Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Хианлин Вей, Рен Динг, Решетчатые многоугольники с двумя внутренними узлами решетки, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 6, 920–933

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9391>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 13:14:29

Решетчатые многоугольники с двумя внутренними узлами решетки

Хианлин Вей, Рен Динг

Точка с целыми координатами называется узлом решетки на плоскости. Отрезок прямой, концы которого являются узлами решетки, называется отрезком решетки. Простой многоугольник, вершины которого являются узлами решетки, называется решеточным многоугольником. Найдены все выпуклые решеточные многоугольники на плоскости с точностью до эквивалентности между двумя внутренними узлами решетки.

Библиография: 7 названий.

1. Введение и обозначения. Точка с целыми координатами называется *узлом решетки* на плоскости. Отрезок прямой, концы которого являются узлами решетки, называется *отрезком решетки*. Простой многоугольник, вершины которого являются узлами решетки, называется *решеточным многоугольником*. Через $v = v(P)$, $b = b(P)$ и $i = i(P)$ будем, соответственно, обозначать номер вершины, номер граничного узла решетки, и номер внутреннего узла решетки для решеточного многоугольника P . Задача определения взаимосвязи между v , b , i , и т.д. весьма интересна и изучалась многими авторами в различных постановках, см., например, [1]–[4]. В данной работе, рассматривается задача, в которой требуется найти все выпуклые решеточные многоугольники с двумя внутренними узлами решетки.

Для того чтобы понять, когда два решеточных многоугольника эквивалентны, сначала напомним некоторые определения стандартных преобразований плоскости. *Аффинное* преобразование – это линейное преобразование с последующей трансляцией. *Унимодулярное* преобразование – это преобразование, сохраняющее область. Матрица, соответствующая линейному преобразованию, является унимодулярной, если ее детерминант равен единице. Далее, если элементы матрицы целые, то соответствующее преобразование называется *интегральным* унимодулярным преобразованием и обладает свойством сохранения числа узлов решетки в данном множестве. Интегральное унимодулярное аффинное преобразование определено в работе [5]. Два решеточных многоугольника называются *решеточно эквивалентными*, если

Работа выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (10901045, 10926054), Фонда естественных наук провинции Хебей (A2010000828), Научного фонда университета науки и технологии провинции Хебей (QD200955), и Фонда естественных наук Департамента образования провинции Хебей (Z2009113).

один из них может быть преобразован в другой с помощью некоторого интегрального унимодулярного аффинного преобразования.

Напомним, что трапеция – это четырехугольник, у которого только одна пара противоположащих сторон параллельна.

ЛЕММА 1 [5]. *Выпуклая решеточная трапеция должна содержать внутренний узел решетки.*

ЛЕММА 2 [5]. *Выпуклый решеточный пятиугольник должен содержать внутренний узел решетки.*

ЛЕММА 3 [6]. *Выпуклый решеточный шестиугольник содержит по крайней мере четыре внутренних узла решетки.*

Через $\text{TRIANG}(p, h)$ обозначим треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(p, 0)$ и $(0, h)$. Через $\text{TRAP}(p, q, h)$ обозначим трапецию с вершинами $(0, 0)$, $(p, 0)$, $(0, h)$ и (q, h) .

ЛЕММА 4 [5]. *Если P – выпуклый решеточный многоугольник с $i = 0$, то P решеточно эквивалентен одному из следующих многоугольников:*

- 1) $\text{TRIANG}(p, 1)$, где p – любое положительное целое число;
- 2) $\text{TRIANG}(2, 2)$;
- 3) $\text{TRAP}(p, q, 1)$, где p и q – любые положительные целые числа.

ЛЕММА 5 [5]. *Если P – выпуклый решеточный треугольник с $i = 1$, то P решеточно эквивалентен одному из следующих пяти треугольников, представленных на рис. 1.*

Рис. 1. Решеточные треугольники с одним внутренним узлом решетки

Нам также понадобится следующее хорошо известное утверждение.

ЛЕММА 6 [4]. *Если решеточный многоугольник P , имеющий площадь A , содержит b узлов решетки на границе и i узлов решетки во внутренней области, то $A = b/2 + i - 1$.*

Определим *решеточную длину* отрезка прямой xu как длину, за единицу измерения которой возьмем расстояние между двумя соседними узлами решетки на линии xu . Ясно, что решеточная длина отрезка решетки меньше, чем число узлов решетки на этом отрезке.

ЛЕММА 7 [5]. *Пусть AB – сторона выпуклого решеточного многоугольника P на плоскости. Пусть t – решеточная длина стороны AB . Тогда существует интегральное унимодулярное аффинное преобразование, отображающее точку A в начало координат, точку B в точку $(t, 0)$ на положительной оси x , и все другие вершины многоугольника P в точки, лежащие выше оси x .*

Мы начнем наше рассмотрение с решеточных многоугольников P , которые содержат два внутренних узла решетки. В силу леммы 3 нужно рассматривать многоугольник P , число вершин которого не превосходит шести. Для выпуклого решеточного многоугольника P , содержащего $i(P) = 2$ внутренних узлов решетки, неравенство Скотта [7] принимает вид $b(P) \leq 2i(P) + 6 = 10$.

2. Выпуклые решеточные треугольники с $i = 2$. Как и в работе [3], предположим, что $\Delta = \text{conv}\{x, y, z\}$ – решеточный треугольник с двумя внутренними узлами решетки. Определим, сколько имеется узлов решетки на каждой стороне треугольника Δ . Через α, β, γ обозначим решеточные длины сторон треугольника Δ , где $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Предположим, что две стороны треугольника Δ , встречающиеся в вершине, имеют длины $\alpha(t_1, t_2)$ и $\beta(t_3, t_4)$ при некоторых целых t_1, t_2, t_3 и t_4 . Из хорошо известной детерминантной формулы следует, что площадь треугольника Δ равна $A(\Delta)$, $A(\Delta) = \alpha\beta t/2$, где $t \in \mathbb{N}$. С другой стороны, в силу леммы 6 имеем

$$A(\Delta) = \frac{b(\Delta)}{2} + i(\Delta) - 1 = \frac{b}{2} + 1.$$

Приравнявая эти два выражения для площади треугольника Δ , получим $b + 2 = \alpha\beta t$. Отсюда следует, что число $b + 2$ должно делиться на α, β и $\alpha\beta$. Аналогично, получим, что число $b + 2$ должно делиться на $\gamma, \alpha\gamma$ и $\beta\gamma$.

Суммируя вышесказанное, получим, что доказательство существования решеточного треугольника с двумя внутренними узлами решетки сводится к решению следующей задачи: найти тройки (α, β, γ) положительных целых чисел, удовлетворяющих следующим условиям:

- (1) $\alpha + \beta + \gamma = b$;
- (2) $\alpha \geq \beta \geq \gamma$;
- (3) $\alpha \geq b/3$;
- (4) все числа $\alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta, \alpha\gamma$ и $\beta\gamma$ являются делителями числа $b + 2$.

Очевидно, что для того, чтобы найти все возможные тройки (α, β, γ) , удовлетворяющие условиям (1)–(4), достаточно рассмотреть область изменения числа b : $3 \leq b \leq 10$. Можно проверить, что в таблице, приведенной ниже, представлены все решения системы (1)–(4).

Таблица. Все решения системы (1)–(4) при $b < 11$

b	3	4	5	6	7	8	9	10
(α, β, γ)	(1, 1, 1)	(2, 1, 1)	—	(2, 2, 2)(4, 1, 1)	(3, 3, 1)	(5, 2, 1)	—	(6, 2, 2)

ТЕОРЕМА 8. Если P – решеточный треугольник с двумя внутренними узлами решетки, то $b(P) \in \{3, 4, 6, 8, 10\}$ и P решеточно эквивалентен одному из следующих пяти треугольников, представленных на рис. 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (α, β, γ) – тройка решеточного треугольника Δ с двумя внутренними узлами решетки. Очевидно, $\alpha + \beta + \gamma = b(\Delta)$. Известно, что $b(\Delta) \leq 10$.

Рис. 2. Все решеточные треугольники с двумя внутренними узлами решетки

Если существуют решеточный треугольник Δ с двумя внутренними узлами решетки и число $b(\Delta) < 11$, то тройка этого треугольника содержится в числе троек, представленных выше в таблице. Исключим некоторые из этих троек и опишем возможные связи между другими тройками.

Сначала исключим тройку $(3, 3, 1)$. Если решеточный треугольник с такой тройкой существует, то его стороны будут иметь вид $3\vec{a}$, $3\vec{b}$ и $\vec{c} = 3\vec{b} - 3\vec{a}$ для некоторых решеточных векторов (векторов с целыми координатами). Так как $\vec{b} - \vec{a} = (1/3)\vec{c}$, и $\vec{b} - \vec{a}$ очевидно является решеточным вектором, должно выполняться соотношение $(1/3)\vec{c}$. Но тогда вектор $(2/3)\vec{c}$ также был бы решеточным вектором, откуда следовало бы, что $\gamma \geq 3$. Итак, не существует решеточного треугольника с тройкой $(3, 3, 1)$.

Теперь исключим тройку $(2, 2, 2)$. Предположим, что решеточный треугольник с такой тройкой существует, скажем, $\triangle ABC$. В силу леммы 7 этот треугольник можно отобразить на один из треугольников так, чтобы точка A переходила в точку $(0, 0)$, B переходила в $(2, 0)$, и C переходила в (p, q) , а точка C лежала выше линии AB . Так как отрезки AC и BC имеют решеточные длины 2, каждый из них содержит только один узел решетки в своей внутренней области, скажем D и E , соответственно. Тогда $DE \parallel AB$, и DE имеет решеточную длину, равную 1. Если D и E лежат на линии $y = 1$, то $C = (p, 2)$, и $\triangle ABC$ не содержит внутреннего узла решетки. Если D и E лежат на линии $y = 2$, то $C = (p, 4)$. Треугольник $\triangle ABC$ пересекается с линиями $y_1 = 1$ и $y_2 = 3$ в своей внутренней области. Рассматривая аналогичные треугольники, получим $m_1 = 1.5$ и $m_2 = 0.5$, где через m_1 и m_2 обозначены решеточные длины отрезков $y_1 \cap \triangle ABC$ и $y_2 \cap \triangle ABC$ соответственно. Так как AC не содержит в своей внутренней области других узлов решетки кроме D и BC не содержит в своей внутренней области других узлов решетки кроме E , то ясно, что $y_1 \cap \text{int } \triangle ABC$ содержит 2 узла решетки и $y_2 \cap \text{int } \triangle ABC$ содержит 1 узел решетки, где через $\text{int } \triangle ABC$ обозначена внутренняя область треугольника $\triangle ABC$. Итак, $\triangle ABC$ содержит 3 внутренних узла решетки, т.е. мы приходим к противоречию. Таким образом, D и E не могут лежать на линии $y = 2$, и поэтому не могут лежать на линии $y = k \geq 3$, где $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, решеточного треугольника с тройкой $(2, 2, 2)$ не существует.

Аналогично можно показать, что каждая из оставшихся троек может быть реализована, т.е. каждая из них соответствует решеточному треугольнику с двумя внутренними узлами решетки, который решеточно эквивалентен одному из пяти треугольников, представленных на рис. 2.

Таким образом, мы определили все треугольники с двумя внутренними узлами решетки.

3. Выпуклые решеточные четырехугольники с $i = 2$.

ТЕОРЕМА 9. Если P – выпуклый решеточный четырехугольник с $i = 2$, то P решеточно эквивалентен одному из 19 четырехугольников, представленных на рис. 3.

Рис. 3. Все выпуклые решеточные четырехугольники с двумя внутренними узлами решетки

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим четырехугольник через $ABCD$, и пусть E и F – два внутренних узла решетки, которые он содержит. Выберем диагональ AC .

Случай 1: $E, F \in AC$ и отрезок AC имеет решеточную длину 3.

Так как $E, F \in AC$, каждый из треугольников ACD и ABC не имеет внутренних узлов решетки. В силу леммы 4 треугольники ABC и ACD должны быть эквивалентны треугольнику $\text{TRIANG}(3, 1)$. Отобразим треугольник ABC в другой треугольник так, чтобы точка A переходила в точку $(0, 0)$, C переходила в $(3, 0)$ и B переходила в $(0, 1)$. Тогда точка D лежит на линии $y = -1$. Из выпуклости рассматриваемого четырехугольника следует, что точка D может быть только одним из пяти узлов решетки от $(1, -1)$ до $(5, -1)$. Полученные таким образом четырехугольники представлены на рис. 4.

Соответствующие интегральные унимодулярные аффинные преобразования показывают, что четырехугольники, представленные на рис. 4а и рис. 4е, эквивалентны четырехугольнику, представленному на рис. 3а; четырехугольники, представленные на рис. 4б и рис. 4д, эквивалентны четырехугольнику, представленному на рис. 3б; а рис. 4с совпадает с рис. 3с.

Случай 2: $E \in AC$, $F \notin AC$ и AC имеет решеточную длину 2.

Рис. 4. Решеточные четырехугольники с двумя внутренними узлами решетки на диагонали

Без ограничения общности, предположим, что F лежит в треугольнике ABC . Тогда треугольник ACD не имеет внутренних узлов решетки. Два треугольника ABC и ACD должны примыкать друг к другу вдоль некоторого ребра решеточной длины 2. В силу лемм 4 и 5 треугольник ACD должен быть эквивалентен треугольнику $\text{TRIANG}(2, 1)$ или $\text{TRIANG}(2, 2)$, и треугольник ABC должен быть эквивалентен одному из пяти треугольников, представленных на рис. 1. Далее, сторона AC имеет решеточную длину 2, что немедленно исключает рис. 1d и рис. 1e.

В любом случае преобразуем треугольник ABC так, чтобы сторона AC длины 2 переходила в ось x , где точка A лежит в начале координат $(0, 0)$ и точка B лежит на линии AC . Теперь мы видим, что рисунки 1a, 1b и 1c решеточно эквивалентны рисункам 5a', 5b' и 5c', приведенным ниже.

Рис. 5. Рисунки 1a, 1b и 1c решеточно эквивалентны рисункам 5a', 5b' и 5c'

Точка D должна лежать на линии $y = -1$ или $y = -2$.

Если D лежит на линии $y = -2$, то единственным возможным положением точки D будет точка $(0, -2)$. Эти три случая (рисунки 5a', 5b' и 5c') приводят к трем четырехугольникам, представленным на рисунках 3d, 3e и 3f, соответственно.

Теперь рассмотрим случай, когда точка D лежит на линии $y = -1$. Для рис. 5a' и рис. 5b' из выпуклости рассматриваемого четырехугольника следует, что точка D может быть только одним из двух узлов решетки $(0, -1)$ и $(1, -1)$, и полученные таким образом четырехугольники эквивалентны четырехугольникам, представленным на рисунках 3g, 3h, 3i и 3j соответственно. Для рис. 5c' из выпуклости рассматриваемого четырехугольника следует, что точка D может быть только одним из трех узлов решетки $(0, -1)$, $(1, -1)$ и $(2, -1)$. Полученные таким образом четырехугольники эквивалентны четырехугольникам, представленным на рис. 3a или рис. 3b.

Случай 3: $E \notin AC$, $F \notin AC$ и AC имеет решеточную длину 1.

Разделим этот случай на две части: в одной из них, треугольник ABC содержит два внутренних узла решетки; в другой, каждый из треугольников ABC и ACD содержит один внутренний узел решетки.

Случай 3а: треугольник ABC содержит два внутренних узла решетки и треугольник ACD не содержит внутренних узлов решетки.

Треугольник ACD находится напротив треугольника ABC , одна сторона которого совпадает со стороной AC . Так как AC не содержит узлов решетки в своей внутренней области, треугольник ABC должен быть эквивалентен одному из четырех треугольников, представленных на рисунках 2а, 2б, 2с и 2д, а треугольник ACD должен быть эквивалентен треугольнику $TRIANG(p, 1)$.

Рассмотрим случай, когда треугольник ABC эквивалентен треугольнику, представленному на рис. 2с. Предположим, что AB лежит на линии $y = 0$, а $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$ и $C = (1, 2)$ (если $A = (4, 0)$ и $B = (0, 0)$, то получаем тот же самый результат). Тогда из того, что рассматриваемый четырехугольник выпуклый, следует, что точка D может быть только одним из двух узлов решетки $(0, 1)$ и $(0, 2)$. Полученные таким образом четырехугольники эквивалентны четырехугольникам, представленным на рис. 3и и рис. 3г, соответственно. Если треугольник ABC эквивалентен треугольнику, представленному на рис. 2д, то доказательство аналогично. Пусть AB лежит на линии $y = 0$, и $B = (0, 0)$, $A = (5, 0)$ и $C = (2, 2)$. Тогда, из выпуклости рассматриваемого четырехугольника следует, что точка D может быть только одним из двух узлов решетки $(3, 2)$ и $(4, 1)$. Полученные таким образом четырехугольники представлены на рис. 3л и рис. 3о, соответственно.

Теперь рассмотрим оставшиеся случаи, когда треугольник ABC эквивалентен треугольнику, представленному на рис. 2а или рис. 2б. В любом случае, преобразуем треугольник ABC так, чтобы сторона AC длины 1 переходила в ось x с точкой A в начале координат и точкой B , лежащей выше линии AC . Получим, что треугольники, представленные на рис. 2а и рис. 2б решеточно эквивалентны треугольникам, представленным на рис. 6а' и рис. 6б'.

Рис. 6. Рисунки 2а и 2б решеточно эквивалентны рисункам 6а' и 6б'

Для рис. 6а' из выпуклости рассматриваемого четырехугольника следует, что точка D может быть только одним из пяти узлов решетки от $(0, -1)$ до $(0, -5)$, и полученные таким образом четырехугольники эквивалентны четырехугольникам, представленным на рис. 7. Соответствующие интегральные унимодулярные аффинные преобразования показывают, что эти пять четырехугольников эквивалентны четырехугольникам, представленным на рисунках 3к, 3ф, 3р, 3и и 3л соответственно.

Рис. 7. Допустимые четырехугольники, полученные из рис. 6а'

Для рис. 6b' из того, что рассматриваемый четырехугольник выпуклый, следует, что точка D может быть только одним из четырех узлов решетки от $(0, -1)$ до $(0, -4)$, и полученные таким образом четырехугольники эквивалентны четырехугольникам, представленным на рис. 8. Соответствующие интегральные унимодулярные аффинные преобразования показывают, что эти четырехугольники эквивалентны четырехугольникам, представленным на рисунках 3m, 3r, 3j и 3n соответственно.

Рис. 8. Допустимые четырехугольники, полученные из рис. 6b'

Случай 3b: каждый из треугольников ABC и ACD содержит один внутренний узел решетки.

Так как отрезок AC не содержит узлов решетки в своей внутренней области, каждый из треугольников ABC и ACD должен быть эквивалентен одному из трех треугольников, представленных на рисунках 1b, 1c и 1e соответственно.

Предположим, что треугольник ABC эквивалентен треугольнику, представленному на рис. 1b. Предположим, что отрезок AB лежит на линии $y = 0$, и $A = (3, 0)$, $B = (0, 0)$ и $C = (0, 2)$. Тогда из выпуклости рассматриваемого четырехугольника следует, что точка D может быть только одним из трех узлов решетки $(3, 1)$, $(2, 2)$ и $(3, 2)$. Полученные таким образом четырехугольники эквивалентны четырехугольникам, представленным на рис. 3p, 3e и 3q соответственно. Если треугольник ABC эквивалентен треугольнику, представленному на рис. 1c, то доказательство аналогично. Предположим, что AB лежит на линии $y = 0$, и $A = (2, 0)$, $B = (0, 0)$ и $C = (1, 2)$. Тогда из выпуклости рассматриваемого четырехугольника следует, что

точка D может быть только одним из двух узлов решетки $(3, 1)$ и $(3, 2)$. Полученные таким образом четырехугольники эквивалентны четырехугольникам, представленный на рис. 3г и рис. 3с соответственно. Если треугольник ABC эквивалентен треугольнику, представленному на рис. 1е, то доказательство аналогично. Предположим, что AB лежит на линии $y = 0$, и $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ и $C = (2, 3)$. Тогда из выпуклости рассматриваемого четырехугольника следует, что точка D может быть только узлом решетки $(1, 3)$. Полученный таким образом четырехугольник эквивалентен четырехугольнику, представленному на рис. 3с.

Таким образом, все возможные четырехугольники, содержащие два внутренних узла решетки, получены.

Все девятнадцать четырехугольников, полученных при описании их свойств, на самом деле не являются эквивалентными, поскольку они либо имеют различные решеточные длины, либо их внутренние узлы решетки расположены по-разному.

4. Выпуклые решеточные пятиугольники с $i = 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Если P – выпуклый решеточный пятиугольник с двумя внутренними узлами решетки, то эти два внутренних узла решетки должны лежать на одной и той же линии с одной из вершин пятиугольника P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим пятиугольник через $ABCDE$, а его внутренние точки через F и G .

Случай 1: внутренний узел решетки F не лежит на диагонали. Рассмотрим три различных типа областей, образованных сторонами и диагоналями пятиугольника, и обозначим эти области через a , b и c соответственно (см. рис. 9).

Рис. 9. F лежит в области a , а G лежит в области 1, 2, 3, 4 или 5

Предположим, что F лежит в области a . Обозначим пять различных областей, образованных линиями (но не содержащих этих линий) AF , BF , CF , DF и EF как области 1, 2, 3, 4 и 5 соответственно (см. рис. 9). Если точка G лежит в области 1,

то в силу теоремы о пятиугольниках пятиугольник $CDEFG$ или $CDEGF$ содержит третий внутренний узел решетки, и таким образом мы приходим к противоречию. Если G лежит в области 2, то в силу теоремы о пятиугольниках пятиугольник $EABGF$ или $EABFG$ содержит третий внутренний узел решетки, и таким образом мы снова приходим к противоречию. Если G лежит в области 3, то в силу теоремы о пятиугольниках пятиугольник $BCDFG$ или $BCDGF$ содержит третий внутренний узел решетки, и таким образом мы снова приходим к противоречию. Если G лежит в области 4, то в силу теоремы о пятиугольниках пятиугольник $AEDGF$ или $AEDFG$ содержит третий внутренний узел решетки, и таким образом мы снова приходим к противоречию. Если G лежит в области 5, то в силу теоремы о пятиугольниках пятиугольник $ABCGF$ или $ABCFG$ содержит третий внутренний узел решетки, и таким образом мы снова приходим к противоречию. Итак, можно исключить случаи, когда точка G лежит на отрезках AF , BF , CF , DF и EF , т.е. точка G лежит на одной прямой с F и вершиной пятиугольника P . Заметим, что G может лежать на диагонали.

Аналогично, можно доказать, что точка G должна лежать на одной прямой с F и вершиной пятиугольника P , если F лежит в области b или c .

Случай 2: внутренний узел решетки F лежит на диагонали.

Без ограничения общности, предположим, что F лежит на диагонали AC . Проводя аналогичные рассуждения, получим, что G лежит на одной прямой с F и вершиной пятиугольника P .

ТЕОРЕМА 11 (Классификация свойств выпуклого решеточного пятиугольника с $i = 2$). Если P – выпуклый решеточный пятиугольник с $i = 2$, то P решеточно эквивалентен одному из 16 пятиугольников, представленных на рис. 10.

Рис. 10. Все выпуклые решеточные пятиугольники с $i = 2$; на самом деле, все они неэквивалентны

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим пятиугольник через $ABCDE$, а две его внутренние точки через F и G . Из предложения 10 следует, что F и G лежат на одной и той же диагонали или на одной прямой с одной из вершин пятиугольника P .

Случай 1: F и G лежат на одной и той же диагонали.

Рассмотрим диагональ AD . Диагональ AD разбивает пятиугольник на четырехугольник и треугольник. Обозначим четырехугольник через $ABCD$. Четырехугольник $ABCD$ имеет одну сторону решеточной длины 3 и не содержит узлов решетки в своей внутренней области. Таким образом, четырехугольник $ABCD$ должен быть эквивалентен четырехугольнику $\text{TRAP}(p, 3, 1)$ при некотором целом p , а треугольник EAD должен быть эквивалентен треугольнику $\text{TRIANG}(3, 1)$. Отобразим этот четырехугольник в другой четырехугольник так, чтобы точка A переходила в точку $(0, 1)$, B переходила в $(0, 0)$, C переходила в $(p, 0)$, D переходила в $(3, 1)$ и E лежала выше AD .

Рис. 11. $C = (p, 0)$, $p = 1, 2, 3, 4, 5$

Если $p = 1$, то четырехугольник представлен на рис. 11а. Можно взять $E = (1, 2)$, $E = (2, 2)$, $E = (3, 2)$ и $E = (4, 2)$; тогда полученные пятиугольники эквивалентны пятиугольникам, представленным на рис. 10а или рис. 10б.

Если $p = 2$, то четырехугольник представлен на рис. 11б. Можно взять $E = (1, 2)$, $E = (2, 2)$, и $E = (3, 2)$; тогда полученные пятиугольники эквивалентны пятиугольникам, представленным на рис. 10с или рис. 10д.

Если $p = 3$, то четырехугольник представлен на рис. 11с. Можно взять $E = (1, 2)$ и $E = (2, 2)$; тогда полученные пятиугольники эквивалентны пятиугольнику, представленному на рис. 10е.

Если $p = 4$, то четырехугольник представлен на рис. 11д. Можно взять $E = (1, 2)$; тогда полученный пятиугольник представлен на рис. 10ф.

Если $p = 5$, то четырехугольник представлен на рис. 11е. Невозможно поместить треугольник над AD и повернуть его так, чтобы получился выпуклый пятиугольник. То же самое замечание имеет место при $p > 5$.

Случай 2: точки F и G и одна из вершин лежат на одной прямой, но не на одной и той же диагонали.

Возьмем вершину A . Если прямая AF пересекается со стороной BC , то в силу теоремы о пятиугольнике пятиугольник $AFCDE$ содержит третий внутренний узел решетки, и мы приходим к противоречию. Если прямая AF пересекается со стороной DE , то в силу теоремы о пятиугольнике пятиугольник $ABCDF$ содержит третий внутренний узел решетки, и мы снова приходим к противоречию. Итак, прямая AF пересекается со стороной CD .

Случай 2а: прямая AF пересекается со стороной CD в узле решетки, скажем, в R .

Тогда $ABCR$ и $ARDE$ – два выпуклых четырехугольника, не содержащих внутреннего узла решетки. Отрезок AR имеет решеточную длину 3. Тогда в силу леммы 4 каждый из четырехугольников $ABCR$ и $ARDE$ должен быть эквивалентен четырехугольнику $\text{TRAP}(p, q, 1)$. Отобразим $ABCR$ на некоторый четырехугольник

так, чтобы точка A переходила в точку $(0, 1)$, B переходила в $(0, 0)$, C переходила в $(p, 0)$, R переходила в $(3, 1)$ и точки D и E лежали выше прямой AD . Заметим, что точки C , D и R лежат на одной и той же прямой. Так как четырехугольник $ARDE$ не содержит внутреннего узла решетки, то D и E должны лежать на прямой $y = 2$.

Если $p = 1$, то четырехугольник представлен на рис. 11а. Точка D должна быть $(5, 2)$. Можно взять $E = (1, 2)$, $E = (2, 2)$, $E = (3, 2)$ и $E = (4, 2)$; соответствующие пятиугольники представлены на рисунках 10g, 10h, 10i и 10j соответственно.

Если $p = 2$, то четырехугольник представлен на рис. 11b. Точка D должна быть $(4, 2)$. Можно взять $E = (1, 2)$, $E = (2, 2)$ и $E = (3, 2)$; соответствующие пятиугольники представлены на рисунках 10k, 10l и 10i, соответственно.

Если $p = 3$, то четырехугольник представлен на рис. 11c. Точка D должна быть $(3, 2)$. Можно взять $E = (1, 2)$ и $E = (2, 2)$; соответствующие пятиугольники эквивалентны пятиугольникам, представленным на рис. 10k и рис. 10h.

Если $p = 4$, то четырехугольник представлен на рис. 11d. Точка D должна быть $(2, 2)$. Можно взять $E = (1, 2)$; соответствующий пятиугольник эквивалентен пятиугольнику, представленному на рис. 10g.

Если $p = 5$, то четырехугольник представлен на рис. 11e. Невозможно поместить треугольник над AD и повернуть его так, чтобы получился выпуклый пятиугольник. То же самое замечание имеет место при $p > 5$.

Случай 2b: прямая AF не пересекается со стороной CD в узле решетки.

Тогда $ABCF$, $ABCG$, $AFDE$ и $AGDE$ – четыре выпуклых четырехугольника, которые не содержат внутренних узлов решетки. В силу леммы 1 легко доказать, что $ED \parallel AF \parallel BC$. Отобразим A в точку $(0, 1)$ и B в точку $(0, 0)$ так, чтобы точка F лежала выше линии $y = 1$. Тогда C должна лежать на прямой $y = 0$.

Если $C = (1, 0)$, то $D = (4, 2)$. Можно взять $E = (1, 2)$, $E = (2, 2)$ и $E = (3, 2)$; соответствующие пятиугольники представлены на рисунках 10m, 10n и 10o соответственно.

Если $C = (2, 0)$, то $D = (3, 2)$. Можно взять $E = (1, 2)$ и $E = (2, 2)$; полученные пятиугольники эквивалентны пятиугольникам, представленным на рис. 10p и рис. 10n соответственно.

Если $C = (3, 0)$, то $D = (2, 2)$. Можно взять $E = (1, 2)$; полученный пятиугольник эквивалентен пятиугольнику, представленному на рис. 10m.

Если $C = (4, 0)$, то $D = (1, 2)$. Невозможно поместить точку E так, чтобы получился выпуклый пятиугольник. То же самое замечание имеет место при $C = (k, 0)$, где $k > 4$.

Таким образом, получены все пятиугольники, содержащие два внутренних узла решетки.

5. Выпуклые решеточные шестиугольники с $i = 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Если P – выпуклый решеточный шестиугольник с двумя внутренними узлами решетки, то эти два внутренних узла решетки должны лежать на одной и той же диагонали шестиугольника P и между двумя вершинами этой диагонали должны быть две последовательных вершины шестиугольника P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим шестиугольник P через $ABCDEF$, а две его внутренние точки через G и H . Предположим, что существует внутренний узел решетки, скажем, G , который не лежит на диагонали. Предположим, что точка G лежит в четырехугольнике $ABEF$, и с той же стороны от линии AD , что и точка B . Тогда в силу леммы 2, т.е. в силу теоремы о пятиугольнике, другой внутренний узел решетки H должен лежать в области $BCDE \cap ADEF$. Таким образом, $BCDHG$ содержит третий узел решетки шестиугольника P в его внутренней области, и мы приходим к противоречию. Следовательно, точки G и H должны лежать на некоторых диагоналях шестиугольника P .

Аналогично, докажем, что G и H лежат на одной и той же диагонали, и между двумя вершинами этой диагонали должны быть две последовательных вершины шестиугольника P .

ТЕОРЕМА 13 (Классификация свойств выпуклого решеточного шестиугольника с $i = 2$). *Если P – выпуклый решеточный шестиугольник с $i = 2$, то P решеточно эквивалентен в точности одному из следующих 5 шестиугольников, представленных на рис. 12.*

Рис. 12. Все выпуклые решеточные шестиугольники с $i = 2$; на самом деле, все они неэквивалентны

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим шестиугольник через $ABCDEF$, а две его внутренние точки через G и H . В силу предложения 12 можно предположить, что точки G и H лежат на диагонали AD . Тогда отрезок AD имеет решеточную длину 3. Каждый из четырехугольников $ABCD$ и $ADEF$ не содержит внутренних узлов решетки. В силу леммы 4 четырехугольник $ABCD$ эквивалентен четырехугольнику $TRAP(p, 3, 1)$. Предположим, что $A = (0, 1)$, $B = (0, 0)$, $C = (p, 0)$, и $D = (3, 1)$, а E и F лежат на прямой $y = 2$.

Если $C = (1, 0)$, то точкой F могут быть точки $(1, 2)$, $(2, 2)$ и $(3, 2)$. Если $F = (1, 2)$, то можно взять $E = (2, 2)$, $E = (3, 2)$ и $E = (4, 2)$; полученные шестиугольники представлены на рисунках 12а, 12b и 12с соответственно. Если $F = (2, 2)$, то можно взять $E = (3, 2)$ и $E = (4, 2)$; полученные шестиугольники эквивалентны шестиугольникам, представленным на рис. 12d и рис. 12b соответственно. Если $F = (3, 2)$, то можно взять $E = (4, 2)$, и полученный шестиугольник эквивалентен шестиугольнику, представленному на рис. 12а.

Если $C = (2, 0)$, то точкой F могут быть точки $(1, 2)$ и $(2, 2)$. Если $F = (1, 2)$, то можно взять $E = (2, 2)$ и $E = (3, 2)$, и полученные шестиугольники эквивалентны шестиугольникам, представленным на рис. 12b и рис. 11е соответственно. Если $F = (2, 2)$, то можно взять $E = (3, 2)$, и полученный шестиугольник эквивалентен шестиугольнику, представленному на рис. 12b.

Если $C = (3, 0)$, то точкой F могут быть точки $(1, 2)$ и $E = (2, 2)$, и полученный шестиугольник эквивалентен шестиугольнику, представленному на рис. 12с.

Если $C = (4, 0)$, то невозможно поместить точки E и F так, чтобы получился выпуклый шестиугольник. То же самое замечание имеет место при $C = (k, 0)$, где $k > 4$.

Таким образом, мы получили все шестиугольники с двумя внутренними узлами решетки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Rabinowitz, “On the number of lattice points inside a convex lattice n -gon”, *Congr. Numer.*, **73** (1990), 99–124.
- [2] R. Ding, K. Kołodziejczyk, G. Murphy, J. Reay, “A fast Pick-type approximation for areas of H -polygons”, *Amer. Math. Monthly*, **100**:7 (1993), 669–673.
- [3] K. Kołodziejczyk, “Hex-triangles with one interior H -point”, *Ars Combin.*, **70** (2004), 33–45.
- [4] R. Ding, J. R. Reay, J. Zhang, “Areas of generalized H -polygons”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **77**:2 (1997), 304–317.
- [5] S. Rabinowitz, “A census of convex lattice polygons with at most one interior lattice point”, *Ars Combin.*, **28** (1989), 83–96.
- [6] S. Rabinowitz, “Consequences of the pentagon property”, *Geombinatorics*, **14** (2005), 208–220.
- [7] P. R. Scott, “On convex lattice polygons”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **15**:3 (1976), 395–399.

Хианлин Вей

Hebei University of Science and Technology, China

E-mail: wxlhebtu@126.com

Поступило

31.08.2010

Рен Динг

Hebei Normal University, China

E-mail: rending@hebtu.edu.cn