Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Д. Кан, Представление чисел линейными формами, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 2, 210–216

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm939>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 16:21:38

УДК 511.2

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ ЛИНЕЙНЫМИ ФОРМАМИ

И. Д. Кан

В статье доказаны новые теоремы по проблеме Фробениуса, относящейся к аддитивной теории чисел, с помощью цепных дробей.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Говорят, что целое число N *представимо* через натуральные числа $a_0, a_1, \dots, a_m$, если существуют целые неотрицательные числа $x_0, x_1, \dots, x_m$ такие, что $N = a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_mx_m$. Множество чисел N , представимых через $a_0, a_1, \dots, a_m$, обозначим через $\langle a_0, a_1, \dots, a_m \rangle$.

Проблема Фробениуса состоит в нахождении наибольшего целого числа $g(a_0, a_1, \dots, a_m)$, не представимого через взаимно простые (в совокупности) числа $a_0, a_1, \dots, a_m$. Функция $g(a_0, a_1, \dots, a_m)$ называется *функцией Фробениуса*. Таким образом,

$$g(a_0, a_1, \dots, a_m) = \max(\mathbb{Z} \setminus \langle a_0, a_1, \dots, a_m \rangle).$$

При $m = 1$ известен классический результат Сильвестра [1]:

$$g(a_0, a_1) = a_0a_1 - a_0 - a_1. \quad (1)$$

При $m = 2$ проблему Фробениуса решил в 1960 г. Джонсон [2], однако его решение представляет собой не формулу, а лишь некоторый “быстрый”, точнее, *полиномиальный, алгоритм* (определение есть в [3]). Другой алгоритм для $g(a_0, a_1, a_2)$ предложили в 1962 г. Брауэр и Шошли [4], получив также формулу для частного случая $a_0 + a_2 \equiv 0 \pmod{a_1}$, где $a_1 = \min\{a_0, a_1, a_2\}$:

$$g(a_0, a_1, a_2) = \max \left\{ a_2 \left[\frac{a_1 a_0}{a_0 + a_2} \right], a_0 \left[\frac{a_1 a_2}{a_0 + a_2} \right] \right\} - a_1, \quad (2)$$

где $[x]$ – целая часть числа $x \in \mathbb{R}$ (здесь и в дальнейшем). Ни для какого значения $m \geq 3$ полиномиального алгоритма решения проблемы Фробениуса не найдено.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00492.

Тем не менее, существует ряд результатов по проблеме Фробениуса при определенных соотношениях на аргументы. Так, Роберц [5] в 1956 г. нашел формулу для функции Фробениуса от арифметической прогрессии

$$g(a, a + d, \dots, a + md) = a \left[\frac{a - 2}{m} \right] + d(a - 1), \quad (3)$$

обобщив результат Брауэра [6] для $d = 1$. Результат Роберца, в свою очередь, был обобщен, во-первых, Сиерингом [7], вычислившим функцию Фробениуса от объединения нескольких арифметических прогрессий с одинаковой разностью, и, во-вторых, Рёдсетом [8], решившим проблему Фробениуса для совокупности аргументов, получаемой добавлением к арифметической прогрессии одного произвольного элемента.

Обрывая алгоритм Рёдсета на одном или нескольких первых шагах, можно получать точные формулы для функции Фробениуса, скажем, трех аргументов [9], на тем более широкой области их значений, чем большее число шагов алгоритма взято. Другой путь построения точных формул, иначе связанный с алгоритмом Рёдсета, состоит в следующем.

Решение Рёдсета опирается на некоторые последовательности натуральных чисел, обладающие следующим свойством: каждый их член, за исключением первого и последнего, является делителем суммы своих соседей (например, арифметическая прогрессия). Все такие последовательности будем называть *цепными*. В [10], [11] было предложено перенести цепные последовательности из средств вычисления функции Фробениуса в множество ее аргументов с целью получения новых результатов по проблеме. Настоящая работа содержит дальнейшее развитие этого подхода.

2. Обозначения и терминология. Всюду в дальнейшем

$$a_n, a_{-n+1}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_m$$

– цепная последовательность ($m \geq 1, n \geq 1, \text{НОД}(a_0, a_1) = 1$). Это означает, что все числа l_j , где

$$l_j = \frac{a_{j-1} + a_{j+1}}{a_j} \quad (j = -n + 1, -n + 2, \dots, 0, 1, \dots, m - 1)$$

– натуральные. Числа $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ определены равенствами

$$\varepsilon = \frac{1}{l_1 - \frac{1}{l_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{l_{m-1}}}}}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{l_{-1} - \frac{1}{l_{-2} - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{l_{-n+1}}}}}, \quad \varepsilon_2 = l_0 - \varepsilon_1.$$

(При этом для $m = 1, n = 1$ считаем, что соответственно $\varepsilon = 0, \varepsilon_1 = 0$.)

3. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Если $a_0 = \min\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$, то справедливо равенство

$$g(a_0, a_1, \dots, a_m) = a_0 a_1 - a_0 - a_1 - a_0 [\varepsilon(a_0 - 1)]. \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 2. Если $a_0 = \min\{a_{-n}, a_{-n+1}, \dots, a_0, a_1, \dots, a_m\}$, то справедливо равенство

$$\begin{aligned} g(a_{-n}, a_{-n+1}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_m) \\ = -a_0 + \max \left\{ a_1 \left[\frac{a_0 \varepsilon_2 - a_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon} \right] - a_0 \left[\varepsilon \left[\frac{a_0 \varepsilon_2 - a_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon} \right] \right], \right. \\ \left. - a_1 \left[\frac{a_1 - \varepsilon a_0}{\varepsilon_2 - \varepsilon} \right] - a_0 \left[-\varepsilon_2 \left[\frac{a_1 - \varepsilon a_0}{\varepsilon_2 - \varepsilon} \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Частными случаями равенств (4) и (5) теорем 1, 2 являются формулы (1)–(3).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Не ограничивая общности, можно (и будем в дальнейшем) считать, что $l_j \geq 2$ для всех j .

4. Леммы. На множестве пар целых чисел введем линейную форму $\varphi(y, z)$ по правилу $\varphi(y, z) = (a_1 - a_0)y + a_0z$.

Напомним, что числа a_0 и a_1 по условию взаимно просты.

ЛЕММА 1. Для любого $x \in \mathbb{Z}$ существует, причем единственная, пара целых чисел $(e(x), f(x))$ таких, что выполнены одновременно равенство $x = \varphi(e(x), f(x))$ и неравенство $0 \leq e(x) \leq a_0 - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы оставляем читателю. Оно может рассматриваться как устное упражнение на полную систему вычетов и в той или иной форме содержится почти во всех учебниках по основам теории чисел.

Таким образом, функции $e(x)$ и $f(x)$ корректно определены.

На множестве пар целых чисел введем линейную форму $\theta(y, z)$ по правилу $\theta(y, z) = (1 - \varepsilon)y - z$.

ЛЕММА 2. Имеет место неравенство $\theta(a_0, a_0 - a_1) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $j = 0, 1, \dots, m$ через f_j/e_j обозначим j -ю подходящую дробь к цепной дроби $1 - \varepsilon$. Другими словами,

$$\begin{aligned} e_0 = 0, \quad e_1 = 1, \quad e_{j+1} = l_j e_j - e_{j-1}, \\ f_0 = 1, \quad f_1 = 1, \quad f_{j+1} = l_j f_j - f_{j-1}. \end{aligned}$$

Равенство

$$a_j = \varphi(e_j, f_j) = (a_1 - a_0)e_j + a_0 f_j \quad (j = 0, 1, \dots, m) \quad (6)$$

проверяется непосредственной индукцией. В частности,

$$0 < a_m = (a_1 - a_0)e_m + a_0 f_m. \quad (7)$$

Поскольку $1 - \varepsilon = f_m/e_m$, то из (7) следует, что $\theta(a_0, a_0 - a_1) = (1 - \varepsilon)a_0 + a_1 - a_0 = a_m/e_m > 0$. Лемма доказана.

Определим функцию $\theta(x)$ целого аргумента x по правилу $\theta(x) = \theta(e(x), f(x))$.

ЛЕММА 3. Если $\varphi(y, z) = x$ и $y \geq 0$, то $\theta(x) \leq \theta(y, z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в условиях леммы для некоторого целого y_1 выполнены неравенства $0 \leq y_1 \leq a_0$ и $y_1 \neq y$. Пусть, кроме того, выполнено равенство $\varphi(y_1, z_1) = x = \varphi(y, z)$. Тогда из леммы 1 следует, что $y \geq a_0 > y_1$. Поскольку $\varphi(y - y_1, z - z_1) = 0$, то, полагая $y_1 = e(x)$ и $z_1 = f(x)$, имеем:

$$\theta(x) = \theta(y_1, z_1) = \theta(y, z) - \frac{y - y_1}{a_0} \theta(a_0, a_0 - 1) < \theta(y, z),$$

так как последнее неравенство в этой цепочке справедливо по лемме 2. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Если x представимо через $a_0, a_1, \dots, a_m$, то $\theta(x) \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для целых неотрицательных $k_0, k_1, \dots, k_m$ выполнено равенство $x = k_0 a_0 + k_1 a_1 + \dots + k_m a_m$. Тогда ввиду равенства (6)

$$x = \varphi(k_0 e_0 + k_1 e_1 + \dots + k_m e_m, k_0 f_0 + k_1 f_1 + \dots + k_m f_m).$$

Поэтому в силу леммы 3

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \theta(k_0 e_0 + k_1 e_1 + \dots + k_m e_m, k_0 f_0 + k_1 f_1 + \dots + k_m f_m) \\ &= k_0 \theta(e_0, f_0) + \sum_{j=1}^m k_j \theta(e_j, f_j) = -k_0 + \sum_{j=1}^m k_j e_j \left((1 - \varepsilon) - \frac{f_j}{e_j} \right) \leq 0 \end{aligned}$$

по свойству убывания подходящих дробей f_j/e_j к цепной дроби $1 - \varepsilon$ (см. [12]). Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Если $\theta(x) \leq 0$ и x не делится на a_0 , то для некоторого j ($1 \leq j \leq m$) число x представимо через a_{j-1} и a_j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства $\theta(x) \leq 0$ следует, что $1 - \varepsilon \leq f(x)/e(x)$. Пользуясь свойством убывания подходящих дробей к дроби $1 - \varepsilon$, найдем j такое, что

$$1 - \varepsilon \leq \frac{f_j}{e_j} \leq \frac{f(x)}{e(x)} < \frac{f_{j-1}}{e_{j-1}}. \quad (8)$$

Так как $f_{j-1}e_j - f_j e_{j-1} = 1$ (см. [12]), то ввиду леммы 1

$$x = 1 \cdot x = \begin{bmatrix} -f_j & e_j \\ -f_{j-1} & e_{j-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e(x) & -a_0 \\ f(x) & a_1 - a_0 \end{bmatrix}.$$

Применяя к последнему выражению правило умножения определителей ("строка на столбец"), имеем

$$x = \begin{bmatrix} -f_j e(x) + e_j f(x) & a_0 f_j + (a_1 - a_0) e_j \\ -f_{j-1} e(x) + e_{j-1} f(x) & a_0 f_{j-1} + (a_1 - a_0) e_{j-1} \end{bmatrix}.$$

В последнем равенстве правый столбец определителя ввиду равенства (6) состоит из чисел a_j и a_{j-1} . В левом столбце того же определителя ввиду неравенства (8) верхнее число неотрицательно, нижнее – отрицательно. Вычисляя этот определитель, получаем, что x представимо через a_{j-1} и a_j . Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Если $a_1 > a_0$ и для $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнена оценка $0 \leq \alpha < a_0$, то справедливо равенство

$$\max_{\substack{x \notin \{a_0, a_1, \dots, a_m\} \\ e(x) \leq \alpha}} x = a_1[\alpha] - a_0[\varepsilon[\alpha]] - a_0. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $e(x) \leq [\alpha]$, то из леммы 5 и определения $\theta(x)$ следует, что для $x \notin \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ верна оценка $f(x) \leq -[(\varepsilon - 1)e(x)] - 1 \leq -[(\varepsilon - 1)[\alpha]] - 1$, следовательно,

$$x = (a_1 - a_0)e(x) + a_0f(x) \leq [\alpha](a_1 - a_0) - a_0([\varepsilon - 1][\alpha] + 1). \quad (10)$$

(Ясно, что правые части равенства (9) и неравенства (10) совпадают.) Обратно: пусть $x = [\alpha](a_1 - a_0) - a_0([\varepsilon - 1][\alpha] + 1)$, тогда $\theta(x) = (1 - \varepsilon)[\alpha] = [(\varepsilon - 1)[\alpha]] + 1 > 0$, откуда по лемме 4 $x \notin \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$. Лемма доказана.

Аналогично функциям $e(x)$ и $f(x)$, определенным числами a_0 и a_1 , определим функции $e_1(x)$ и $f_1(x)$ числами a_0 и a_{-1} (см. начало п. 4 и лемму 1). Для любого целого x имеем, таким образом:

$$x = (a_{-1} - a_0)e_1(x) + a_0f_1(x), \quad 0 \leq e_1(x) \leq a_0 - 1.$$

ЛЕММА 7. Для любого целого x , не кратного числу a_0 , имеют место равенства

$$e(x) = a_0 - e_1(x), \quad f(x) = f_1(x) + (l_0 - 2)e_1(x) - a_1 + a_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить равенство

$$\varphi(e(x), f(x)) = \varphi(a_0 - e_1(x), f_1(x) + (l_0 - 2)e_1(x) - a_1 + a_0)$$

и воспользоваться доказанной в лемме 1 единственностью функций $e(x)$ и $f(x)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Целое число x , не делящееся на a_0 , представимо через $a_0, a_{-1}, \dots, a_{-n}$ тогда и только тогда, когда

$$a_0\varepsilon_2 - a_1 + e(x)(1 - \varepsilon_2) - f(x) \leq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В полной аналогии с результатами лемм 4 и 5 число x тогда и только тогда представимо через $a_0, a_{-1}, \dots, a_{-n}$, когда $(1 - \varepsilon_1)e_1(x) - f_1(x) \leq 0$. Поэтому для доказательства леммы достаточно подставить в последнее неравенство выражения для $e_1(x)$ и $f_1(x)$, найденные из леммы 7. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Если $a_{-1} > a_0$ и для $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнена оценка $0 \leq \alpha < a_0$, то справедливо равенство

$$\max_{\substack{x \notin \{a_0, a_{-1}, \dots, a_{-n}\} \\ e(x) \geq \alpha}} x = -a_1[a_0 - \alpha] - a_0[-\varepsilon_2[a_0 - \alpha]] - a_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В полной аналогии с результатом леммы 6 максимум из настоящей леммы должен быть равен выражению $[a_0 - \alpha]a_{-1} - a_0[\varepsilon_1[a_0 - \alpha]] - a_0$. Подставляя сюда значения $a_{-1} = l_0 a_0 - a_1$ и $\varepsilon_1 = l_0 - \varepsilon_2$, получаем требуемое. Лемма доказана.

5. Доказательство теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Утверждение теоремы 1 получается подстановкой значения $\alpha = a_0 - 1$ в равенство (9). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Положим

$$\alpha = \frac{a_0 \varepsilon_2 - a_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \quad (11)$$

и покажем, что из условий $x \not\equiv 0 \pmod{a_0}$, $e(x) \geq \alpha$ и $x \in \langle a_0, a_1, \dots, a_m \rangle$ следует, что $x \in \langle a_0, a_{-1}, \dots, a_{-n} \rangle$. Действительно, из леммы 4 следует, что

$$f(x) \geq (1 - \varepsilon)e(x) = (1 - \varepsilon_2)e(x) + (\varepsilon_2 - \varepsilon)e(x) \geq (1 - \varepsilon_2)e(x) + a_0 \varepsilon_2 - a_1,$$

и из леммы 8 следует, что $x \in \langle a_0, a_{-1}, \dots, a_{-n} \rangle$.

Аналогично доказывается, что если $e(x) \leq \alpha$, $x \not\equiv 0 \pmod{a_0}$ и $x \in \langle a_0, a_{-1}, \dots, a_{-n} \rangle$, то $x \in \langle a_0, a_1, \dots, a_m \rangle$.

Заметим еще, что ввиду лемм 4 и 5 число x , представимое через

$$a_{-n}, a_{-n+1}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_m, \quad (12)$$

окажется представимым через некоторые два соседних члена последовательности (12), ввиду чего

$$\langle a_{-n}, a_{-n+1}, \dots, a_m \rangle = \langle a_0, a_1, \dots, a_m \rangle \cup \langle a_0, a_{-1}, \dots, a_{-n} \rangle.$$

Теперь для доказательства теоремы 2 осталось подставить значение α (см. (11)) в леммы 6 и 9 и взять больший из двух вариантов. Теорема доказана.

6. Следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $a_0 < a_1$, $e_m \geq a_0$ (где $f_m/e_m = 1 - \varepsilon$) и $l_1 = \dots = l_m = l \geq 3$. Тогда

$$g(a_0, a_1, \dots, a_m) = a_0 a_1 - a_0 - a_1 - a_0 \left[\frac{1}{2}(a_0 - 1)(l - \sqrt{l^2 - 4}) \right].$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $a, k, l \in \mathbb{N}$, $a \geq 3$, $k \geq 2$, $l \geq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} & g(a, a-1, a-2, ka-2k-1, l(ka-2k-1)-a+2) \\ &= a \left[\frac{(kl-1)(a-1)-1}{2kl+l-2} \right] - \left[\frac{2kl+l-2}{kl-1} \left[\frac{(kl-1)(a-1)-1}{2kl+l-2} \right] \right] - 1. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\varepsilon = a/b$, $\varepsilon_2 = c/d$ — несократимые рациональные представления введенных выше чисел ε и ε_2 . Если выполнены равенства $b+d = a_0$, $a+c = a_1$,

$$a_0 = \min\{a_{-n}, a_{-n+1}, \dots, a_0, a_1, \dots, a_m\},$$

то имеет место равенство

$$g(a_{-n}, a_{-n+1}, \dots, a_0, a_1, \dots, a_m) = a_m - a_0.$$

Продолжение следует.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Sylvester J. J. Mathematical questions, with their solutions // Educational Times. 1884. V. 41. P. 21.
- [2] Johnson S. M. A linear Diophantine problem // Canad. J. Math. 1960. V. 12. P. 300–398.
- [3] Шевченко В. Н. Качественные вопросы целочисленного программирования. М.: Наука (Физматлит), 1995.
- [4] Brauer A., Shockly J. E. On a problem of Frobenius // Angew. Math. 1962. V. 211. P. 215–220.
- [5] Roberts J. B. Note on linear forms // Proc. Amer. Math. Soc. 1956. № 7. P. 465–469.
- [6] Brauer A. On a problem of partitions // Amer. J. Math. 1942. V. 64. P. 299–312.
- [7] Siering E. Über lineare Formen und ein Problem von Frobenius // J. Reine Angew. Math. 1974. V. 271. P. 177–202.
- [8] Rödset Ö. J. On a linear Diophantine problem of Frobenius–II // J. Reine Angew. Math. 1979. V. 307/308. P. 431–440.
- [9] Кан И. Д., Стечкин Б. С., Шарков И. В. К проблеме Фробениуса трех аргументов // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 4. С. 626–629.
- [10] Кан И. Д. Рекуррентные последовательности и их приложения. Дисс. ... д.ф.-м.н. М.: МГУ, 1997.
- [11] Кан И. Д. К проблеме Фробениуса // Фундамент. и прикл. матем. 1997. Т. 3. № 3. С. 821–835.
- [12] Финкельштейн Ю. Ю. Односторонние наилучшие приближения и их геометрическая интерпретация // Экономика и матем. методы (Москва). 1992. Т. 28. № 1. С. 130–136.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

24.07.1999

Исправленный вариант

06.03.2000