Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. К. Пан, К. Л. Жу, $\mathcal{GP}$ -проективные и $\mathcal{GI}$ -инъективные модули, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 6, 870–879

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9390>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 14:06:05

$\mathcal{GP}$ -проективные и $\mathcal{GI}$ -инъективные модули

К. К. Пан, К. Л. Жу

Пусть R – кольцо. В работе определяются и исследуются $\mathcal{GP}$ -проективные и $\mathcal{GI}$ -инъективные левые R -модули. Наша основная цель состоит в исследовании “глобальной” размерности

$$\text{GPID}(R) = \sup\{\text{id}(M) \mid M \in {}_R\mathcal{M}, M - \text{горенштейнов проективный модуль}\}.$$

Библиография: 12 названий.

1. Введение. На всем протяжении этой статьи через R мы будем обозначать ассоциативное кольцо с единицей, $\mathcal{X}$ – это некоторый класс левых R -модулей, ${}_R\mathcal{M}$ обозначает категорию левых R -модулей, $\mathcal{P}$ (соответственно $\mathcal{I}$) обозначает класс проективных (соответственно инъективных) левых R -модулей. Через $\text{pd}(M)$ (соответственно $\text{id}(M)$) обозначается проективная (соответственно инъективная) размерность левого R -модуля M . Далее $\text{l.gldim}(R)$ и $\text{wdim}(R)$ – это левая глобальная и слабая размерности R соответственно.

Сперва напомним некоторые обозначения и факты, которые потребуются в этой работе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Гомоморфизм левых R -модулей $f: M \rightarrow X$ называется $\mathcal{X}$ -предоболочкой, если $X \in \mathcal{X}$ и $\text{Hom}(f, X'): \text{Hom}(X, X') \rightarrow \text{Hom}(M, X')$ – сюръекция для всех $X' \in \mathcal{X}$. $\mathcal{X}$ -Предоболочка является $\mathcal{X}$ -оболочкой, если всякий эндоморфизм $h: X \rightarrow X$, для которого $hf = f$, является изоморфизмом. Двойственным образом можно определить $\mathcal{X}$ -преднакрытия и $\mathcal{X}$ -накрытия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Левый R -модуль M называется горенштейновым проективным, если существует $\text{Hom}_R(\cdot, \mathcal{P})$ -точная последовательность

$$\cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots,$$

где все проективные объекты P_i, P^i таковы, что $M = \ker(P^0 \rightarrow P^1)$. Горенштейновы инъективные левые R -модули определяются по двойственности.

Работа выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (грант № 11071111) и Фонда фундаментальных исследований в центральных университетах (грант № KYZ201125).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Левый R -модуль M называется n -горенштейновым проективным, если существует такая $\text{Hom}_R(\cdot, \mathcal{P})$ -точная последовательность

$$0 \rightarrow M \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

в которой все P_i проективны. n -Горенштейновы инъективные левые R -модули определяются двойственным образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Левая $\mathcal{X}$ -резольвента левого R -модуля M – это точная последовательность

$$\cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

в которой все $X_i \in \mathcal{X}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Горенштейнова проективная размерность $\text{Gpd}(M)$ модуля M определяется так: $\text{Gpd}(M) \leq n$, если и только если у M имеется горенштейнова проективная резольвента длины n . Горенштейнова инъективная размерность $\text{Gid}(M)$ модуля M определяется двойственным образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Для всякого кольца R показано (см. [1; теорема 1.1]), что

$$\sup\{\text{Gpd}(M) \mid M \in {}_R\mathcal{M}\} = \sup\{\text{Gid}(M) \mid M \in {}_R\mathcal{M}\}.$$

Это число называется *левой горенштейновой глобальной размерностью* кольца R и обозначается через $\text{l.Gldim}(R)$.

В этой работе мы будем называть левый R -модуль M $\mathcal{GP}$ -проективным, если $\text{Ext}_R^1(M, X) = 0$ для всякого горенштейнова проективного левого R -модуля X ; левый R -модуль N назовем $\mathcal{GI}$ -инъективным, если $\text{Ext}_R^1(Y, N) = 0$ для всех горенштейновых инъективных левых R -модулей Y . Эти два класса левых R -модулей возникают при изучении горенштейновых проективных (пред)оболочек и горенштейновых инъективных (пред)накрытий.

В п. 2 мы рассматриваем $\mathcal{GP}$ -проективные и $\mathcal{GI}$ -инъективные левые R -модули и даем их описание в терминах горенштейновых проективных предоболочек и горенштейновых инъективных преднакрытий.

Беря супремум какой-либо из размерностей $\text{pd}(M)$, $\text{id}(M)$, $\text{Gpd}(M)$ и $\text{Gid}(M)$, где M пробегает определенный класс левых R -модулей, можно получить различные левые (горенштейновы) “глобальные” размерности. Например [2], [3], так получается левая финитная проективная размерность кольца R :

$$\text{FPD}(R) = \sup\{\text{pd}(M) \mid M \in {}_R\mathcal{M}, \text{ где } \text{pd}(M) < \infty\}$$

и левая финитная горенштейнова проективная размерность кольца R :

$$\text{FGPD}(R) = \sup\{\text{Gpd}(M) \mid M \in {}_R\mathcal{M}, \text{ где } \text{Gpd}(M) < \infty\}.$$

В п. 3 мы вводим еще одно понятие левой “глобальной” размерности $\text{GPID}(R)$, определяемое так:

$$\text{GPID}(R) = \sup\{\text{id}(M) \mid M \in {}_R\mathcal{M}, \text{ где } M \text{ – горенштейнов проективный модуль}\}.$$

Во-первых, мы обсуждаем взаимосвязь между $\text{GPID}(R)$ и различными известными “глобальными” размерностями произвольного кольца R . Во-вторых, мы даем описание $\text{GPID}(R)$ в терминах $\mathcal{GP}$ -проективных левых R -модулей и получаем в качестве следствия, что всякий подмодуль $\mathcal{GP}$ -проективного левого R -модуля является $\mathcal{GP}$ -проективным, если и только если $\text{GPID}(R) \leq 1$. Наконец, кольцо R называется *левым GPI-кольцом*, если $\text{GPID}(R) = 0$. Мы доказываем вложения

$$\{\text{полупростые кольца}\} \subset \{\text{левые GPI-кольца}\} \subset \{\text{квазифробениусовы кольца}\},$$

причем эти вложения являются строгими.

2. $\mathcal{GP}$ -проективные и $\mathcal{GI}$ -инъективные модули.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Левый R -модуль M называется *$\mathcal{GP}$ -проективным*, если

$$\text{Ext}_R^1(M, X) = 0$$

для всякого горенштейнова проективного R -модуля X ; левый R -модуль N называется *$\mathcal{GI}$ -инъективным*, если

$$\text{Ext}_R^1(Y, N) = 0$$

для всякого горенштейнова инъективного R -модуля Y .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Ясно, что класс $\mathcal{GP}$ -проективных левых R -модулей замкнут относительно расширений, прямых сумм и взятия прямых слагаемых и что класс $\mathcal{GI}$ -инъективных левых R -модулей замкнут относительно расширений, прямых произведений и взятия прямых слагаемых.

Все результаты, относящиеся к $\mathcal{GP}$ -проективным левым R -модулям, имеют $\mathcal{GI}$ -инъективные аналоги, так что мы будем только формулировать эти двойственные результаты, оставляя доказательства читателю.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть M – левый R -модуль. Следующие условия эквивалентны:

- (1) M проективен;
- (2) M является $\mathcal{GP}$ -проективным и 1-горенштейновым проективным;
- (3) M является $\mathcal{GP}$ -проективным и n -горенштейновым проективным;
- (4) M является $\mathcal{GP}$ -проективным и горенштейновым проективным;
- (5) M является $\mathcal{GP}$ -проективным и $\text{Gpd}(M) \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) следуют напрямую из [4; предложение 2.5].

(5) $\Rightarrow$ (1) Можно выбрать короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0,$$

где модуль P будет проективным, тогда K будет горенштейновым проективным, согласно [3; теорема 2.20], таким образом, M проективен как прямое слагаемое модуля P .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть N – левый R -модуль. Следующие условия эквивалентны:

- (1) N инъективен;
- (2) N является $\mathcal{GI}$ -инъективным и 1-горенштейновым инъективным;
- (3) N является $\mathcal{GI}$ -инъективным и n -горенштейновым инъективным;
- (4) N является $\mathcal{GI}$ -инъективным и горенштейновым инъективным;
- (5) N является $\mathcal{GI}$ -инъективным и $\text{Gid}(N) \leq 1$.

Кольцо R называется левым горенштейново наследственным [5], если всякий подмодуль проективного левого R -модуля является горенштейновым проективным, т.е. $\text{l.Gldim}(R) \leq 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Пусть R – левое горенштейново наследственное кольцо. Тогда

- (1) M проективен, если и только если M $\mathcal{GP}$ -проективен;
- (2) N инъективен, если и только если N $\mathcal{GI}$ -инъективен.

Следующие два результата описывают $\mathcal{GP}$ -проективные и $\mathcal{GI}$ -инъективные левые R -модули в терминах горенштейновых проективных предоболочек и горенштейновых инъективных накрытий соответственно.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть M – левый R -модуль. Следующие условия эквивалентны:

- (1) M является $\mathcal{GP}$ -проективным;
- (2) для всякой точной последовательности

$$0 \rightarrow K \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow 0,$$

где X – горенштейнов проективный модуль, $K \rightarrow X$ является горенштейновой проективной предоболочкой модуля K ;

- (3) M является коядром горенштейновой проективной предоболочки $f: K \rightarrow P$, где P проективен;
- (4) M проективен относительно любой точной последовательности

$$0 \rightarrow X \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow 0,$$

где X – горенштейнов проективный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2) и (1) $\Rightarrow$ (4) проверяются непосредственно.

Следствие (2) $\Rightarrow$ (3) тривиально.

(3) $\Rightarrow$ (1) Для всякого горенштейнова проективного левого R -модуля X последовательность

$$\text{Hom}_R(P, X) \rightarrow \text{Hom}_R(\text{im } f, X) \rightarrow \text{Ext}_R^1(M, X) \rightarrow 0$$

точна. Поскольку $f: K \rightarrow P$ является горенштейновой проективной предоболочкой, получаем точную последовательность

$$\text{Hom}_R(P, X) \rightarrow \text{Hom}_R(\text{im } f, X) \rightarrow 0.$$

Таким образом, $\text{Ext}_R^1(M, X) = 0$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Для всякого горенштейнова проективного левого R -модуля X можно выбрать точную последовательность $0 \rightarrow X \rightarrow I \rightarrow L \rightarrow 0$, где модуль I будет инъективен. Она индуцирует точную последовательность

$$\text{Hom}_R(M, I) \rightarrow \text{Hom}_R(M, L) \rightarrow \text{Ext}_R^1(M, X) \rightarrow 0.$$

В силу (4) последовательность $\text{Hom}_R(M, I) \rightarrow \text{Hom}_R(M, L) \rightarrow 0$ точна, стало быть, $\text{Ext}_R^1(M, X) = 0$.

ТЕОРЕМА 2.7. Пусть N – левый R -модуль. Следующие условия эквивалентны:

- (1) N является $\mathcal{GI}$ -инъективным;
- (2) для всякой точной последовательности

$$0 \rightarrow N \rightarrow Y \rightarrow L \rightarrow 0,$$

где Y – горенштейнов инъективный модуль, $Y \rightarrow L$ является горенштейновым инъективным преднакрытием модуля L ;

- (3) N есть ядро горенштейнова инъективного преднакрытия $g: I \rightarrow L$, где I инъективен;
- (4) N инъективен относительно любой точной последовательности

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow Y \rightarrow 0,$$

где Y – горенштейнов инъективный модуль.

Напомним, что левый R -модуль называется *приведенным* [6], если у него нет ненулевых инъективных подмодулей. Двойственным образом, левый R -модуль называется *коприведенным*, если у него нет ненулевых проективных фактормодулей.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. Пусть K и L – левые R -модули. Тогда

- (1) если $f: K \rightarrow P$, где P проективен, есть горенштейнова проективная оболочка, то $\text{сокер } f$ является коприведенным $\mathcal{GP}$ -проективным модулем;
- (2) если $g: I \rightarrow L$, где I инъективен, есть горенштейново инъективное накрытие, то $\ker g$ является приведенным $\mathcal{GI}$ -инъективным модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = \text{сокер } f$. Тогда M является $\mathcal{GP}$ -проективным в силу теоремы 2.6. Предположим, что Q является проективным фактормодулем модуля M , тогда $P = Q \oplus H$ для некоторого левого R -модуля H . Пусть $p: P \rightarrow H$ – проекция, а $i: H \rightarrow P$ – вложение. Тогда $ipf = f$, поскольку $f(K) = H$. Значит, ip является изоморфизмом, поскольку f – оболочка. Стало быть, i – эпиморфизм и $Q = 0$, что и требовалось.

3. Инъективные размерности горенштейновых проективных модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Для произвольного кольца R положим

$$\text{GPID}(R) = \sup\{\text{id}(M) \mid M \in {}_R\mathcal{M}, \text{ где } M \text{ – горенштейнов проективный модуль}\}.$$

R называется *левым GPI-кольцом*, если $\text{GPID}(R) = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Для всякого кольца R

$$\text{GPID}(R) = \sup\{\text{id}(M) \mid M \in {}_R\mathcal{M}, \text{ где } \text{Gpd}(M) < \infty\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\text{GPID}(R) < \infty$. Для произвольного левого R -модуля M , для которого $\text{Gpd}(M) = n$, найдется точная последовательность

$$0 \rightarrow G_n \rightarrow \cdots \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

где все G_i суть горенштейновы проективные модули. Тогда для них всех $\text{id}(G_i) \leq \text{GPID}(R)$. Для всякой короткой точной последовательности $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ из

$$\text{id}(A) \leq \text{GPID}(R) \quad \text{и} \quad \text{id}(B) \leq \text{GPID}(R)$$

следует, что $\text{id}(C) \leq \text{GPID}(R)$, значит, $\text{id}(M) \leq \text{GPID}(R)$, что и требовалось.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Для произвольного кольца R положим

$$\text{GPGID}(R) = \sup\{\text{Gid}(M) \mid M \in {}_R\mathcal{M}, \text{ где } M - \text{горенштейнов проективный модуль}\}.$$

Отметим, что из неравенств $\text{Gid}(A) \leq n$ и $\text{Gid}(B) \leq n$ для любой короткой точной последовательности $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ следует, что $\text{Gid}(C) \leq n$. Поэтому имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Для произвольного кольца R

$$\text{GPGID}(R) = \sup\{\text{Gid}(M) \mid M \in {}_R\mathcal{M}, \text{ где } \text{Gpd}(M) < \infty\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Ясно, что левое GPI-кольцо является квазифробениусовым. Для произвольного кольца R положим

$$\text{PID}(R) = \sup\{\text{id}(M) \mid M \in {}_R\mathcal{M}, \text{ где } M \text{ проективен}\}.$$

Тогда квазифробениусовость R выполняется, если и только если

$$\text{PID}(R) = 0, \quad \text{GPGID}(R) = 0, \quad \text{l.Gldim}(R) = 0$$

(см. [1; предложение 2.6] и [7; теорема 2.2]).

ПРИМЕР 3.6. Пусть $R = k[X]/(X^2)$, где k – поле, и обозначим через $\bar{X}$ образ элемента X в факторкольце R . Тогда

- (1) R является квазифробениусовым согласно [8; следствие 4.36];
- (2) идеал $\bar{X}$ является горенштейновым проективным, но не инъективным согласно [9; пример 2.5].

Значит, квазифробениусово кольцо не обязательно является левым GPI-кольцом. Вообще говоря,

$$\text{GPID}(R) \neq \text{GPGID}(R) \quad \text{и} \quad \text{GPID}(R) \neq \text{l.Gldim}(R).$$

Связь с левой финитной (горенштейновой) проективной размерностью и левой (горенштейновой) глобальной размерностью описывается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3.7. Для произвольного кольца R

$$\text{PID}(R) \leq \text{GPGID}(R) \leq \text{l.Gldim}(R),$$

причем равенство достигается, если $\text{l.Gldim}(R) < \infty$, и

$$\text{FGPD}(R) \leq \text{PID}(R) \leq \text{GPGID}(R) \leq \text{GPID}(R) \leq \text{l.gldim}(R)$$

причем равенство достигается, если $\text{wdim}(R) < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякого проективного левого R -модуля Q верно, что поскольку $\text{id}(Q) = \text{Gid}(Q)$ [10; теорема 2.1], то $\text{id}(Q) \leq \text{GPGID}(R)$. Таким образом, $\text{PID}(R) \leq \text{GPGID}(R)$.

Предположим, что $\text{PID}(R) = n$, тогда $\text{id}(Q) \leq n$ для всякого проективного левого R -модуля Q . Поэтому $\text{Ext}_R^{i>n}(M, Q) = 0$ для всякого левого R -модуля M . Значит, $\text{Gpd}(M) \leq n$ согласно [3; теорема 2.20]. Отсюда следует первое из требуемых равенств.

Отметим, что $\text{FGPD}(R) = \text{FPD}(R)$ в силу [3; теорема 2.28]. Чтобы доказать, что $\text{FGPD}(R) \leq \text{PID}(R)$, достаточно убедиться, что $\text{FPD}(R) \leq \text{PID}(R)$. Действительно, для всякого левого R -модуля N можно выбрать короткую точную последовательность $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow 0$, где все P будут проективны. Далее, для всякого левого R -модуля M , для которого $\text{pd}(M) = m < \infty$, имеется точная последовательность

$$\text{Ext}_R^m(M, P) \rightarrow \text{Ext}_R^m(M, N) \rightarrow 0.$$

Если $m > \text{PID}(R)$, то ее первый член нулевой. Значит, $\text{Ext}_R^m(M, N) = 0$. Противоречие.

В [11; следствие 4] показано, что $\text{FPD}(R) = \text{l.gldim}(R)$, когда $\text{wdim}(R) < \infty$, откуда следует второе из требуемых равенств.

Остальные доказательства очевидны.

СЛЕДСТВИЕ 3.8. Если $\text{l.Ggldim}(R) < \infty$, то

$$\begin{aligned} \text{GPGID}(R) &= \sup\{\text{Gpd}(R/I) \mid I - \text{левый идеал в } R\} \\ &= \sup\{\text{Gpd}(M) \mid M \in {}_R\mathcal{M}, \text{ где } M \text{ конечно порожден}\}. \end{aligned}$$

Далее мы приводим функториальное описание $\text{GPID}(R)$ в терминах $\mathcal{GP}$ -проективных левых R -модулей.

ТЕОРЕМА 3.9. Для произвольного кольца R следующие условия эквивалентны:

- (1) $\text{GPID}(R) \leq n$;
- (2) если $0 \rightarrow K_n \rightarrow \dots \rightarrow K_1 \rightarrow K_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ — точная последовательность, обладающая тем свойством, что для любого горенштейнова проективного левого R -модуля G имеет место равенство

$$\text{Ext}_R^n(K_0, G) = \text{Ext}_R^{n-i+1}(K_i, G) = \text{Ext}_R^{n-i}(K_i, G) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

то K_n является $\mathcal{GP}$ -проективным;

- (3) у всякого левого R -модуля M имеются $\mathcal{GP}$ -проективные n -е сизигии;
- (4) у R/I имеются $\mathcal{GP}$ -проективные n -е сизигии для любого левого идеала I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2) Рассмотрим короткие точные последовательности

$$0 \rightarrow C_{i+1} \rightarrow K_i \rightarrow C_i \rightarrow 0 \quad \text{при } i = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

где $C_0 = K_{-1} = M$, $C_i = \ker(K_{i-1} \rightarrow K_{i-2})$ и $C_n = K_n$. Для всякого горенштейнова проективного R -модуля G $\text{id}(G) \leq n$ в силу условия (1), поэтому

$$\text{Ext}_R^{n+1}(K_0, G) = \text{Ext}_R^{n+1}(C_0, G) = 0.$$

В силу предположения

$$\text{Ext}_R^{n-i+1}(K_i, G) \cong \text{Ext}_R^{n-i}(K_i, G) \quad \text{при } i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Поэтому

$$\text{Ext}_R^1(K_n, G) \cong \text{Ext}_R^2(C_{n-1}, G) \cong \dots \cong \text{Ext}_R^{n+1}(C_0, G) = 0,$$

откуда следует, что K_n является $\mathcal{GP}$ -проективным.

(2) $\Rightarrow$ (3) Пусть

$$\cdots \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

– проективная резольвента модуля M , а K_n – ее n -е сизигии. В силу условия (2) K_n является $\mathcal{GP}$ -проективным.

(3) $\Rightarrow$ (4) тривиально.

(4) $\Rightarrow$ (1) Пусть

$$\cdots \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow R/I \rightarrow 0$$

– проективная резольвента модуля R/I . В силу условия (4) n -е сизигии K_n являются $\mathcal{GP}$ -проективными. Поэтому

$$\text{Ext}_R^{n+1}(R/I, G) \cong \text{Ext}_R^1(K_n, G) = 0$$

для любого горенштейнова проективного левого R -модуля G , а значит, $\text{id}(G) \leq n$.

Применяя теорему 3.9 в случае $n = 0$, получаем описание левых GPI-колец.

СЛЕДСТВИЕ 3.10. Для всякого кольца R следующие условия эквивалентны:

- (1) R является левым GPI-кольцом;
- (2) всякий левый R -модуль M является $\mathcal{GP}$ -проективным;
- (3) для всякого левого идеала I модуль R/I является $\mathcal{GP}$ -проективным.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.11. В силу предложения 2.3 и следствия 3.10 кольцо R полупросто тогда и только тогда, когда оно является левым GPI-кольцом и $\text{l.Gldim}(R) \leq 1$.

Применяя теорему 3.9 к случаю $n = 1$, мы получаем утверждение о том, что всякий подмодуль $\mathcal{GP}$ -проективного левого R -модуля является $\mathcal{GP}$ -проективным.

СЛЕДСТВИЕ 3.12. Для произвольного кольца R следующие условия эквивалентны:

- (1) $\text{GPID}(R) \leq 1$;
- (2) всякий подмодуль $\mathcal{GP}$ -проективного левого R -модуля является $\mathcal{GP}$ -проективным;
- (3) всякий подмодуль проективного левого R -модуля является $\mathcal{GP}$ -проективным;
- (4) всякий левый идеал в R является $\mathcal{GP}$ -проективным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2) Пусть N – подмодуль некоторого $\mathcal{GP}$ -проективного левого R -модуля M . Тогда имеется точная последовательность

$$\text{Ext}_R^1(M, G) \rightarrow \text{Ext}_R^1(N, G) \rightarrow \text{Ext}_R^2(M/N, G)$$

для всякого горенштейнова проективного левого R -модуля G . Первый ее член равен нулю, так как M является $\mathcal{GP}$ -проективным, а последний член равен нулю, поскольку $\text{id}(G) \leq 1$. Значит, $\text{Ext}_R^1(N, G) = 0$.

Следствия (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) тривиальны.

(4) $\Rightarrow$ (1) Для всякого левого идеала I у модуля R/I имеется $\mathcal{GP}$ -проективный первый модуль сизигий согласно условию (4). Поэтому $\text{GPID}(R) \leq 1$ по теореме 3.9.

Далее мы приводим описание левого наследственного кольца R , т.е. такого кольца, для которого $\text{l.gldim}(R) \leq 1$.

СЛЕДСТВИЕ 3.13. *Кольцо R является левым наследственным тогда и только тогда, когда $\text{GPID}(R) \leq 1$ и всякий $\mathcal{GP}$ -проективный левый R -модуль проективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если кольцо R является левым наследственным, то имеем $\text{GPID}(R) \leq 1$ по теореме 3.7. Для всякого левого R -модуля N можно выбрать короткую точную последовательность $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow 0$, где P проективен. Тогда для всякого $\mathcal{GP}$ -проективного левого R -модуля M имеется точная последовательность

$$\text{Ext}_R^1(M, P) \rightarrow \text{Ext}_R^1(M, N) \rightarrow \text{Ext}_R^2(M, K).$$

Ее первый член равен нулю, поскольку модуль M является $\mathcal{GP}$ -проективным, а последний член равен нулю, так как кольцо R левое наследственное. Значит, имеем $\text{Ext}_R^1(M, N) = 0$, т.е. M проективен.

Обратно, для всякого левого R -модуля M можно выбрать короткую точную последовательность $0 \rightarrow N \rightarrow Q \rightarrow M \rightarrow 0$, где Q будет проективным модулем. В силу следствия 3.12 N является $\mathcal{GP}$ -проективным, а значит, N проективен в силу нашего предположения. Значит, $\text{pd}(M) \leq 1$, и поэтому $\text{l.gldim}(R) \leq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.14. Для произвольного кольца R положим

$$\text{GIPD}(R) = \sup\{\text{pd}(M) \mid M \in {}_R\mathcal{M}, \text{ где } M - \text{горенштейнов инъективный модуль}\}.$$

У вышеприведенных результатов, относящихся к $\text{GPID}(R)$, имеются аналоги, касающиеся $\text{GIPD}(R)$. Мы не приводим формулировки этих (двойственных) результатов.

В завершение статьи приведем результат о коммутативных нётеровых кольцах.

ТЕОРЕМА 3.15. *Пусть R – коммутативное нётерово кольцо. Неравенство $\text{GPID}(R) \leq n$ выполнено тогда и только тогда, когда $\text{id}(G \otimes_R F) \leq n$ для всякого горенштейнова проективного левого R -модуля G и всякого плоского левого R -модуля F .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякого горенштейнова проективного левого R -модуля G , для которого $\text{id}(G) \leq n$, выберем точную последовательность

$$0 \rightarrow G \rightarrow E_1 \rightarrow \cdots \rightarrow E_{n-1} \rightarrow E_n \rightarrow 0,$$

где все E_i инъективны. Тогда для любого плоского левого R -модуля F последовательность

$$0 \rightarrow G \otimes_R F \rightarrow \cdots \rightarrow E_{n-1} \otimes_R F \rightarrow E_n \otimes_R F \rightarrow 0$$

точна. Согласно [12; теорема 1.3] все модули $E_i \otimes_R F$ инъективны. Значит,

$$\text{id}(G \otimes_R F) \leq n.$$

Обратно, для всякого горенштейнова проективного левого R -модуля G можно выбрать короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow G \rightarrow E_1 \rightarrow \cdots \rightarrow E_{n-1} \rightarrow L_n \rightarrow 0,$$

где все E_i будут инъективными. Тогда для любого плоского левого R -модуля F последовательность

$$0 \rightarrow G \otimes_R F \rightarrow \cdots \rightarrow E_{n-1} \otimes_R F \rightarrow L_n \otimes_R F \rightarrow 0$$

точна и все $E_i \otimes_R F$ инъективны в силу [12; теорема 1.3]. По предположению модуль $L_n \otimes_R F$ инъективен. Снова применяя [12; теорема 1.3], получаем, что L_n инъективен. Поэтому $\text{id}(G) \leq n$.

СЛЕДСТВИЕ 3.16. Пусть R – коммутативное нётерово кольцо. Тогда R является левым GPI-кольцом тогда и только тогда, когда модуль $G \otimes_R F$ инъективен для всякого горенштейнова проективного левого R -модуля G и всякого плоского левого R -модуля F .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Bennis, N. Mahdou, “Global Gorenstein dimensions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **138**:2 (2010), 461–465.
- [2] H. Bass, “Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **95** (1960), 466–488.
- [3] H. Holm, “Gorenstein homological dimensions”, *J. Pure Appl. Algebra*, **189**:1-3 (2004), 167–193.
- [4] D. Bennis, N. Mahdou, “A generalization of strongly Gorenstein projective modules”, *J. Algebra Appl.*, **8**:2 (2009), 219–227.
- [5] N. Mahdou, M. Tamekkante, “On (strongly) Gorenstein (semi) hereditary rings”, *Arab. J. Sci. Eng.*, **36**:3 (2011), 431–440.
- [6] E. E. Enochs, O. M. G. Jenda, *Relative Homological Algebra*, de Gruyter Exp. Math., **30**, Walter de Gruyter, Berlin, 2000.
- [7] D. Bennis, N. Mahdoua, K. Ouarghi, “Rings over which all modules are strongly Gorenstein projective”, *Rocky Mountain J. Math.*, **40**:3 (2010), 749–759.
- [8] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Pure Appl. Math., **85**, Academic Press, New York, 1979.
- [9] D. Bennis, N. Mahdou, “Strongly Gorenstein projective, injective, and flat modules”, *J. Pure Appl. Algebra*, **210**:2 (2007), 437–445.
- [10] H. Holm, “Rings with finite Gorenstein injective dimension”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **132**:5 (2004), 1279–1283.
- [11] C. U. Jensen, “On the vanishing of $\varinjlim^{(i)}$ ”, *J. Algebra*, **15**:2 (1970), 151–166.
- [12] T. Ishikawa, “On injective modules and flat modules”, *J. Math. Soc. Japan*, **17**:3 (1965), 291–296.

К. К. Пан

Nanjing Agricultural University, China,
Nanjing University, China
E-mail: pqxjs98@njau.edu.cn

Поступило

20.09.2011

К. Л. Жу

Nanjing Agricultural University, China,
Nanjing University, China
E-mail: zhuxiaoli@njau.edu.cn