Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Мирзоев, М. Ю. Салимов, О разрешимости краевой задачи для уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве с операторным коэффициентом в краевом условии, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 6, 861–869

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9389>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 16:43:45

О разрешимости краевой задачи для уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве с операторным коэффициентом в краевом условии

С. С. Мирзоев, М. Ю. Салимов

В данной работе рассматривается краевая задача на конечном интервале для одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка с линейным оператором в одном из краевых условий. Здесь получены достаточные условия регулярной разрешимости исследуемой краевой задачи, которые выражены лишь на языке ее операторных коэффициентов.

Библиография: 12 названий.

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, а A – самосопряженный равномерно положительный оператор в H . Обозначим через H_γ шкалу гильбертовых пространств, порожденную оператором A . Напомним, что $H_\gamma = D(A^\gamma)$, а скалярное произведение в H_γ задается равенством $(x, y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y)$ для элементов $x, y \in H_\gamma$, $\gamma \geq 0$. При $\gamma = 0$ считаем, что $H_0 = H$.

Обозначим через $L_2((0, 1); H)$ гильбертово пространство функций $f(t)$, определенных почти всюду на интервале $(0, 1)$, со значениями в H , измеримых, квадратично интегрируемых в смысле Бохнера, с нормой

$$\|f\|_{L_2((0,1);H)} = \left(\int_0^1 \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2}.$$

В дальнейшем $L(X, Y)$ означает пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y . Следуя монографии [1], определим пространство функций

$$W_2^2((0, 1); H) = \{u \mid u'' \in L_2((0, 1); H), A^2 u \in L_2((0, 1); H)\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^2((0,1);H)} = (\|u''\|_{L_2((0,1);H)}^2 + \|A^2 u\|_{L_2((0,1);H)}^2)^{1/2}.$$

Здесь и далее производные понимаются в смысле теории распределений [1]. Определим также следующее подпространство в $W_2^2((0, 1); H)$:

$$W_{2,T}^2((0, 1); H) = \{u \mid u \in W_2^2((0, 1); H), u(0) = Tu'(0), u(1) = 0\},$$

где $T \in L(H_{1/2}, H_{3/2})$.

Из теоремы о следах [1; гл. 1] следует корректность этого определения. Аналогично определяются пространства $L_2(\mathbb{R}; H)$ и $W_2^2(\mathbb{R}; H)$, где $\mathbb{R}$ – вещественная прямая.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) = -\frac{d^2u(t)}{dt^2} + A^2u(t) + A_0\frac{d^2u(t)}{dt^2} + A_1\frac{du}{dt} + A_2u(t) = f(t), \quad t \in (0, 1), \quad (1)$$

$$u(0) = Tu'(0), \quad u(1) = 0, \quad (2)$$

где $f(t)$ и $u(t)$ – функции со значениями в H , а операторные коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

- 1) A – равномерно положительный самосопряженный оператор;
- 2) операторы A_j линейны, причем $B_j = A_j A^{-j}$ ограничены в H , $j = 0, \dots, 2$;
- 3) $T \in L(H_{1/2}, H_{3/2})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если при любом $f(t) \in L_2((0, 1); H)$ существует функция $u(t) \in W_2^2((0, 1); H)$, которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в $(0, 1)$, удовлетворяет граничным условиям (2) в смысле сходимости

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \|u(t) - Tu'(t)\|_{3/2} &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow 1-0} \|u(t)\|_{3/2} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

и имеет место оценка

$$\|u\|_{W_2^2((0,1);H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2((0,1);H)},$$

то задача (1), (2) называется *регулярно разрешимой*, а $u(t)$ – *регулярным решением* задачи (1), (2).

В данной работе мы укажем достаточные условия на коэффициенты уравнения (1) и краевого условия, которые обеспечивают регулярную разрешимость задачи (1), (2). Отметим, что при $T = 0$ и $A_j = 0$, $j = 0, 1, 2$, эта задача исследована многими авторами (см., например, [2]–[6]). Фредгольмовость задачи (1), (2) исследована, например, в работе [7] при $A_0 = 0$, а на полуоси (регулярная разрешимость и ϕ -разрешимость) исследована в работе [8] при $A_0 = A_2 = 0$. На полуоси при $T = 0$ эта задача, в частности, исследована в работах [9]–[11]. В работе [12] вопросы ϕ -разрешимости в более широком аспекте для подобных задач изучены как на конечном, так и в бесконечном интервалах.

Обозначим через

$$\begin{aligned} P_0 u &\equiv P_0\left(\frac{d}{dt}\right)u = -\frac{d^2u}{dt^2} + A^2u, & u &\in W_{2,T}^2((0, 1); H), \\ P_1 u &\equiv P_1\left(\frac{d}{dt}\right)u = \sum_{j=0}^2 A_{2-j}u^{(j)}, & u &\in W_{2,T}^2((0, 1); H). \end{aligned}$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условия 1) и 3), причем $\text{Re } AT \geq 0$ в пространстве $H_{1/2}$. Тогда P_0 изоморфно отображает $W_{2,T}^2((0, 1); H)$ на $L_2((0, 1); H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что $\text{Ker } P_0 = \{0\}$. Действительно, общее решение уравнения $P_0(d/dt)u = 0$ в пространстве $W_2^2((0, 1); H)$ имеет вид

$$u_0(t) = e^{-tA}x_1 + e^{(t-1)A}x_2, \quad t \in (0, 1),$$

где $x_1, x_2 \in H_{3/2}$, а e^{-At} – полугруппа линейных операторов, порожденных оператором $-A$. Из условия $u_0(t) \in W_{2,T}^2((0, 1); H)$ вытекает, что

$$x_1 + e^{-A}x_2 = T(-Ax_1 + Ae^{-A}x_2), \quad e^{-A}x_1 + x_2 = 0.$$

Таким образом,

$$(E - e^{-2A})x_1 + TA(E + e^{-2A})x_1 = 0$$

или

$$(E - e^{-2A})y + AT(E + e^{-2A})y = 0,$$

где $y = Ax_1 \in H_{1/2}$. Отсюда получаем $Qz = 0$, где

$$Q = (E - e^{-2A})(E + e^{-2A})^{-1} + AT \in L(H_{1/2}, H_{1/2}), \quad (4)$$

а $z = (E + e^{-2A})y \in H_{1/2}$. Из спектрального разложения для оператора A следует, что $(E - e^{-2A})(E + e^{-2A})^{-1}$ – самосопряженный равномерно положительный оператор в шкале гильбертовых пространств H_γ , в частности, в пространстве $H_{1/2}$. Тогда из условия теоремы ($\text{Re } AT \geq 0$) вытекает, что $\text{Re } Q > c_0E$, $c_0 > 0$, в пространстве $H_{1/2}$. Следовательно,

$$\|Qx\|_{1/2}\|x\|_{1/2} \geq |(Qx, x)_{1/2}| \geq c_0\|x\|_{1/2}^2 \quad \text{для всех } x \in H_{1/2}.$$

Аналогично,

$$\|Q^*x\|_{1/2} \geq c_0\|x\|_{1/2} \quad \text{для всех } x \in H_{1/2}.$$

Отсюда вытекает, что $\text{Ker } Q = \text{Ker } Q^* = \{0\}$, а область значений этих операторов совпадает со всем $H_{1/2}$, т.е. оператор Q обратим в $H_{1/2}$. Следовательно, $z = 0$. Так как оператор $E + e^{-2A}$ обратим в $H_{1/2}$, то $y = 0$ и, следовательно, $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. Таким образом, $u_0(t) = 0$.

Покажем, что образ оператора P_0 совпадает с пространством $L_2((0, 1); H)$, т.е. существует функция $u(t) \in W_{2,T}^2((0, 1); H)$ такая, что $P_0u = f$.

Действительно, при любом $f(t) \in L_2((0, 1); H)$ функция

$$u_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A^2(\xi^2 E + A^2)^{-1} \hat{f}_1(\xi) e^{i\xi t} d\xi$$

удовлетворяет уравнению $P_0(d/dt)u_1(t) = f_1(t)$ при $t \in \mathbb{R}$ почти всюду, где $f_1(t)$ – продолжение нулем функции $f(t)$ на $(-\infty; 0)$ и $(1; +\infty)$, а $\hat{f}_1(\xi)$ есть преобразование Фурье вектор-функции $f_1(t)$. Покажем, что $u_1(t) \in W_2^2(\mathbb{R}; H)$. В силу теоремы Планшереля достаточно доказать, что $A^2 \hat{u}_1(\xi) \in L_2(\mathbb{R}; H)$ (действительно, из принадлежности $f_1(t)$ и $A^2 u_1(t)$ пространству $L_2(\mathbb{R}; H)$ следует, что $u_1''(t) \in L_2(\mathbb{R}; H)$).

Так как $\hat{u}_1(\xi) = (\xi^2 E + A^2)^{-1} \hat{f}_1(\xi)$, то

$$\begin{aligned} \|A^2 \hat{u}_1(\xi)\|_{L_2(\mathbb{R}; H)} &= \|A^2(\xi^2 E + A^2)^{-1} \hat{f}_1(\xi)\|_{L_2(\mathbb{R}; H)} \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \|A^2(\xi^2 E + A^2)^{-1}\| \cdot \|f\|_{L_2((0, 1); H)}. \end{aligned}$$

Но при любом $\xi \in \mathbb{R}$ из самосопряженности оператора A следует, что

$$\|A^2(\xi^2 E + A^2)^{-1}\| = \sup_{\mu \in \sigma(A)} |\mu^2(\xi^2 + \mu^2)^{-1}| \leq 1.$$

Таким образом, $A^2 \hat{u}_1(\xi) \in L_2(\mathbb{R}; H)$. Сужение функции $u_1(t)$ на $[0, 1]$ обозначим через $q(t)$. Очевидно, что $q(t) \in W_{2,T}^2((0, 1); H)$. Поэтому $q(0), q(1) \in H_{3/2}$ и $q'(0), q'(1) \in H_{1/2}$. Искомую функцию $u(t)$ будем искать в виде

$$u(t) = q(t) + e^{-tA}x_1 + e^{(t-1)A}x_2, \quad t \in (0, 1),$$

где x_1 и $x_2 \in H_{3/2}$ — неизвестные векторы. Из условия $u(t) \in W_{2,T}^2((0, 1); H)$ следует, что

$$\begin{aligned} q(0) + x_1 + e^{-A}x_2 &= Tq'(0) - TA(x_1 - e^{-A}x_2), \\ q(1) + e^{-A}x_1 + x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(E - e^{-2A})x_1 + TA(E + e^{-2A})x_1 = Tq'(0) - q(0) - TAe^{-A}q(1) + e^{-A}q(1) \equiv \psi,$$

где $\psi \in H_{3/2}$ — известный вектор.

Проводя те же рассуждения, что и выше, получаем

$$Qz = A\psi, \quad z = (E + e^{-2A})Ax_1.$$

Поскольку оператор Q обратим в $H_{1/2}$, то $z = Q^{-1}A\psi \in H_{1/2}$. Отсюда же находим, что

$$x_1 = A^{-1}(E + e^{-2A})^{-1}Q^{-1}A\psi \in H_{3/2}.$$

Зная вектор x_1 , найдем также вектор

$$x_2 = -q(1) - e^{-A}x_1 \in H_{3/2}.$$

Таким образом, $P_0 u = f$. С другой стороны,

$$\|P_0 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 \leq 2\|u\|_{W_{2,T}^2((0,1);H)}^2,$$

т.е. оператор $P_0: W_{2,T}^2((0, 1); H) \rightarrow L_2((0, 1); H)$ ограничен. Теперь утверждение теоремы следует из теоремы Банаха об обратном операторе. Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что нормы $\|P_0 u\|_{L_2((0,1);H)}$ и $\|u\|_{W_{2,T}^2((0,1);H)}$ эквивалентны в пространстве $W_{2,T}^2((0, 1); H)$. Далее нам понадобятся оценки, в которых эти нормы участвуют.

ЛЕММА 1. В условиях теоремы 1 при любом $u \in W_{2,T}^2((0, 1); H)$ имеет место неравенство

$$\|P_0 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 \geq \|u\|_{W_{2,T}^2((0,1);H)}^2 + 2\|Au'\|_{L_2((0,1);H)}^2. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $u \in W_{2,T}^2((0,1);H)$ имеем

$$\begin{aligned}\|P_0 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 &= \left\| -\frac{d^2 u}{dt^2} + A^2 u \right\|_{L_2((0,1);H)}^2 \\ &= \|u''\|_{L_2((0,1);H)}^2 + \|A^2 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 - 2 \operatorname{Re}(u'', A^2 u)_{L_2((0,1);H)}.\end{aligned}\quad (6)$$

С другой стороны, с помощью интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned}-(u'', A^2 u)_{L_2((0,1);H)} &= -(A^{1/2} u'(t), A^{3/2} u(t))_0^1 + \|Au'\|_{L_2((0,1);H)}^2 \\ &= (A^{1/2} u'(0), A^{3/2} u(0)) + \|Au'\|_{L_2((0,1);H)}^2 \\ &= (u'(0), ATu'(0))_{1/2} + \|Au'\|_{L_2((0,1);H)}^2.\end{aligned}$$

Так как по условию $\operatorname{Re}(AT) \geq 0$ в пространстве $H_{1/2}$, то из равенства (6) получаем оценку (5). Лемма доказана.

ЛЕММА 2. В условиях теоремы 1 при любом $u \in W_{2,T}^2((0,1);H)$ имеют место неравенства

$$\|A^2 u\|_{L_2((0,1);H)} \leq \|P_0 u\|_{L_2((0,1);H)}, \quad (7)$$

$$\|Au'\|_{L_2((0,1);H)} \leq \frac{1}{2} \|P_0 u\|_{L_2((0,1);H)}, \quad (8)$$

$$\|u''\|_{L_2((0,1);H)} \leq \|P_0 u\|_{L_2((0,1);H)}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенства (7) и (9) следуют из леммы 1. Докажем неравенство (8). Очевидно, что

$$\begin{aligned}\|Au'\|_{L_2((0,1);H)}^2 &= \int_0^1 (Au', Au') dt = -(A^{3/2} u(0), A^{1/2} u'(0)) + \int_0^1 (A^2 u, u'') dt \\ &= -(ATu'(0), u'(0))_{1/2} - (A^2 u, u'')_{L_2((0,1);H)}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|Au'\|_{L_2((0,1);H)}^2 &= -\operatorname{Re}(ATu'(0), u'(0))_{1/2} - \operatorname{Re}(A^2 u, u'')_{L_2((0,1);H)} \\ &\leq -\operatorname{Re}(ATu'(0), u'(0))_{1/2} + \|A^2 u\|_{L_2((0,1);H)} \cdot \|u''\|_{L_2((0,1);H)} \\ &\leq -\operatorname{Re}(ATu'(0), u'(0))_{1/2} + \frac{1}{2} (\|A^2 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 + \|u''\|_{L_2((0,1);H)}^2) \\ &\leq \frac{1}{2} \|u\|_{W_2^2((0,1);H)}^2.\end{aligned}$$

При переходе к последнему неравенству мы учли условие $\operatorname{Re}(AT) \geq 0$ в пространстве $H_{1/2}$. Из этого неравенства и неравенства (5) получаем

$$\|Au'\|_{L_2((0,1);H)}^2 \leq \frac{1}{2} (\|P_0 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 - 2\|Au'\|_{L_2((0,1);H)}^2).$$

Поэтому

$$\|Au'\|_{L_2((0,1);H)}^2 \leq \frac{1}{4} \|P_0 u\|_{L_2((0,1);H)}^2,$$

что влечет неравенство (8). Лемма доказана.

Теперь докажем основную теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются условия 1)–3), причем имеет место неравенство

$$k = \sum_{j=0}^2 c_j \|B_{2-j}\| < 1, \quad B_j = A_j A^{-j}, \quad j = 0, 1, 2,$$

где $c_0 = c_2 = 1$, $c_1 = 1/2$. Тогда задача (1), (2) регулярно разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем задачу (1), (2) в виде $Pu = P_0u + P_1u = f$, где $u \in W_{2,T}^2((0, 1); H)$, $f \in L_2((0, 1); H)$. Легко видеть, что оператор $P_1: W_{2,T}^2((0, 1); H) \rightarrow L_2((0, 1); H)$ ограничен. После замены $P_0u = \omega$ получаем уравнение

$$\omega + P_1 P_0^{-1} \omega = f$$

в пространстве $L_2((0, 1); H)$. Так как P_0^{-1} реализует изоморфизм пространства $L_2((0, 1); H)$ на пространство $W_{2,T}^2((0, 1); H)$, то полученное уравнение эквивалентно исходному уравнению $Pu = f$. Далее, при $\omega = P_0u \in L_2((0, 1); H)$ имеем

$$\begin{aligned} \|P_1 P_0^{-1} \omega\|_{L_2((0,1);H)} &= \|P_1 u\|_{L_2((0,1);H)} = \left\| \sum_{j=0}^2 A_{2-j} u^{(j)} \right\|_{L_2((0,1);H)} \\ &\leq \sum_{j=0}^2 \|A_{2-j} u^{(j)}\|_{L_2((0,1);H)} \leq \sum_{j=0}^2 \|B_{2-j}\| \|A^{2-j} u^{(j)}\|_{L_2((0,1);H)}. \end{aligned}$$

С учетом леммы 2 получаем

$$\begin{aligned} \|P_1 P_0^{-1} \omega\|_{L_2((0,1);H)} &\leq \sum_{j=0}^2 \|B_{2-j}\| \cdot c_j \|P_0 u\|_{L_2((0,1);H)} \\ &= \left(\sum_{j=0}^2 c_j \|B_{2-j}\| \right) \|P_0 u\|_{L_2((0,1);H)} \\ &= \sum_{j=0}^2 c_j \|B_{2-j}\| \cdot \|\omega\|_{L_2((0,1);H)} = k \cdot \|\omega\|_{L_2((0,1);H)}. \end{aligned}$$

Следовательно, оператор $P_1 P_0^{-1}$ ограничен в пространстве $L_2((0, 1); H)$, причем его норма $\leq k < 1$. Поэтому оператор $E + P_1 P_0^{-1}$ обратим в пространстве $L_2((0, 1); H)$. Но тогда уравнение $Pu = P_0u + P_1u = f$ однозначно разрешимо в пространстве $W_{2,T}^2((0, 1); H)$. При этом $u = P_0^{-1}(E + P_1 P_0^{-1})^{-1}f$, откуда следует, что

$$\|u\|_{W_{2,T}^2((0,1);H)} \leq \text{const} \cdot \|f\|_{L_2((0,1);H)}.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы можно получить условие регулярной разрешимости следующей задачи:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) = f(t), \quad (10)$$

$$u(0) - Tu'(0) = \varphi_0, \quad u(1) = \varphi_1, \quad (11)$$

где $f(t) \in L_2((0, 1); H)$, $\varphi_0, \varphi_1 \in H_{3/2}$.

Отметим, что регулярная разрешимость задачи (10), (11) определяется точно также, как в определении 1, с той разницей, что соотношение (3) заменяется соотношением

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|u(t) - Tu'(t) - \varphi_0\|_{3/2} = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} \|u(t) - \varphi_1\|_{3/2} = 0.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда задача (10), (11) регулярно разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что при $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$ регулярная разрешимость задачи (10), (11) следует из теоремы 2.

При $f(t) = 0$ и $A_0 = A_1 = A_2 = 0$ мы получаем следующую задачу:

$$P_0 u \equiv -\frac{d^2 u}{dt^2} + A^2 u = 0, \quad (12)$$

$$u(0) - Tu'(0) = \varphi_0, \quad u(1) = \varphi_1, \quad (13)$$

где $\varphi_0, \varphi_1 \in H_{3/2}$. Решение задачи (12), (13) будем искать в виде

$$u_0(t) = e^{-tA} x_0 + e^{(t-1)A} x_1, \quad (14)$$

где x_0, x_1 — неизвестные векторы. Из условия (13) следует, что

$$x_0 + e^{-A} x_1 + T A x_0 - T A e^{-A} x_1 = \varphi_0, \quad e^{-A} x_0 + x_1 = \varphi_1.$$

Из этих равенств получаем

$$Q(E + e^{-2A}) A x_0 = \chi, \quad \chi = A(\varphi_0 - e^{-A} \varphi_1 - T A e^{-A} \varphi_1) \in H_{1/2},$$

где оператор Q определен равенством (4). Таким образом,

$$x_0 = A^{-1}(E + e^{-2A})^{-1} Q^{-1} \chi,$$

$$x_1 = \varphi_1 - e^{-A} A^{-1}(E + e^{-2A})^{-1} Q^{-1} \chi.$$

Очевидно, что $x_0, x_1 \in H_{3/2}$, а тогда из представления (14) (см. [1; гл. 1]) получаем

$$\|u_0\|_{W_2^2((0,1);H)} \leq \text{const} \cdot (\|x_0\|_{3/2} + \|x_1\|_{3/2}) \leq \text{const} \cdot (\|\varphi_1\|_{3/2} + \|\varphi_2\|_{3/2}). \quad (15)$$

Теперь мы можем исследовать задачу (10), (11). Будем искать ее решение в виде $u(t) = v(t) + u_0(t)$, где $u_0(t)$ есть регулярное решение задачи (12), (13). Тогда функция $v(t)$ является решением задачи

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)v(t) = g(t), \quad v(0) = v(1) = 0, \quad (16)$$

где $g(t) \equiv P_1(d/dt)u_0(t) + f(t)$. Оценим норму функции $g(t)$ в $L_2((0,1);H)$. Имеем

$$\|g(t)\|_{L_2((0,1);H)} \leq \left\| P_1\left(\frac{d}{dt}\right)u_0(t) \right\|_{L_2((0,1);H)} + \|f\|_{L_2((0,1);H)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|B_0\| \left\| \frac{d^2 u_0}{dt^2} \right\|_{L_2((0,1);H)} + \|B_1\| \left\| A \frac{du_0}{dt} \right\|_{L_2((0,1);H)} \\
&\quad + \|B_2\| \|A^2 u_0\|_{L_2((0,1);H)} + \|f\|_{L_2((0,1);H)} \\
&\leq \text{const} \cdot (\|\varphi_0\|_{3/2} + \|\varphi_1\|_{3/2} + \|f(t)\|_{L_2((0,1);H)}).
\end{aligned}$$

Но тогда из теоремы 2 и оценки (15) получаем

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{W_2^2((0,1);H)} &\leq \text{const} \cdot (\|v(t)\|_{W_2^2((0,1);H)} + \|u_0(t)\|_{W_2^2((0,1);H)}) \\
&\leq \text{const} \cdot (\|g(t)\|_{L_2((0,1);H)} + \|u_0(t)\|_{W_2^2((0,1);H)}) \\
&\leq \text{const} \cdot (\|f(t)\|_{L_2((0,1);H)} + \|\varphi_0\|_{3/2} + \|\varphi_1\|_{3/2}).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполняются условия 1), 2) и имеет место неравенство

$$\|A_0\| + \frac{1}{2} \|A_1 A^{-1}\| + \|A_2 A^{-2}\| < 1.$$

Тогда задача

$$-\frac{d^2 u}{dt^2} + A^2 u + \sum_{j=0}^2 A_{2-j} u^{(j)} = f(t), \quad u(0) = \varphi_0 \in H_{3/2}, \quad u(1) = \varphi_1 \in H_{3/2},$$

регулярно разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 3 при $T = 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971.
- [2] В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, Наукова думка, Киев, 1984.
- [3] М.Л. Горбачук, А.Н. Кочубей, “Самосопряженные граничные задачи для некоторых классов дифференциальных операторов”, *ДАН СССР*, **201**:5 (1971), 1029–1032.
- [4] С.Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967.
- [5] С.Г. Крейн, Г.И. Лаптев, “Граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве. I”, *Дифференц. уравнения*, **2**:3 (1966), 382–390.
- [6] С.Г. Крейн, Г.И. Лаптев, “Корректность граничных задач для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве. II”, *Дифференц. уравнения*, **2**:7 (1966), 919–926.
- [7] С.Я. Якубов, Б.А. Алиев, “Фредгольмовость краевой задачи с оператором в краевых условиях для эллиптического дифференциально-операторного уравнения”, *ДАН СССР*, **257**:5 (1981), 1071–1074.
- [8] М.Г. Гасымов, С.С. Мирзоев, “О разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка”, *Дифференц. уравнения*, **28**:4 (1992), 651–661.

- [9] М. Г. Гасымов, “К теории полиномиальных операторных пучков”, *ДАН СССР*, **199**:4 (1971), 747–750.
- [10] С. С. Мирзоев, “Условия корректной разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений”, *ДАН СССР*, **273**:2 (1983), 292–295.
- [11] С. С. Мирзоев, “О кратной полноте корневых векторов полиномиальных операторных пучков, отвечающих краевым задачам на полуоси”, *Функц. анализ и его прил.*, **17**:2 (1983), 84–85.
- [12] А. А. Шкаликов, “Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи связанные с ними”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **14**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1989, 140–224.

С. С. Мирзоев

Бакинский государственный университет,
Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку
E-mail: mirzoyevsabir@mail.ru

Поступило

27.12.2010

М. Ю. Салимов

Бакинский государственный университет
E-mail: matlab.salimov@yahoo.com