Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. З. Шаваровский, О некоторых “ручных” и “диких” аспектах проблемы полускалярной эквивалентности многочленных матриц, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 1, 119–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm94>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 08:56:56

УДК 512.64

О НЕКОТОРЫХ “РУЧНЫХ” И “ДИКИХ” АСПЕКТАХ ПРОБЛЕМЫ ПОЛУСКАЛЯРНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МНОГОЧЛЕННЫХ МАТРИЦ

Б. З. Шаваровский

Исследуется задача приведения многочленных матриц к каноническому виду посредством полускалярно эквивалентных преобразований, которая в целом является дикой. Однако в отдельных случаях она ручная. В работе выделены некоторые классы многочленных матриц, для которых указываются канонические формы относительно полускалярной эквивалентности. На этом основании строится каноническая форма для соответствующих многочленным матрицам наборов коэффициентов. Последняя дает возможность решать задачу классификации наборов числовых матриц с точностью до подобия.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. В настоящей статье исследуются отдельные классы многочленных матриц в связи с их приводимостью полускалярно эквивалентными преобразованиями к каноническому виду. В общем случае это представляется довольно сложной задачей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (см. [1] или [2, § 1, р. IV]). Многочленные матрицы $A(x)$ и $B(x)$ называются *полускалярно эквивалентными*, если существуют такие обратимые матрицы L и $R(x)$, соответственно числовая и многочленная, что $B(x) = LA(x)R(x)$. При этом преобразование матрицы $A(x)$ в матрицу $B(x)$ называется *полускалярно эквивалентным*.

П. С. Казимирским и В. М. Петричковичем в работе [1] (см. также [2]) предложена треугольная форма с инвариантными многочленами на главной диагонали, к которой приводится каждая неособенная многочленная матрица посредством полускалярно эквивалентных преобразований. Однако последняя определяется с достаточно большой неопределенностью. Стало быть, ее необходимо доопределить до канонической. Но эта задача оказалась дикой. Неформальное разделение всех задач на ручные (допускающие классификацию) и дикие (содержащие в себе классическую задачу о паре матриц) проводится уже давно. Формальное же определение ручных и диких задач (пределяющее этим терминам строгий смысл) восходит к [3], [4]. Точнее, предлагаемое в [4] определение фактически является некоторой модификацией определения, которое впервые предложено в [3] для представлений конечномерных алгебр.

Имеется обширная литература, в которой решение многих классификационных задач является следствием решения (возможно, при некоторых ограничениях) задачи о каноническом виде пары матриц над полем относительно одновременного преобразования

подобия. С другой стороны, полученные результаты во многих областях, в частности, в теории представлений различных объектов, применяется для классификации отдельных типов пар матриц с точностью до подобия. Отметим в данной связи работы [5]–[13].

Общая схема применения полускалярной эквивалентности некоторых классов многочленных матриц к исследованию подобия соответствующих наборов числовых матриц в настоящей работе следующая. Для набора матриц строится многочленная матрица. Последняя полускалярно эквивалентными преобразованиями приводится к некоторому стандартному виду. Если полученная матрица единственная, то она может считаться канонической, а поэтому рассматриваемая задача является ручной. Тогда для исходного набора матриц по определенному правилу на основании канонической матрицы в классе полускалярно эквивалентных находим единственный набор числовых матриц, который можем рассматривать как канонический в классе подобных. В других случаях многочленная матрица стандартного вида определяется со значительной степенью неопределенности и, как правило, с точностью до подобия некоторого набора матриц (правда, меньшего, нежели исходный, порядка). В этом случае наша задача является дикой. Положительным моментом здесь, по-видимому, является именно то, что задача о подобии наборов матриц сводится к аналогичной задаче для матриц меньшего размера.

Приведенные в заключение примеры построения канонической формы для набора матриц согласно предлагаемой в статье схеме свидетельствует об эффективности применения полученных результатов.

Мы рассматриваем кольцо квадратных матриц фиксированного порядка над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ и многочлены (скалярной) переменной x над этим кольцом – матричные многочлены. Матричный многочлен называется *регулярным* (*антирегулярным*), если его старший (младший) коэффициент является неособенной матрицей. Поскольку матричный многочлен можно записать в виде матрицы с элементами из кольца многочленов над $\mathbb{C}$ переменной x – многочленной матрицы, далее эти объекты мы не будем различать. Поэтому все понятия, связанные с матричным многочленом (степень, старший и младший члены, коэффициенты, регулярность, антирегулярность и другие) естественно переносятся и на многочленные матрицы.

Единичную и квадратную нулевую матрицы порядка l будем обозначать соответственно E_l и 0_l . Однако индекс иногда опускается, если из контекста понятно, о какой матрице идет речь. Тогда 0 будет означать также и прямоугольную нулевую матрицу надлежащего размера. Под производной произвольной прямоугольной многочленной матрицы $G(x)$, как обычно, понимают матрицу $G^{(1)}(x)$, состоящую из производных ее элементов. Запись $G^{(r)}(x)$ будет означать r -ю производную матрицы $G(x)$. Следуя [2], значением многочленной матрицы $G(x)$ на системе корней многочлена $\varphi(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \dots (x - \alpha_m)^{k_m}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, назовем числовую матрицу вида

$$M_{G(x)}\varphi(x) = \left\| \begin{array}{c} H_1 \\ \vdots \\ H_m \end{array} \right\|, \quad H_i = \left\| \begin{array}{c} G(\alpha_i) \\ G^{(1)}(\alpha_i) \\ \vdots \\ G^{(k_i-1)}(\alpha_i) \end{array} \right\|, \quad i = 1, \dots, m.$$

Иногда матрицу $M_{G(x)}(\varphi(x))$ обозначают $M_{G(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \dots, \alpha_m^{(k_m)}]$. Запись $G_*(x)$ всегда будет означать взаимную (присоединенную) к матрице $G(x)$, если последняя квадратная.

Приведем далее в удобном для нас виде некоторые теоремы и предложения, которые используются в нашей работе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [2, § 2, р. II, предложения 4, 6]). Если L и $R(x)$ – обратимые матрицы соответственно над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}[x]$ и $\varphi(x), \psi(x) \in \mathbb{C}[x]$, то имеют место равенства:

- i) $\text{rang } M_{R(x)G(x)L}(\varphi(x)) = \text{rang } M_{G(x)}(\varphi(x));$
- ii) $\text{rang } M_{G(x)\psi(x)}(\varphi(x)\psi(x)) = \text{rang } M_{G(x)}(\varphi(x)).$

ТЕОРЕМА 1 (см. [2, § 2, р. III, теорема 3]). Пусть $A(x)$ – многочленная матрица порядка n , $\Delta(x) = \det A(x)$, $\deg \Delta(x) = ns$. Для существования матрицы $R(x) \in GL(n, \mathbb{C}[x])$ такой, что произведение $A(x)R(x)$ является регулярной многочленной матрицей, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\text{rang } M_{A_*(x) \| E \ x E \dots x^{s-1} E \|}(\Delta(x)) = ns.$$

ТЕОРЕМА 2 (см. [2, § 3, р. III, теоремы 2, 3]). Пусть $A(x)$ – многочленная матрица порядка n , $\varphi(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \dots (x - \alpha_p)^{k_p}$ – делитель характеристического многочлена $\Delta(x) = \det A(x)$, заданный своим каноническим разложением, причем $\deg \varphi(x) = k_1 + \dots + k_p = nr$. Если

$$\text{rang } M_{A_*(x) \| E \ x E \dots x^{r-1} E \|}(\varphi(x)) = nr,$$

то существует разложение $A(x) = P(x)\Omega(x)$, где $P(x) = E_n x^r - P_1 x^{r-1} - \dots - P_r$, $\det P(x) = \varphi(x)$, причем матричные коэффициенты $P_1, \dots, P_r$ можно найти в виде решений линейного матричного уравнения

$$M_{A_*(x) \| E \ x E \dots x^{r-1} E \|}[\alpha_1^{(k_1)}, \dots, \alpha_p^{(k_p)}] \begin{pmatrix} X_r \\ \vdots \\ X_1 \end{pmatrix} = M_{x^r A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \dots, \alpha_p^{(k_p)}].$$

Делитель $P(x)$ матрицы $A(x)$ делителем $\varphi(x)$ ее характеристического многочлена определяется однозначно.

ТЕОРЕМА 3 (см. [2, § 1, р. IV, теорема 1]). Неособенная многочленная матрица $A(x)$ порядка n полускалярно эквивалентна матрице вида

$$LA(x)R(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_n(x) \end{pmatrix}, \quad (*)$$

где $\varepsilon_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, – инвариантные многочлены матрицы $A(x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (см. [2, § 1, р. IV, следствие 2]). Унитарные многочленные матрицы $A(x)$ и $B(x)$ (старшие коэффициенты – единичные матрицы) подобны тогда и только тогда, когда их треугольные формы $(*)$ полускалярно эквивалентны.

2. Полускалярная эквивалентность отдельных классов многочленных матриц. Содержанием данного раздела является доказательство трех теорем. Первая из них

ТЕОРЕМА 4. Пусть регулярная многочленная матрица $A(x)$ порядка n и степени s имеет форму Смита вида

$$\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_k, \varphi(x), \dots, \varphi(x)), \quad k \geq 1, \quad (1)$$

причем числа s , n и k удовлетворяют условию $n = k(s + 1)$. Тогда матрица $A(x)$ полускалярно эквивалентна матрице вида

$$F(x) = \left\| \begin{array}{cccc} E_k & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ f_1(x)E_k & \varphi(x)E_k & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_s(x)E_k & \mathbf{0} & \dots & \varphi(x)E_k \end{array} \right\|, \quad (2)$$

где $\deg f_i(x) < \deg \varphi(x) = s + 1$, причем для некоторого расположения $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s$ всех (с учетом кратностей) корней многочлена $\varphi(x)$ такого, что равные корни расположены подряд, выполняются условия

$$f_i(\alpha_0) = 0, \quad f_i^{(r_i)}(\alpha_i) = 1, \quad f_m^{(r_i)}(\alpha_i) = 0, \quad (3)$$

если $\alpha_i = \dots \alpha_{i-r_i}$, $\alpha_i \neq \alpha_{i-r_i-1}$, $i = 1, \dots, s$, $m = 1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, s$. При фиксированном расположении корней многочлена $\varphi(x)$ матрица $F(x)$ определяется однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование. Поскольку на основании теоремы 3 произвольную неособенную многочленную матрицу полускалярно эквивалентными преобразованиями можно привести к нижнему треугольному виду с инвариантными многочленами на главной диагонали, то на самом деле, учитывая вид (1) формы Смита, матрицу $A(x)$ можно привести к виду

$$\left\| \begin{array}{c|ccc} E_k & 0 & \dots & 0 \\ \hline A_1(x) & \varphi(x)E_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_s(x) & 0 & \dots & \varphi(x)E_k \end{array} \right\|, \quad (4)$$

где все $A_i(x) - (k \times k)$ -блоки, $\deg A_i(x) < \deg \varphi(x) = s + 1$ и для произвольно фиксированного корня α_0 инвариантного многочлена $\varphi(x)$ имеем $A_i(\alpha_0) = 0_k$, $i = 1, \dots, s$. Обозначим через $\bar{A}(x)$ левую нижнюю часть матрицы (4). Если α_0 - кратный корень многочлена $\varphi(x)$, то ранг матрицы $\bar{A}^{(1)}(\alpha_0)$ максимален, т.е. $\text{rang } \bar{A}^{(1)}(\alpha_0) = k$. Действительно, в противном случае

$$\begin{aligned} & \text{rang } M_{A_*(x)} \| E x E \dots x^{s-1} E \| ((\varphi(x))^{ks}) \\ &= \text{rang } M \| \bar{A}(x) E_{n-k} \| \| E x E \dots x^{s-1} E \| (\varphi(x)) < sn, \end{aligned}$$

что противоречит теореме 1. По той же причине $\text{rang } \bar{A}(\alpha_1) = k$ для некоторого (фиксированного) корня $\alpha_1 \neq \alpha_0$ многочлена $\varphi(x)$ в случае, когда корень α_0 простой. В обоих случаях в матрице $\bar{A}(x)$ можно выбрать $(k \times k)$ -подматрицу $B_1(x)$ такую, что

$\det B_1^{(1)}(\alpha_0) \neq 0$, если α_0 является кратным корнем, и $\det B_1(\alpha_1) \neq 0$ для фиксированного корня $\alpha_1 \neq \alpha_0$ многочлена $\varphi(x)$, если α_0 простой корень. Перестановкой строк и столбцов можем достичь того, что матрица $B_1(x)$ займет место матрицы $A_1(x)$ и мы можем считать, что на самом деле $B_1(x) = A_1(x)$. Далее, скалярно эквивалентными преобразованиями последних $n - k$ строк и соответствующими преобразованиями столбцов приводим матрицу (4) к матрице того же вида, в которой $A_1^{(1)}(\alpha_0) = E_k$, $A_2^{(1)}(\alpha_0) = \dots = A_s^{(1)}(\alpha_0) = 0_k$, если α_0 – кратный корень и $A_1(\alpha_1) = E_k$, $A_2(\alpha_1) = \dots = A_s(\alpha_1) = 0_k$ для фиксированного корня $\alpha_1 \neq \alpha_0$ многочлена $\varphi(x)$, если α_0 – простой корень этого многочлена.

Допустим по индукции, что мы уже привели исходную матрицу к виду (4), где для некоторых корней $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}$ ($q < s + 1$) многочлена $\varphi(x)$, расположенных так, что равные корни идут подряд, выполняются условия

$$A_i(\alpha_0) = 0_k, \quad i = 1, \dots, s, \quad A_j^{(r_j)}(\alpha_j) = E_k, \quad A_m^{(r_j)}(\alpha_j) = 0_k,$$

если $\alpha_j = \dots = \alpha_{j-r_j}$, $\alpha_j \neq \alpha_{j-r_j-1}$, $j = 1, \dots, q - 1$, $m = 1, \dots, j - 1, j + 1, \dots, s$.

Фиксируем, далее, корень α_q так, что $\alpha_q = \alpha_{q-1}$, если в расположении $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}$ еще не использованы все корни, равные α_{q-1} , и α_q – произвольный из оставшихся корней многочлена $\varphi(x)$ в противном случае. Повторным применением теоремы 1 методом от противного нетрудно убедиться в том, что часть матрицы (4), состоящая из блоков $A_q(x), \dots, A_s(x)$, содержит такие k строк, что матрица $B_q(x)$ из этих строк удовлетворяет условию $\det B_q^{(r_{q-1}+1)}(\alpha_q) \neq 0$, если $\alpha_q = \alpha_{q-1}$, и $\det B_q(\alpha_q) \neq 0$, если $\alpha_q \neq \alpha_{q-1}$. Опять без потери общности можем считать, что $B_q(x) = A_q(x)$. Поэтому, не нарушая уже приобретенных блоками $A_1(x), \dots, A_{q-1}(x)$ свойств, скалярно эквивалентными преобразованиями приведем матрицу (4) к матрице того же вида, в которой $A_q^{(r_{q-1}+1)}(\alpha_q) = E_k$, $A_m^{(r_{q-1}+1)}(\alpha_q) = 0_k$, если $\alpha_q = \alpha_{q-1}$, и $A_q(\alpha_q) = E_k$, $A_m(\alpha_q) = 0_k$, если $\alpha_q \neq \alpha_{q-1}$, $m = 1, \dots, q - 1, q + 1, \dots, s$.

Приведенные рассуждения индуктивно доказывают приводимость матрицы $A(x)$ к матрице вида (4), в которой для всех корней $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s$ инвариантного многочлена $\varphi(x)$, расположенных так, что равные корни следуют подряд, выполняются условия

$$A_i(\alpha_0) = 0_k, \quad A_i^{(r_i)}(\alpha_i) = E_k, \quad A_m^{(r_i)}(\alpha_i) = 0_k, \\ i = 1, \dots, s, \quad m = 1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, s,$$

если $\alpha_i = \dots = \alpha_{i-r_i}$, $\alpha_i \neq \alpha_{i-r_i-1}$. Поскольку $\deg A_i(x) \leq s$, то $A_i(x) = f_i(x)E_k$, $i = 1, \dots, s$, и на самом деле матрица (4) имеет вид (2) и свойства (3).

Единственность очевидна, поскольку каждый из многочленов $f_i(x)$, $i = 1, \dots, s$, имеет степень меньшую, чем степень многочлена $\varphi(x)$ и фиксированные значения на всех (с учетом кратностей) корнях этого многочлена. Теорема доказана полностью.

Треугольный с инвариантными многочленами на главной диагонали вид (2) матрицы $F(x)$, достаточно простые условия (3), которым удовлетворяют многочлены $f_i(x)$, и, самое главное, единственность этой матрицы с точностью до нумерации многочленов $f_i(x)$ при фиксированном выборе корня α_0 многочлена $\varphi(x)$ дают все основания считать такую матрицу канонической. Поэтому введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Многочленная матрица $F(x)$ вида (2), удовлетворяющая условиям (3), называется *канонической* (с заданным расположением корней инвариантного многочлена $\varphi(x)$) в классе полускалярно эквивалентных.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для полускалярной эквивалентности многочленных матриц, удовлетворяющих условиям теоремы 4, необходимо и достаточно совпадение их канонических форм с тем же расположением корней инвариантного многочлена $\varphi(x)$.

Таким образом, задача о полускалярной эквивалентности многочленных матриц из рассматриваемого класса является ручной. Следовательно, полученный здесь результат можно применить к решению задачи о подобии соответствующего класса наборов матриц. А именно, имеет место

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть имеются наборы

$$(A_1, \dots, A_s), \quad (D_1, \dots, D_s) \quad (5)$$

из s числовых матриц порядка n , причем соответствующие им многочленные матрицы

$$A(x) = E_n x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s, \quad D(x) = E_n x^s + D_1 x^{s-1} + \dots + D_s \quad (5')$$

имеют формы Смита вида (1) с k единичными инвариантными многочленами. Если $n = k(s+1)$, то для подобия наборов (5) необходимо и достаточно совпадение канонических форм матриц $A(x)$, $D(x)$ (в смысле определения 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко получить на основании предложения 2.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для подобия наборов числовых матриц (5), удовлетворяющих условиям следствия 2, необходимо и достаточно совпадение форм Смита соответствующих им многочленных матриц $A(x)$, $D(x)$ (5').

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условий очевидна.

Достаточность следует из того, что многочлены $f_i(x)$, $i = 1, \dots, s$, в матрице (2) при фиксированном выборе корня α_0 однозначно (с точностью до нумерации) определяются по инвариантному многочлену $\varphi(x)$ этой матрицы.

ТЕОРЕМА 5. Регулярная многочленная матрица $A(x)$ степени s ($s \geq 2$) четного порядка $n = 2k$ с формой Смита вида

$$\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{\varphi(x), \dots, \varphi(x)}_k), \quad (6)$$

где инвариантный многочлен $\varphi(x)$ имеет только один корень (без ограничения общности можем считать его нулевым) полускалярно эквивалентна матрице вида

$$\left\| \begin{array}{cc} E_k & 0_k \\ B(x) & x^{2s} E_k \end{array} \right\|, \quad (7)$$

где $B(x)$ — $(k \times k)$ -блок, $\deg B(x) < 2s$, $B(0) = 0_k$ и степень t младшего члена многочленной матрицы

$$B(x) = B_m x^m + B_{m+1} x^{m+1} + \dots + B_{2s-1} x^{2s-1}, \quad B_m \neq 0_k,$$

удовлетворяет условию $1 \leq m \leq s$. Если матрица $B(x)$ антирегулярная, т.е. $\det B_m \neq 0$, то можно считать, что $B_m = E_k$, $B_{2m} = 0_k$. При этом матрица (7) определяется с точностью до подобия набора числовых матриц $(B_{m+1}, \dots, B_{2s-1})$ порядка k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Существование.* Приводимость матрицы $A(x)$ полускалярно эквивалентными преобразованиями к виду (7), где блок $B(x)$ имеет нужную степень и обращается в нуль при подстановке $x = 0$, нетрудно видеть, принимая во внимание вид (6) формы Смита и теорему 3. Следовательно, для степени m младшего члена многочленной матрицы $B(x)$ имеем $m \geq 1$. Учитывая предложение 1, на основании теоремы 1 получаем, что значение матрицы

$$\| B(x) \ E_k \| \| E_n \ xE_n \ \dots \ x^{s-1} E_n \|$$

на системе корней многочлена x^s имеет полный ранг. Поэтому, если записать $B(x)$ в виде $B(x) = B_1x + B_2x^2 + \dots + B_{2s-1}x^{2s-1}$, не пропуская и члены с нулевыми коэффициентами, мы получим, что матрица

$$\left\| \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_s \\ B_2 & B_3 & \dots & B_{s+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_s & B_{s+1} & \dots & B_{2s-1} \end{array} \right\|$$

также имеет полный ранг. Из этого вытекает неравенство $m \leq s$. Очевидно, в случае антирегулярности матрицы $B(x)$ ее младший коэффициент можем считать равным E_k : $B(x) = E_kx^m + B_{m+1}x^{m+1} + \dots + B_{2s-1}x^{2s-1}$.

Если $m = s$, то первая часть теоремы уже доказана, поскольку $\deg B(x) < 2s$. Следовательно, член степени $2m$ в многочленной матрице $B(x)$ отсутствует. Поэтому рассмотрим случай, когда $m < s$. По коэффициентам $B_{m+1}, \dots, B_{2s-1}$ матрицы $B(x)$ построим $(k \times k)$ -матрицы $C_{m+1}, \dots, C_{2s-1}$, положив

$$C_{m+1} = B_{m+1}, \quad \dots, \quad C_{2m-1} = B_{2m-1}, \quad C_{2m} = 0_k,$$

а далее по рекуррентным формулам

$$C_{2m+1} = B_{2m+1} - \| E_k \ C_{m+1} \| [B_{2m} \otimes B_{2m}] \left\| \begin{array}{c} B_{m+1} \\ E_k \end{array} \right\|,$$

$$C_{2m+2} = B_{2m+2} - \| E_k \ C_{m+1} \ C_{m+2} \| [B_{2m} \otimes B_{2m} \otimes B_{2m}] \left\| \begin{array}{c} B_{m+2} \\ B_{m+1} \\ E_k \end{array} \right\|,$$

.....

$$C_{2s-1} = B_{2s-1} - \| E_k \ C_{m+1} \ \dots \ C_{2s-m-1} \| \underbrace{[B_{2m} \otimes \dots \otimes B_{2m}]}_{2(s-m)} \left\| \begin{array}{c} B_{2s-m-1} \\ \vdots \\ B_{m+1} \\ E_k \end{array} \right\|.$$

Затем построим многочленную матрицу

$$C(x) = E_kx^m + C_{m+1}x^{m+1} + \dots + C_{2s-1}x^{2s-1}$$

и покажем, что матрица (7) полускалярно эквивалентна матрице

$$\left\| \begin{array}{cc} E_k & 0_k \\ C(x) & x^{2s}E_k \end{array} \right\|, \quad (8)$$

имеющей требуемые вид и свойства.

В этом легко убедиться, если умножить матрицу (7) слева на матрицу

$$S = \begin{vmatrix} E_k & B_{2m} \\ 0_k & E_k \end{vmatrix},$$

а матрицу (8) – справа на матрицу

$$R(x) = \begin{vmatrix} R_{11}(x) & R_{12}(x) \\ R_{21}(x) & R_{22}(x) \end{vmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} R_{11}(x) &= E_k + B_{2m}B(x), & R_{12}(x) &= x^{2s}B_{2m}, & R_{22}(x) &= E_k - C(x)B_{2m}, \\ R_{21}(x) &= \frac{(B(x) - C(x) - C(x)B_{2m}B(x))}{x^{2s}} \end{aligned}$$

(B_{2m} – коэффициент при x^{2s} матрицы $B(x)$ из (7)). Заметим, что $R_{21}(x) \in M_k(\mathbb{C}[x])$, поскольку имеет место конгруэнция

$$B(x) - C(x) - C(x)B_{2m}B(x) \equiv 0_k \pmod{x^{2s}},$$

и, более того, $R(x) \in GL(n, \mathbb{C}[x])$. Этим первая часть теоремы доказана.

Единственность. Из полускалярной эквивалентности произвольных матриц (7) и (8), в которых $B(0) = C(0) = 0_k$, следует существование для их блоков $B(x)$ и $C(x)$ таких числовых $(k \times k)$ -матриц $S_1, S_2, S_3, \det S_1 \neq 0, \det S_2 \neq 0$, что выполняется конгруэнция

$$S_2B(x) - C(x)S_1 - C(x)S_3B(x) \equiv 0_k \pmod{x^{2s}}. \quad (9)$$

Из последней получаем, что степени и ранги коэффициентов младших членов многочленных матриц $B(x)$ и $C(x)$ соответственно совпадают. Более того, если $B_{2m} = C_{2m} = 0_k$, то сравнивая коэффициенты при x^m и x^{2m} в конгруэнции (9), получаем $S_1 = S_2$ и $S_3 = 0_k$. Следовательно, $S_1B(x)S_1^{-1} = C(x)$ и теорема доказана полностью.

Как видно из доказанной теоремы, в случае $s > 2$ приведение матрицы $A(x)$ к простейшему виду (дальнейшее упрощение матрицы (7)) содержит задачу о подобии наборов числовых матриц. Поэтому в этом случае наша задача дикая. Кроме того, важно отметить, что посредством теоремы 5 вопрос о подобии набора матриц можно свести к вопросу о подобии набора коэффициентов многочленной матрицы $B(x)$ из (7) вдвое меньшего порядка.

В случае, когда матрица $A(x)$ квадратичная ($s = 2$), а матрица $B(x)$ в (7) антирегулярная, последняя содержит только один еще незафиксированный коэффициент – старший. Сделав его подобными преобразованиями жордановой матрицей, мы, не нарушая вида (7) и приобретенных уже свойств, получим матрицу, которую можем считать канонической. Дадим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Матрица вида

$$F(x) = \begin{vmatrix} E_k & 0_k \\ B(x) & x^4E_k \end{vmatrix},$$

где $B(x) = E_kx + Jx^3$ или $B(x) = E_kx^2 + Jx^3$, J – жорданова матрица, называется *канонической*.

Следовательно, наша задача в случае $s = 2$ ручная и мы можем применить полученный результат к решению задачи подобия пар матриц.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для подобия многочленных матриц

$$A(x) = E_n x^2 + A_1 x + A_2, \quad D(x) = E_n x^2 + D_1 x + D_2$$

(или пар матриц $(A_1, A_2), (D_1, D_2)$), удовлетворяющих условиям теоремы 5, необходимо и достаточно совпадение их канонических форм в классе полускалярно эквивалентных матриц в смысле определения 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО становится очевидным, приняв во внимание предложение 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теореме 5 одним из существенных предположений, кроме вида (6) формы Смита и наличия единственного характеристического корня, является антирегулярность блока $B(x)$ матрицы (7), к которой приводится матрица $A(x)$ применением полускалярно эквивалентных преобразований. Возникает вопрос: можно ли проверить соответствие матрицы $A(x)$ указанному требованию априори, т.е. без приведения ее к виду (7)? Ответ положительный. Необходимым и достаточным условием этого является “скачок” ранга матрицы $M_{A_*(x)/x^{s(k-1)}}(x^r)$ от k при $r = 1, \dots, m$ до $2k$ при $r = m+1$, $1 \leq m \leq s$.

Выше мы рассматривали многочленные матрицы, имеющие лишь два различных инвариантных многочлена. Обратимся теперь к матрицам с тремя различными инвариантными многочленами.

ТЕОРЕМА 6. Регулярная многочленная матрица $A(x)$ порядка n и степени s с формой Смита вида

$$\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_k, \varphi_1(x), \dots, \varphi_1(x), \underbrace{\varphi_2(x), \dots, \varphi_2(x)}_k),$$

где инвариантный многочлен $\varphi_2(x)$ имеет степень $2s$ и лишь один корень (не уменьшая общности, будем считать его нулевым), полускалярно эквивалентна матрице вида

$$\begin{pmatrix} E_k & 0 & 0 \\ A(x) & x^s E_{n-2k} & 0 \\ C(x) & B(x) & x^{2s} E_k \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $\deg A(x) < s$, $\deg B(x) < 2s$, $\deg C(x) < 2s$; x делит $A(x)$ и $C(x)$; x^{s+1} делит $B(x)$. Если к тому многочленная матрица $C(x) = C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_{2s-1} x^{2s-1}$ антирегулярная со степенью младшего члена равной 1, т.е. $\det C_1 \neq 0$, то можно считать, что $C_1 = E_k$, $C_2 = 0_k$; x^2 делит $A(x)$; x^{s+2} делит $B(x)$ и матрица (10) определяется с точностью до подобия с матрицей преобразования вида $S_1 \otimes S_2 \otimes S_1$, где $S_1 \in GL(k, \mathbb{C})$, $S_2 \in GL(n - 2k, \mathbb{C})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование. Приводимость матрицы $A(x)$ к виду

$$\begin{pmatrix} E_k & 0 & 0 \\ A_0(x) & x^s E_{n-2k} & 0 \\ C_0(x) & B_0(x) & x^{2s} E_k \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где $\deg A_0(x) < s$, $\deg C_0(x) < 2s$ и x делит $A_0(x)$, $C_0(x)$, а x^{s+1} делит $B_0(x)$, не вызывает сомнений ввиду теоремы 3. Если многочленная матрица $C_0(x)$ антирегулярная

со степенью младшего члена равной 1, то можем считать ее младший коэффициент равным E_k .

Обозначив

A_{01} – коэффициент при x матрицы $A_0(x)$;

$B_{0,s+1}$ – коэффициент при x^{s+1} матрицы $B_0(x)$;

C_{02} – коэффициент при x^2 матрицы $C_0(x)$,

и положив

$$\begin{aligned} S_{11} = S_{33} = E_k, \quad S_{22} = E_{n-2k}, \quad S_{12} = B_{0,s+1}, \\ S_{23} = -A_{01}, \quad S_{13} = C_{02} - B_{0,s+1}A_{01} \end{aligned}$$

из системы конгруэнций

$$\left\{ \begin{aligned} &S_{22}A_0(x) + S_{23}C_0(x) - A(x)(S_{11} + S_{12}A_0(x) + S_{13}C_0(x)) \equiv 0 \pmod{x^s}, \\ &S_{33}B_0(x) - C(x)(S_{12}x^s + S_{13}B_0(x)) - B(x)\left(S_{22} + S_{23}\frac{B_0(x)}{x^s} \right. \\ &\quad \left. - A(x)\left(S_{12} + S_{13}\frac{B_0(x)}{x^s}\right)\right) \equiv 0 \pmod{x^{2s}}, \\ &S_{33}C_0(x) - C(x)(S_{11} + S_{12}A_0(x) + S_{13}C_0(x)) \\ &\quad - B(x)\frac{S_{22}A_0(x) + S_{23}C_0(x) - A(x)(S_{11} + S_{12}A_0(x) + S_{13}C_0(x))}{x^s} \equiv 0 \pmod{x^{2s}}, \end{aligned} \right. \quad (12)$$

методом неопределенных коэффициентов однозначно определяем многочленные матрицы

$$\begin{aligned} A(x) = A_2x^2 + \dots + A_{s-1}x^{s-1}, \quad B(x) = B_{s+2}x^{s+2} + \dots + B_{2s-1}x^{2s-1}, \\ C(x) = E_kx + C_3x^3 + \dots + C_{2s-1}x^{2s-1}. \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости равенства

$$\begin{aligned} &\left\| \begin{matrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ 0 & S_{22} & S_{23} \\ 0 & 0 & S_{33} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} E_k & 0 & 0 \\ A_0(x) & x^s E_{n-2k} & 0 \\ C_0(x) & B_0(x) & x^{2s} E_k \end{matrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{matrix} E_k & 0 & 0 \\ A(x) & x^s E_{n-2k} & 0 \\ C(x) & B(x) & x^{2s} E_k \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} R_{11}(x) & R_{12}(x) & R_{13}(x) \\ R_{21}(x) & R_{22}(x) & R_{23}(x) \\ R_{31}(x) & R_{32}(x) & R_{33}(x) \end{matrix} \right\|, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} R_{11}(x) &= S_{11} + S_{12}A_0(x) + S_{13}C_0(x), \\ R_{12}(x) &= S_{12}x^s + S_{13}B_0(x), \quad R_{13}(x) = S_{13}x^{2s}, \quad R_{21}(x) = \frac{L_1(x)}{x^s}, \\ R_{22}(x) &= S_{22} + S_{23}\frac{B_0(x)}{x^s} - A(x)\left(S_{12} + S_{13}\frac{B_0(x)}{x^s}\right), \\ R_{23}(x) &= S_{23}x^s - A(x)S_{13}x^s, \quad R_{31}(x) = \frac{L_2(x)}{x^{2s}}, \quad R_{32}(x) = \frac{L_3(x)}{x^{2s}}, \end{aligned}$$

$$R_{33}(x) = S_{33} - C(x)S_{13} - \frac{B(x)}{x^s}(S_{23} - A(x)S_{13}),$$

где $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$ – левые части соответственно первой, второй и третьей конгруэнций системы (12). Очевидно, блочная матрица $\|R_{ij}(x)\|_1^3$ обратимая. Следовательно, равенство (13) означает, что матрица (11) полускалярно эквивалентна матрице (10) с требуемыми в теореме условиями.

Единственность. Если, кроме матрицы (10), существует некоторая другая матрица (11), обладающая указанными в теореме свойствами, то из их полускалярной эквивалентности следует выполнение равенства (13), где $\det S_{11}$, $\det S_{22}$, $\det S_{33} \neq 0$, и матрица $\|R_{ij}(x)\|_1^3$ обратимая. Последнее влечет за собой выполнение конгруэнций (12). Сравнивая в обеих частях первого из них коэффициенты при x , второго – коэффициенты при x^{s+1} и третьего – коэффициенты при x и x^2 , получаем, что $S_{12} = 0$, $S_{23} = 0$ и $S_{11} = S_{33}$, $S_{13} = 0$. Следовательно, $\|R_{ij}(x)\|_1^3 = S_{11} \otimes S_{22} \otimes S_{11}$ и теорема доказана полностью.

Как видно из доказанной теоремы, матрица (10) определяется, кроме всего, с точностью до подобия блока $C(x)$. Если $s > 2$, то многочленная матрица $C(x)$ содержит в общем больше двух неопределенных коэффициентов. Поэтому задача полускалярной эквивалентности в этом случае является дикой. Если же $s = 2$, то в матрице (10) $A(x) \equiv 0$, $B(x) \equiv 0$ и ее можно доопределить до канонической. Таким образом, этот случай ручной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Многочленная матрица вида

$$F(x) = \left\| \begin{array}{ccc} E_k & 0 & 0 \\ 0 & x^2 E_{n-2k} & 0 \\ C(x) & 0 & x^4 E_k \end{array} \right\|, \quad (14)$$

где $C(x) = Ex + Jx^3$, J – жорданова матрица, называется *канонической*.

СЛЕДСТВИЕ 5. Регулярная многочленная матрица $A(x)$ степени $s = 2$, удовлетворяющая условиям теоремы 6, полускалярно эквивалентна матрице канонической формы (14). Последняя определяется однозначно.

СЛЕДСТВИЕ 6. Необходимым и достаточным условием подобия многочленных матриц

$$A(x) = E_n x^2 + A_1 x + A_2, \quad D(x) = E_n x^2 + D_1 x + D_2$$

(или пар матриц (A_1, A_2) , (D_1, D_2)), удовлетворяющих условиям теоремы 6, является совпадение их канонических форм в классе полускалярно эквивалентных в смысле определения 3.

3. Каноническая форма отдельных классов наборов матриц относительно преобразования подобия. Следствие 2 (4, 6) дает критерий подобия наборов (пар) матриц, если соответствующие им многочленные матрицы принадлежат выделяемому предположениями теоремы 4 (5, 6) классу. Таким критерием является совпадение канонических форм в смысле определения 1 (2, 3) соответствующих наборам (парам) многочленных матриц в классе полускалярно эквивалентных. Однако для классификации наборов матриц необходимо установить каноническую форму набора относительно преобразования подобия. Это цель настоящего раздела.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Набор матриц $(A_{10}, \dots, A_{s0})$ называется *каноническим для набора* $(A_1, \dots, A_s)$ в классе подобных, если он удовлетворяет равенству

$$\left(M_{F_*(x)} \| E x E \dots x^{s-1} E \| (\Delta(x)) \right) \begin{pmatrix} A_{s0} \\ \vdots \\ A_{10} \end{pmatrix} = -M_{x^s F_*(x)}(\Delta(x)), \quad (15)$$

где $F(x)$ – каноническая форма многочленной матрицы

$$A(x) = E_n x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s$$

в классе полускалярно эквивалентных в смысле определения 1 (2, 3), $\Delta(x) = \det A(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Очевидно, если многочлен $\Delta(x)$ имеет не меньше двух различных корней, то при построении значений матриц на системе его корней в обеих частях равенства (15) необходимо придерживаться одной и той же нумерации его корней.

Остается доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 7. Для набора $(A_1, \dots, A_s)$ существует единственный канонический набор $(A_{10}, \dots, A_{s0})$ в смысле определения 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование и единственность канонического набора $(A_{10}, \dots, A_{s0})$ следуют из теоремы 2, поскольку

$$\text{rang } M_{F_*(x)} \| E x E \dots x^{s-1} E \| (\Delta(x)) = sn,$$

а подобие его исходному набору $(A_1, \dots, A_s)$ – из предложения 2.

Для практического построения канонической формы набора матриц достаточно использовать равенство (15), рассматривая его как уравнение относительно неизвестных $A_{10}, \dots, A_{s0}$.

4. Примеры. Приведем по одному числовому примеру для каждого из трех рассмотренных в работе классов наборов (пар) матриц.

ПРИМЕР 1. Пусть имеется набор матриц

$$(A_1, A_2, A_3) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right).$$

Ему соответствует многочленная матрица

$$A(x) = E_4 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = \begin{pmatrix} x^3 - x & 1 & x - 1 & x^2 - 1 \\ 0 & x^3 - x^2 - 2x & 0 & 0 \\ 0 & x^2 - 2x & x^3 - 3x^2 + 2x & 0 \\ 0 & x - 2 & x^2 - 3x + 2 & x^3 - 2x^2 - x + 2 \end{pmatrix}$$

с формой Смита $\text{diag}(1, \varphi(x), \varphi(x), \varphi(x))$, где $\varphi(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$. Полускалярно эквивалентными преобразованиями матрица $A(x)$ приводится к канонической форме

$$F(x) = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x & x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x & 0 & x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x & 0 \\ \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x & 0 & 0 & x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x \end{array} \right\|$$

при следующем расположении корней инвариантного многочлена $\varphi(x)$: 0; 1; -1; 2 (см. определение 1). Определяемая уравнением (15) каноническая форма (A_{10}, A_{20}, A_{30}) набора (A_1, A_2, A_3) имеет вид

$$(A_{10}, A_{20}, A_{30}) = \left(\left\| \begin{array}{cccc} -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{cccc} -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{cccc} 2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \right).$$

В двух последующих примерах приведем только исходную пару (A_1, A_2) , каноническую форму $F(x)$ многочленной матрицы $A(x) = Ex^2 + A_1x + A_2$ и каноническую форму (A_{10}, A_{20}) пары (A_1, A_2) .

ПРИМЕР 2. Набору матриц

$$(A_1, A_2) = \left(\left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right\| \right),$$

соответствуют

$$F(x) = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ x + x^3 & x^3 & x^4 & 0 \\ 0 & x + x^3 & 0 & x^4 \end{array} \right\| \quad (\text{см. определение 2}),$$

$$(A_{10}, A_{20}) = \left(\left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \right).$$

ПРИМЕР 3. Набору матриц

$$(A_1, A_2) = \left(\left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \right),$$

соответствуют

$$F(x) = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2 & 0 & 0 \\ x - x^3 & x^3 & 0 & 0 & x^4 & 0 \\ 0 & x - x^3 & 0 & 0 & 0 & x^4 \end{array} \right\| \quad (\text{см. определение 4}),$$

$$(A_{10}, A_{20}) = \left(\left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \right).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Казімірський П. С., Петричкович В. М. Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. Київ: Наукова думка, 1977. С. 61–66.
- [2] Казімірський П. С. Розклад матричних многочленів на множники. Київ: Наукова думка, 1981.
- [3] Donovan P., Freislich M. R. Some evidence for an extension of the Brauer–Thrall conjecture // Sonderforschungsbereich Theor. Math. 1973. V. 40. P. 24–26.
- [4] Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. Киев: ИМ АН УССР, 1977. С. 104–114.
- [5] Гельфанд И. М., Пономарев В. А. Неразложимые представления группы Лоренца // УМН. 1968. Т. 23. № 2. С. 3–60.
- [6] Назарова Л. А., Ройтер А. В. Об одной задаче И. М. Гельфанда // Функцион. анализ и его прилож. 1973. Т. 7. № 4. С. 54–69.
- [7] Бондаренко В. М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Матем. сб. 1975. Т. 96. № 1. С. 63–74.
- [8] Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А. Представленческий тип конечных групп // Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1977. Т. 71. С. 24–42.
- [9] Friedland S. Simultaneous similarity of matrices // Adv. Math. 1983. V. 50. P. 189–265.
- [10] Belitskii G. R. Normal forms in matrix spaces // Integral Equations Operator Theory. 2000. V. 30. № 3. P. 251–283.
- [11] Sergeichuk V. V. Canonical matrices for linear matrix problems // Linear Algebra Appl. 2000. V. 317. P. 53–102.
- [12] Икрамов Х. Д. Об одном критерии квазидиагонализуемости вещественных матриц // ЖВМиМФ. 2000. Т. 40. № 1. С. 6–20.
- [13] Шаваровский Б. З. Редукция матриц при помощи эквивалентных и подобных преобразований // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 5. С. 769–782.

Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я. С. Подстригача НАН Украины, г. Львов
E-mail: ogutik@apmm.lviv.ua

Поступило
30.09.2002
Исправленный вариант
16.04.2003