \mathcal{A}_i$ такие, что $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$ пересекает $\mathcal{B}$.

Отсюда мы получим, в частности, что

$$\dim_{\text{vc}}\left(\bigcup_{i=1}^N \mathcal{A}_i\right) \geq \lfloor \log_2 k \rfloor.$$

Доказательство проведем индукцией по k .

База индукции: $k = 1$. Достаточно рассмотреть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Каждому множеству $A \in \mathcal{A}_2$ сопоставим “скобку” $[A, \overline{A}]$, где

$$\underline{A} = \bigsqcup \{U \in \mathcal{U}_1 : U \subset A\}, \quad \overline{A} = \bigsqcup \{U \in \mathcal{U}_1 : U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Различных пар $(\underline{A}, \overline{A})$ не более $4^{|\mathcal{U}_1|}$. В силу наших предположений $N_{[]}(\mathcal{A}_2, \varepsilon)$ велико по сравнению с $|\mathcal{U}_1|$, и мы можем считать, что $N_{[]}(\mathcal{A}_2, \varepsilon) > 4^{|\mathcal{U}_1|}$. Следовательно, $\mu(\overline{A} \setminus \underline{A}) > \varepsilon$ для некоторого $A \in \mathcal{A}_2$. Положим

$$\mathcal{B} = \{U \in \mathcal{U}_1 : U \subset \overline{A} \setminus \underline{A}\},$$

тогда

- $\mathcal{B}$ подчинен $\mathcal{U}_1$;
- $\sum_{B \in \mathcal{B}} \mu(B) = \mu(\overline{A} \setminus \underline{A}) > \varepsilon$;
- A пересекает $\mathcal{B}$.

Индуктивный переход $k \mapsto k + 1$. Пользуясь предположениями индукции, построим набор множеств $\mathcal{B}_1$ суммарной меры $c(k, \varepsilon)$, подчиненный некоторому $\mathcal{U}_{s_1}$, и пересекаемый $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$. Обозначим $B_1 = \bigsqcup \{B \in \mathcal{B}_1\}$.

Рассмотрим

$$\mathcal{A}_r|_{B_1} = \{A \cap B_1 : A \in \mathcal{A}_r\} \quad \text{для } r < s_1.$$

Воспользуемся очевидным неравенством

$$N_{[]}(\mathcal{A}_r, \varepsilon) \leq N_{[]}(\mathcal{A}_r|_{B_1}, \frac{\varepsilon}{2}) \cdot N_{[]}(\mathcal{A}_r|_{U \setminus B_1}, \frac{\varepsilon}{2}). \quad (4)$$

Предположим, $N_{[]}(\mathcal{A}_r|_{B_1}, \varepsilon/2)$ достаточно велико. Тогда, сопоставляя $A \in \mathcal{A}_r$ скобки $[\underline{A}, \overline{A}]$,

$$\begin{aligned} \underline{A} &:= \bigsqcup \{U \cap B_1 : U \in \mathcal{U}_{r-1}, U \cap B_1 \subset A\}, \\ \overline{A} &:= \bigsqcup \{U \cap B_1 : U \in \mathcal{U}_{r-1}, U \cap B_1 \cap A \neq \emptyset\}, \end{aligned}$$

получим, что $A \cap B_1 \subset [\underline{A}, \overline{A}]$. Поскольку скобок мало, для некоторого множества A одна из них должна быть “большой”; для этого A положим

$$\mathcal{B} := \{U \cap B_1 : U \in \mathcal{U}_{r-1}, U \cap B_1 \subset \overline{A} \setminus \underline{A}\}.$$

Заметим, что

- $\mathcal{B}$ подчинен $\mathcal{U}_{r-1}$;
- $\sum_{B \in \mathcal{B}} \mu(B) \geq \varepsilon/2$.

Далее, пусть $B = U \cap B_1 \in \mathcal{B}$. Поскольку A, U измеримы относительно $\mathcal{U}_r$, а B_1 подчинено $\mathcal{U}_r$, из того, что $B \cap A = U \cap B_1 \cap A \neq \emptyset$ следует, что $B \cap A$ содержит некоторое $B' \in \mathcal{B}_1$. Аналогично, $B \setminus A$ содержит $B'' \in \mathcal{B}_1$. Следовательно, поскольку $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$ пересекает $\mathcal{B}_1$, то

- $\langle A_1, \dots, A_k, A \rangle$ пересекает $\mathcal{B}$.

Итак, в этом случае теорема доказана.

Теперь в силу (4) можно считать, что $N_{[]}(\mathcal{A}_r|_{X \setminus B_1}, \varepsilon/2)$ достаточно велико для $r < s_1$. Мы также можем считать, что s_1 достаточно велико, поскольку предположение индукции можно применить не ко всей последовательности $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$, а к ее “хвосту” $\mathcal{A}_M, \dots, \mathcal{A}_N$. Применим теперь предположение индукции к множеству $X \setminus B_1$, разбиениям $\mathcal{U}_r|_{X \setminus B_1}$, семействам $\mathcal{A}_r|_{X \setminus B_1}$, числам k и $\varepsilon/2$. Получим набор $\mathcal{B}_2$ и множество B_2 меры $\mu(B_2) \geq c(k, \varepsilon/2)$ со свойствами, аналогичными свойствам $\mathcal{B}_1, B_1$. Отметим, что $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Пусть B_2 подчинено разбиению с номером $s_2 < s_1$. Имеем неравенство

$$N_{[]}(\mathcal{A}_r, \varepsilon) \leq N_{[]}(\mathcal{A}_r|_{X \setminus (B_1 \cup B_2)}, \frac{\varepsilon}{2}) \cdot N_{[]}(\mathcal{A}_r|_{B_1}, \frac{\varepsilon}{4}) \cdot N_{[]}(\mathcal{A}_r|_{B_2}, \frac{\varepsilon}{4}).$$

Если для какого-то $r < s_2$ второй или третий сомножители велики, то теорема доказана (аналогично предыдущему). В противном случае мы можем повторить рассуждения, построив B_3 , B_4 и т.д. Ясно, что на каком-то шаге мы остановимся, ибо на каждом шаге мы можем обеспечить $\mu(B_j) \geq c(k, \varepsilon/2)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Н. Вапник, А. Я. Червоненкис, “О равномерной сходимости частот появления событий к их вероятностям”, *ДАН СССР*, **181**:4 (1968), 781–783.
- [2] D. Haussler, “Decision theoretic generalizations of the PAC model for neural net and other learning applications”, *Inform. and Comput.*, **100**:1 (1992), 78–150.
- [3] J. R. Blum, “On the convergence of empiric distribution functions”, *Ann. Math. Statist.*, **26**:3 (1955), 527–529.
- [4] J. Dehardt, “Generalizations of the Glivenko–Cantelli theorem”, *Ann. Math. Statist.*, **42**:6 (1971), 2050–2055.
- [5] Ю. В. Малыхин, “Усредненный модуль непрерывности и скобочная компактность”, *Матем. заметки*, **87**:3 (2010), 468–471.
- [6] D. Haussler, “Sphere packing numbers for subsets of the Boolean n -cube with bounded Vapnik–Chervonenkis dimension”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **69**:2 (1995), 217–232.
- [7] T. M. Adams, A. B. Nobel, *Uniform Approximation and Bracketing Properties of VC Classes*, arXiv: [math.PR/1007.4037](https://arxiv.org/abs/math.PR/1007.4037).

Ю. В. Малыхин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: jura05@narod.ru

Поступило

18.11.2010