Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Я. Новиков, М. А. Скопина, Почему в разных структурах базисы Хаара одинаковые?, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 6, 950–953

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9392>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 05:13:32

Почему в разных структурах базисы Хаара одинаковые?

И. Я. Новиков, М. А. Скопина

Система Хаара [1] является модельным примером базиса всплесков в $L_2([0, 1])$. Активно изучаться всплески начали в конце прошлого века в связи с созданием теории кратномасштабного анализа (КМА). Вскоре возник интерес к базисам всплесков, определенных на различных структурах. В [2], [3] разработана теория КМА на группе Кантора и найдены различные ортогональные базисы всплесков, существенно отличающиеся от базиса Хаара. Группа 2-адических чисел имеет много сходства с группой Кантора (то же каноническое представление элементов и метрика), различаются они только действием “+”, но это приводит к принципиально разным теориям всплесков и КМА. В частности, в [4] доказано, что, в отличие от группы Кантора, не существует p -адического КМА с ортогональной масштабировующей функцией, не совпадающего с КМА Хаара. В то же время, p -адический базис Хаара (впервые выписанный в [5]) имеет точно такой же вид, что и базис Хаара на группе Кантора при $p = 2$ или Виленкина при $p > 2$. В [6] изучены базисы Хаара на отрезке $[0, 1]$, у которых на каждом уровне j свой коэффициент сжатия p_j . В работах [7]–[10] построены базисы Хаара на кольцах целых p -адических чисел и проективных пределах конечных циклических групп в одномерном и многомерном случае. В [8; замечание 2.4] отмечается наличие сходства базиса Хаара на нульмерной группе и базиса Хаара на $[0, 1]$ в [6]. В настоящей заметке мы даем простое объяснение этого сходства, показывая, что все упомянутые выше базисы Хаара могут быть определены одними и теми же формулами. Будет описана достаточно общая схема построения базисов Хаара, при этом не требуется даже наличие группового действия “+” (его использование только создает некоторое удобство для записи функций Хаара, но можно обойтись и без этого). Нужно только наличие “не слишком плохой” топологии в пространстве с мерой и подходящая последовательность разбиений пространства. При этом процесс построения системы Хаара и доказательство ее базисности точно такие же, как для классического базиса Хаара.

Пусть μ – мера в Ω , Σ – σ -алгебра измеримых множеств, $\mathbf{p} = \{p_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ – последовательность целых чисел, $p_j > 1$. Предположим, что существуют наборы множеств Ω_{jn} , $n \in \mathbb{Z}_+$, попарно дизъюнктивных при каждом $j \in \mathbb{Z}$, такие, что $\mu\Omega_{0n} = 1$ для любого $n \in \mathbb{Z}_+$, $\Omega = \bigcup_n \Omega_{jn}$ для любого $j \in \mathbb{Z}$, каждое $\Omega_{j-1,n}$ разбивается на p_j равновеликих подмножеств Ω_{j,n_k} , $n_k = n_k(n, j) \in \mathbb{Z}_+$. Семейство пар (j, n) , нумерующих множества Ω_{jn} , обозначим через I и совокупность $\{\Omega_{jn}\}_{(j,n) \in I}$ назовем $(H, \mathbf{p})$ -разбиением, а ее элементы – ячейками. Обозначим через ϕ_{jn} характеристическую функцию множества Ω_{jn} с нормирующим в $L_2(\Omega)$ множителем и положим $V_j := \text{span}\{\phi_{jn}, n \in \mathbb{Z}\}$.

ТЕОРЕМА. Пусть пространство с мерой (Ω, Σ, μ) снабжено топологией τ такой, что Σ содержит все открытые множества и мера μ регулярна, $\Omega = \{\Omega_{jn}\}_{(j,n) \in I}$ – $(H, \mathbf{p})$ -разбиение. Если для любого $x \in \Omega$ и любой окрестности U точки x существует ячейка Ω_{jn} , содержащая x и содержащаяся в U , то пространства V_j , $j \in \mathbb{Z}$, образуют КМА в $L_2(\Omega)$, т.е. удовлетворяют следующим условиям:

- (i) $V_{j-1} \subset V_j$;
- (ii) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;
- (iii) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L_2(\Omega)$;
- (iv) $\{\phi_{jn}\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ – ортонормированный базис в V_j .

Работы первого автора выполнены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 11-01-00614, 12-01-00216); работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00216) и Санкт-Петербургского государственного университета (НИР № 9.38.62.2012).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства (i) и (iv) очевидны.

Для доказательства (ii) заметим, что функция $f \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ должна быть константой на любой ячейке Ω_{jn} . Пусть $f = c$ на Ω_{j,n_0} для некоторого n_0 . Тогда $f = c$ на любой ячейке, содержащей Ω_{j,n_0} , а значит, и на их объединении, которое имеет бесконечную меру. Откуда, учитывая, что $f \in L_2(\Omega)$, получаем $c = 0$, что влечет $f = 0$ ввиду произвольности n_0 .

Свойство (iii) эквивалентно следующему: для любого множества $A \in \Sigma$ конечной меры и для любого $\varepsilon > 0$ существует $I_1 \subset I$ такое, что

$$\mu(A \Delta \bigcup_{(j,k) \in I_1} \Omega_{jk}) < \varepsilon.$$

Это утверждение легко получить с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в [11; замечание 10.b.3]. Пусть $A \in \Sigma$, $\mu A < \infty$, $\varepsilon > 0$. Из регулярности меры следует существование открытого множества G такого, что $A \subset G$, $\mu(G \setminus A) < \varepsilon$. Покажем, что G представимо в виде объединения попарно дизъюнктивных ячеек. Обозначим через Δ_0 объединение всех ячеек Ω_{0n} содержащихся в G , через Δ_1 – объединение всех ячеек Ω_{1n} содержащихся в G и не содержащихся в Δ_0 . Продолжая аналогично, получим последовательность попарно дизъюнктивных множеств Δ_j , $j = 0, 1, \dots$, содержащихся в G . Положив $\Delta = \bigcup_{j=0}^{\infty} \Delta_j$, имеем $\Delta \subset G$. Так как для произвольного $x \in G$ по условию существует ячейка Ω_{jn} , содержащая x и содержащаяся в G , то $\Delta = G$. Осталось заметить, что $\mu(\Delta \setminus \bigcup_{j=0}^N \Delta_j) < \varepsilon$ при достаточно больших N .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в условиях теоремы топология τ определяется метрикой, то мера μ регулярна (см., например, [15]). В этом случае дополнительное предположение о ячейках будет выполнено, если для каждого $x \in \Omega$ диаметры вложенных ячеек, содержащих x , стремятся к нулю. В случае метрического пространства и ограниченной последовательности $\{p_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ теорема доказана в [12; теорема 5.1].

Под системой Хаара, порожденной КМА Хаара, мы будем понимать следующую ортонормированную систему в $L_2(\Omega)$. Для произвольной пары $(j, n) \in I$ рассмотрим подпространство W_{jn} , порожденное характеристическими функциями ячеек Ω_{j+1, n_k} , $k = 1, \dots, p_{j+1}$, составляющих разбиение Ω_{jn} , причем функции этого подпространства имеют нулевое среднее. Ясно, что $\dim W_{jn} = p_{j+1} - 1$ и члены любого ортонормированного базиса в W_{jn} имеют вид

$$\psi_{jn}^{\nu} = C_{j+1} \sum_{k=1}^{p_{j+1}} h_{\nu,k} \chi_{\Omega_{j+1, n_k}},$$

где $h_{\nu k}$, $\nu, k = 1, \dots, p_{j+1}$ – элементы унитарной матрицы (вообще говоря, своей для каждого $(j, n) \in I$), у которой первая строка состоит из одинаковых элементов. Чаще всего в качестве таких унитарных матриц берут матрицу корней из единицы. Систему Хаара определим как $\Psi := \bigcup_{(j,n) \in I} \Psi_{jn}$, где $\Psi_{jn} := \{\psi_{jn}^{\nu}\}_{\nu=1}^{p_{j+1}}$ – произвольный ортонормированный базис в W_{jn} . Если существует оператор $D: \Omega \rightarrow \Omega$ такой, что $D\Omega_{jn} = \Omega_{j+1, n}$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$, то, задав базисы $\Psi_{0,k}$, мы имеем систему Хаара традиционного вида

$$\psi_{jk}^{\nu}(x) = C_j \psi_{0k}^{\nu}(D^j x), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \nu = 1, \dots, p_{j+1} - 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Случай $\mu\Omega < \infty$ (можно считать $\mu\Omega = 1$) совершенно аналогичен: в $(H, \mathbf{p})$ -разбиении рассматриваются только ячейки, содержащиеся в $\Omega = \Omega_{00}$, и в систему Хаара добавляется тождественная единица.

ПРИМЕРЫ. Пусть $p_j = p$, p простое, $\Omega = \mathbb{Q}_p$ – поле p -адических чисел, μ – мера Хаара в $\mathbb{Q}_p$, $D: x \rightarrow px$, $\Omega_{0n} = a_n + \mathbb{Z}_p$, $a_n \in J$, где $\mathbb{Z}_p$ – множество p -адических целых, $J = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ – множество p -адических чисел, совпадающих со своей дробной частью, $\Omega_{jn} = D^j \Omega_{0n}$. В этом случае мы получаем базис, построенный в работе [5]. Простейший многомерный базис Хаара можно построить, взяв

$$\Omega = \mathbb{Q}_p^d, \quad \Omega_{0n} = a_n + \mathbb{Z}_p^d, \quad a_n \in J^d,$$

D – матрица размера $p \times p$, в правом верхнем углу которой стоит p , под каждым элементом главной диагонали – 1, а остальные нули. Каждое Ω_{0n} разбивается на p равновеликих подмножеств Ω_k^n , состоящих из векторов $x \in \Omega_{0n}$ таких, что

$$x_1 - (a_n)_1 \equiv k \pmod{p}, \quad k = 0, 1, \dots, p-1.$$

Нетрудно видеть, что $D^{-1}\Omega_k^n = \Omega_{0m}$, где $m = m(n, k) \in \mathbb{Z}_+$, и D устанавливает взаимно однозначное соответствие между наборами множеств $\{\Omega_{0n}\}$ и $\{\Omega_k^n\}$. Положив $\Omega_{jn} = D^j\Omega_{0n}$, $j \in \mathbb{Z}$, получим $(H, \mathbf{p})$ -разбиение $\{\Omega_{jn}\}_{j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_+}$. Соответствующие базисы Хаара строились в [13], а сужения базисных функций на $\mathbb{Z}_p$ (которые образуют базис в $L_2(\mathbb{Z}_p)$), поскольку носитель каждого элемента построенного базиса Хаара либо содержится в $\mathbb{Z}_p$, либо не пересекается с $\mathbb{Z}_p$) рассматривались в [9] с использованием теории нульмерных групп.

Пусть $p_j = 2$, $\Omega = C$ – группа Кантора, состоящая из элементов $x = \{x_k\}_{k=-\infty}^\infty$, где $x_k \in \{0, 1\}$, причем $x_k \neq 0$ лишь для конечного числа отрицательных k , D – оператор, сопоставляющий каждому $x = \{x_k\}_{k=-\infty}^\infty$ элемент $\{x_{k-1}\}_{k=-\infty}^\infty$, μ – мера Хаара в C . Топология в C определяется нормой $\|x\| = 2^m$, где m – наименьшее целое для которого $x_m \neq 0$. Каждому неотрицательному целому числу

$$n = 2^m y_m + \dots + 2y_1 + y_0, \quad y_k \in \{0, 1\},$$

сопоставим множество Ω_{0n} , состоящее из элементов x таких, что $x_0 = y_0, \dots, x_{-m} = y_m$, $x_k = 0$ при $k < -m$. Положив $\Omega_{jn} = D^j\Omega_{0n}$, имеем $(H, \mathbf{p})$ -разбиение и базис Хаара, построенный в [3]. Аналогично строится базис Хаара на группе Виленькина [14].

Пусть G – компактная нульмерная группа, порожденная односторонней цепочкой вложенных подгрупп $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots$, определяющих топологию. Группа ассоциирована с некоторым набором простых чисел $\{p_j\}_{j=1}^\infty$, элементы группы представимы в виде $x = \sum_{k=1}^\infty x_k g_k$, где $x_k \in \{0, 1, \dots, p_k - 1\}$, а элементы $g_k \in G_{k-1} \setminus G_k$ удовлетворяют условию $p_j g_j = g_{j+1}$. Равенства

$$\mu G_0 = 1, \quad \mu G_j = (p_1 \cdots p_j)^{-1}, \quad j \in \mathbb{N},$$

определяют меру, инвариантную относительно сдвига, на полукольце всевозможных сдвигов множеств G_j . Эта мера распространяется на σ -алгебру Σ по схеме Каратеодори. Нетрудно проверить, что эта мера регулярна. Пусть $\Omega = \Omega_{0,0} = G$, $\{(y_{j,k,1}, \dots, y_{j,k,j})\}_{k=0}^{p_1 \cdots p_j - 1}$ – занумерованные в произвольном порядке элементы декартового произведения

$$\{0, 1, \dots, p_1 - 1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, p_j - 1\}.$$

Обозначая

$$\Omega_{jk} = \{x : x_l = y_{j,k,l}, l = 1, \dots, j\}, \quad k = 0, \dots, p_1 \cdots p_j - 1, \quad j \in \mathbb{Z}_+,$$

получим $(H, \mathbf{p})$ -разбиение. Соответствующий базис Хаара строился в [7].

Теперь покажем, как определить $(H, \mathbf{p})$ -разбиение в G^d , порождающее систему Хаара, построению которой посвящена работа [8]. Ограничимся случаем $d = 2$. Положим $\Omega = G^2$, $\mathbf{p} = \{p_1, p_1, p_2, p_2, p_3, p_3, \dots\}$. Каждое $x \in \Omega$ представимо в виде $x = (ag_1, bg_1) + y$, где $y \in G_1^2$, $a, b \in \{0, 1, \dots, p_1 - 1\}$. Множество векторов (a, b) образует группу относительно сложения по модулю (p_1, p_1) , которая распадается на p_1 циклических подгрупп

$$\gamma_k = \{(a_k, b_k) + (la^*, lb^*), l = 0, 1, \dots, p_1 - 1\},$$

где (a^*, b^*) – любой ненулевой элемент группы. Ячейку Ω_{1k} определим, включив в нее все x , у которых $(a, b) \in \gamma_k$. Далее, фиксируя l , определим соответствующие ячейки Ω_{2,k_l} , составляющие разбиение Ω_{1k} . Аналогично каждое Ω_{2n} сначала разбиваем на p_2 ячеек Ω_{3,n_k} , каждая из которых затем разбивается на p_2 ячеек Ω_{4,k_l} .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Наар, *Math. Ann.*, **69**:3 (1910), 331–371. [2] В. Ю. Протасов, Ю. А. Фарков, *Матем. сб.*, **197**:10 (2006), 129–160. [3] W. C. Lang, *SIAM J. Math. Anal.*, **27**:1 (1996), 305–312. [4] S. Albeverio, S. Evdokimov, M. Skopina, *J. Fourier Anal. Appl.*, **16**:5 (2010), 693–714. [5] С. В. Козырев, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 149–158. [6] Б. И. Голубов, *Сиб. матем. журн.*, **9** (1968), 297–314. [7] С. Ф. Лукомский, *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **9**:1 (2009), 14–19. [8] S. F. Lukomskii, *Cent. Eur. J. Math.*, **9**:3 (2011), 627–639. [9] С. Ф. Лукомский, *Матем. заметки*, **90**:4 (2011), 541–557. [10] С. Ф. Лукомский, *Матем. сб.*, **201**:5 (2010), 41–64. [11] I. Novikov, E. Semenov, *Haar Series and Linear Operators*, Math. Appl., **367**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997. [12] H. Aimar, A. Bernardis, B. Iaffei, *J. Approx. Theory*, **148**:1 (2007), 12–34. [13] S. Albeverio, S. V. Kozyrev, *P-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **2**:4 (2010), 265–277. [14] Yu. A. Farkov, *Facta Univers. Ser.: Elec. Energ.*, **21**:3 (2008), 309–325. [15] Б. М. Макаров, А. Н. Подкорытов, *Лекции по вещественному анализу*, БХВ-Петербург, СПб., 2011.

И. Я. Новиков

Воронежский государственный университет

E-mail: igor.nvkv@gmail.com

Поступило

04.12.2011

М. А. Скопина

Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail: skopina@MS1167.spb.edu