Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Кротов, О касательном граничном поведении функций многих переменных, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 2, 230–248

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm941>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 11:34:06

УДК 517.5

О КАСАТЕЛЬНОМ ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В. Г. Кротов

В работе изучается асимптотическое поведение функций, заданных в областях многомерного действительного или комплексного пространства, когда точка подходит к границе внутри касательных областей с различным порядком касания. Основные результаты статьи связаны с граничным поведением функций из пространств Харди–Соболева в многомерном комплексном шаре и решений эллиптических краевых задач в липшицевой области действительного евклидова пространства. Методы статьи основаны на двухвесовых оценках для касательных максимальных функций в абстрактном шаре. Границей этого шара является пространство с мерой и квазиметрикой.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Систематическое изучение касательного граничного поведения функций из пространств Харди было начато в работах [1], [2], где рассматривались потенциалы функций из $H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$ (при $p > 1$ в [1] и при $p > 0$ в [2]) и продолжено затем многими авторами (см., например, [3]–[8]). Так в нашей работе [4] с этой точки зрения изучались функции из пространств Харди для многих комплексных переменных и решения некоторых краевых задач. Такого же типа результаты были получены затем в [6], [7].

Здесь мы обобщаем ряд результатов из цитированных работ в некоторых направлениях, основным из которых является рассмотрение скорости касательной сходимости. Сейчас будет приведен типичный результат нашей работы, относящийся к касательному асимптотическому поведению решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения $\Delta^m u = 0$.

Пусть Ω – ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, μ – мера Лебега на $\partial\Omega$,

$$\Gamma_\varepsilon^*(P) = \{x \in \Omega : |x - P| < a(\text{dist}(x, \partial\Omega))^\varepsilon\}, \quad P \in \partial\Omega,$$

и $N_\varepsilon u(x) = \sup\{|u(y, r)| : (y, r) \in \Gamma_\varepsilon^*\}$ – соответствующий максимальный оператор.

При $\varepsilon = 1$ область $\Gamma_\varepsilon^*(P)$ допускает некасательный подход к границе: если a достаточно велико (больше липшицевой постоянной области Ω), то $\Gamma_1^*(P)$ содержит конус фиксированных высоты и раствора, не зависящих от $P \in \partial\Omega$. Если же $\varepsilon < 1$, то область $\Gamma_\varepsilon^*(P)$ допускает касательный подход к границе, причем степень касания области $\Gamma_\varepsilon^*(P)$ и $\partial\Omega$ тем выше, чем меньше ε . Параметр a оказывает незначительное влияние на геометрию области $\Gamma_\varepsilon^*(P)$ – при увеличении a область $\Gamma_\varepsilon^*(P)$ расширяется, но степень ее касания границы при этом не меняется.

Рассмотрим, следуя [9], $PD(m, p)$ -задачу Дирихле: найти m -гармоническую функцию u в области Ω , для которой некасательные пределы производных в направлении внешней нормали порядка $l = 0, \dots, m-1$ μ -почти всюду совпадают с заданными функциями из класса Соболева $W_l^p(\partial\Omega)$ и $N_1(\nabla^{m-1}u) \in L_\mu^p(\partial\Omega)$.

ТЕОРЕМА. Пусть $p > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$,

$$0 \leq \sigma < m-1 < \frac{n-1}{p}, \quad \frac{n-mp+p-1}{n-\sigma p-1} \leq \varepsilon < 1$$

и ν – внешняя мера на $\partial\Omega$, удовлетворяющая условию

$$\mu(B(x, t)) \leq ct^\beta,$$

где c не зависит от $x \in X$ и $t > 0$,

$$\beta = \frac{n - (m - \sigma\varepsilon - 1)p - 1}{\varepsilon}.$$

Тогда если u – решение полигармонической задачи Дирихле $PD(m, p)$, то

$$\|N_\varepsilon(W_\sigma u)\|_{L_\nu^p(\partial\Omega)} \leq c \left(\sum_{l=0}^{m-2} |\nabla^l u(0)| + \|N_1(\nabla^{m-1}u)\|_{L_\mu^p(\partial\Omega)} \right)$$

(c не зависит от u) и для ν -почти всех $P \in \partial\Omega$ выполнено равенство

$$\Gamma_\varepsilon^* \text{-}\lim_{x \rightarrow P} W_\sigma u(x, P) = 0,$$

где

$$W_\sigma u(x, P) = \left[u(x) - \sum_{|k| < [\sigma]} \frac{(x-P)^k}{k!} D^k u(P) \right] |x-P|^{-\sigma}.$$

Здесь и всюду ниже в работе через c мы обозначаем различные положительные постоянные, зависящие, возможно, от некоторых параметров (существенная зависимость отражается соответствующими индексами).

Отметим, что мера ν может быть сингулярной относительно μ и, в частности, возможно сосредоточена на подмногообразиях границы $\partial\Omega$ меньшей хаусдорфовой размерности, а также не обязана быть аддитивной, поэтому в качестве ν могут быть взяты, например, различные емкости.

Параметр β (показатель плотности внешней меры ν) указывает точную связь между основными параметрами: размерностью n , порядком уравнения m , качеством граничных данных p , геометрией областей сходимости ε и порядком скорости сходимости σ .

Мы покажем также, что эти утверждения являются неупрощаемыми в том смысле, что даже в случае, когда Ω – единичный шар в $\mathbb{R}^n$, условие на внешнюю меру ν является в некотором смысле необходимым. Кроме того, области Γ_ε^* , участвующие в формулировках, выбраны оптимально и не допускают расширения.

Основой для получения результатов такого рода являются двухвесовые неравенства для специальных максимальных функций на пространствах с мерой и квазиметрикой.

При этом мы опираемся на методы нашей работы [4], которые изложены в п. 2, где изучается граничное поведение операторов типа дробного интегрирования на абстрактных пространствах.

В п. 3 рассмотрены приложения к граничному поведению дифференцируемых функций и, в частности, решений краевых задач в негладких областях n -мерного евклидова пространства. Пункт 4 посвящен приложениям результатов п. 2 к пространствам Харди в многомерном комплексном шаре.

Результаты работы в том или ином объеме докладывались на конференциях: “Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ”, посвященной 90-летию академика С. М. Никольского (Москва, 27 апреля – 3 мая 1995 года), на Саратовской зимней школе “Теория функций и приближений” (Саратов, 27 января – 2 февраля 1996 года), “Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление”, посвященной 90-летию академика Ф. Д. Гахова (Минск, 16–20 февраля 1996 года) и “Гармонический анализ и приближения” (Нор-Амберд, 18–25 сентября 1998 года) – и частично анонсированы [10].

2. Весовые оценки касательных максимальных функций. Пусть X – компактное хаусдорфово пространство, топология которого задается квазиметрикой d . Это означает, что функция $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ удовлетворяет условиям

$$d(x, y) = 0 \iff x = y, \quad d(x, y) = d(y, x), \quad d(x, y) \leq a_d[d(x, z) + d(z, y)]$$

для любых $x, y, z \in X$ (постоянная $a_d \geq 1$ не зависит от выбора элементов $x, y, z \in X$) и семейство открытых шаров $B(x, t) = \{y \in X : d(x, y) < t\}$ образует базу окрестностей топологии X .

ЛЕММА 1. *Существует постоянная $\rho = \rho_d \geq 1$ такая, что для любого множества $E \subset X$ из любого покрытия $\{B\}$ этого множества шарами можно выделить не более чем счетное подсемейство $\{B_j\} \subset \{B\}$ со свойствами*

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i \neq j), \quad E \subset \bigcup_j \rho B_j.$$

Здесь ρB – шар с тем же центром, что и B , радиуса в ρ раз больше. Доказательство леммы имеется в [11].

Неотрицательная функция ν , определенная на борелевских множествах из X , называется *внешней мерой*, если она монотонна и субаддитивна, т.е.

$$G_1 \subset G_2 \implies \nu(G_1) \leq \nu(G_2), \quad \nu\left(\bigcup_j G_j\right) \leq \sum_j \nu(G_j).$$

Если f – борелевская функция и ν – внешняя мера на X , то положим

$$\|f\|_{L^p_\nu(X)} = \left(p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \nu\{|f| > \lambda\} d\lambda \right)^{1/p}.$$

Конечно, если ν – мера, то

$$\|f\|_{L^p_\nu(X)} = \left(\int_X |f|^p d\nu \right)^{1/p}.$$

В дальнейшем термин “мера на X ” означает “неотрицательная борелевская мера на X ”.

Будем говорить, что внешняя мера μ на X удовлетворяет *условию Фростмана* $F_\beta(d) = F_\beta$ *порядка* $\beta > 0$ (и писать $\mu \in F_\beta$), если

$$\mu(B(x, t)) \leq ct^\beta, \quad x \in X, \quad t > 0$$

(c не зависит от x и t).

Если внешняя мера μ на X такова, что

$$\mu(B(x, 2t)) \leq c_\mu \mu(B(x, t))$$

(c_μ не зависит от $x \in X$ и $t > 0$), то говорят, что μ удовлетворяет *условию удвоения* $D_\infty(d) = D_\infty$. Мы пишем тогда $\mu \in D_\infty$. В этом случае существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\mu(B(x, s)) \leq c \left(\frac{s}{t} \right)^\gamma \mu(B(x, t)), \quad x \in X, \quad 0 < t < s$$

(c не зависит от x, s и t). Это условие мы называем *условием удвоения* $D_\gamma(d) = D_\gamma$ *порядка* γ и пишем $\mu \in D_\gamma$. Таким образом, $D_\infty = \bigcup_{\gamma > 0} D_\gamma$. Если $\mu \in D_\infty$, то тройка (X, d, μ) называется обычно *пространством однородного типа* [11]. Ограничение $\mu \in D_\infty$ понадобится нам не всегда. Основное условие, которое мы будем использовать в этом пункте, — $F_{\beta, \gamma}$ -условие на пару внешних мер ν и μ на X .

Пусть ν и μ — две внешние меры на X и $\beta > 0, \gamma > 0$. Будем говорить, что пара (ν, μ) удовлетворяет *условию* $F_{\beta, \gamma}(d) = F_{\beta, \gamma}$ (и писать $(\nu, \mu) \in F_{\beta, \gamma}$), если

$$\nu(B(x, s)) \leq cs^\beta t^{-\gamma} \mu(B(x, t)), \quad x \in X, \quad 0 < t < s \leq \text{diam } \Omega$$

(c не зависит от x, s и t).

Рассмотрим произведение $X \times [0, 1]$ и будем трактовать X как границу (отождествляя $X \times \{1\}$ и X). Пусть $0 < \varepsilon \leq 1$ и $a > 0$. Для каждой точки $x \in X$ выделим область подхода к границе

$$\Gamma_\varepsilon(x) \equiv \Gamma_{a, \varepsilon}(x) = \{(y, r) \in X \times [0, 1] : d(x, y) < a(1 - r)^\varepsilon\} \quad (2.1)$$

и введем соответствующий максимальный оператор

$$N_\varepsilon u(x) \equiv N_{a, \varepsilon} u(x) = \sup\{|u(y, r)| : (y, r) \in \Gamma_{a, \varepsilon}(x)\}.$$

Как правило, мы будем считать для простоты, что $a = 1$, и в таком случае первый индекс в обозначениях для $\Gamma_{a, \varepsilon}$ и $N_{a, \varepsilon}$ будем опускать.

Отметим, что если $\mu \in D_\infty$, то при $0 < a < b$ выполняется неравенство

$$\|N_{b, \varepsilon} u\|_{L_\mu^p(X)} \leq c \|N_{a, \varepsilon} u\|_{L_\mu^p(X)},$$

где c не зависит от $u \in C(X \times [0, 1])$. Это следует из леммы 1.

Пусть $K \in L^1[0, 1]$ и

$$\mathcal{K}u(x, r) = \int_0^1 K(s)u(x, rs) ds, \quad x \in X, \quad 0 \leq r < 1. \quad (2.2)$$

Мы рассматриваем только непрерывные функции на $X \times [0, 1]$, так что интеграл всегда будет иметь смысл.

Основное условие на ядро K , которое мы будем рассматривать, – это

$$\int_0^\delta |K(1-s)| ds \leq c\delta^\alpha, \quad 0 < \delta \leq 1, \quad (2.3)$$

с некоторыми постоянными $c > 0$ и $\alpha > 0$, не зависящими от δ . Будем ссылаться на (2.3) как на S_α -условие (и писать $K \in S_\alpha$). Легко видеть, что оно эквивалентно следующему условию:

$$\int_\delta^{2\delta} |K(1-s)| ds \leq c\delta^\alpha, \quad 0 < \delta \leq 1$$

(с некоторой другой постоянной c). В частности, (2.3) выполнено, если

$$|K(s)| \leq c(1-s)^{\alpha-1}, \quad 0 \leq s < 1.$$

Введем еще оператор

$$J_\alpha u(x, r) = (1-r)^\alpha u(x, r). \quad (2.4)$$

В этом пункте мы будем изучать условия, при которых неравенство

$$\|N_\varepsilon(\mathcal{K}u)\|_{L_\nu^q(X)} \leq c\|N_1u\|_{L_\mu^p(X)}$$

справедливо для всех функций $u \in C(X \times [0, 1])$ с постоянной c , не зависящей от u . Для этого приведем некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть $A \geq 1$, $0 < \varepsilon < 1$,

$$\Omega_\varepsilon^A(x) = \left\{ (y, r) \in X \times [1 - A^{-\varepsilon/(1-\varepsilon)}, 1) : d(x, y) < \left(\frac{1-r}{A} \right)^\varepsilon \right\}.$$

Определим максимальные функции (см. (2.4))

$$N_{\alpha, \varepsilon}^A u(x) = \sup\{|J_\alpha u(y, r)| : (y, r) \in \Omega_\varepsilon^A(x)\}.$$

Подобные конструкции впервые рассматривались в [2]. Впоследствии различные варианты таких функций изучались в [3]–[7]. Здесь мы используем для изучения $N_{\alpha, \varepsilon}^A$ методы нашей работы [4].

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha > 0$, $p > 0$, ν – внешняя мера и μ – мера на X , $(\nu, \mu) \in F_{\beta, \gamma}$ при некоторых $\gamma > \alpha p$ и $\beta > \gamma - \alpha p$. Тогда при $A \geq 1$ выполнено неравенство

$$\|N_{\alpha, \varepsilon}^A(u)\|_{L_\nu^p(X)} \leq cA^{-\varepsilon\beta/p}\|N_1u\|_{L_\mu^p(X)},$$

где c не зависит от A и $u \in C(X \times [0, 1])$, а $\varepsilon\beta = \gamma - \alpha p$.

В случае $\nu = \mu$ при условии $\mu \in D_\gamma$ это утверждение доказано в работе [4, п. 2.9]. Доказательство леммы 2 в точности такое же, лишь в момент применения условия D_γ надо пользоваться условием $F_{\beta, \gamma}$. Это же относится и к следующей лемме.

ЛЕММА 3. Пусть $\alpha > 0$, $p > 0$, ν – внешняя мера и μ – мера на X , $(\nu, \mu) \in F_{\beta, \gamma}$ при некоторых $\gamma > \alpha p$ и $\beta = \gamma - \alpha p$. Тогда

$$\|N_1(J_\alpha u)\|_{L_\nu^p(X)} \leq c \|N_1 u\|_{L_\mu^p(X)},$$

где c не зависит от $u \in C(X \times [0, 1])$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha > 0$, $p > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, ν – внешняя мера, μ – мера на X , $(\nu, \mu) \in F_{\beta, \gamma}$ при некоторых $\gamma > \alpha p$, $\beta = (\gamma - \alpha p)/\varepsilon$ и пусть $K \in S_\alpha$. Тогда выполнено неравенство

$$\|N_\varepsilon(\mathcal{K}u)\|_{L_\nu^p(X)} \leq c \|N_1 u\|_{L_\mu^p(X)}$$

для любой функции $u \in C(X \times [0, 1])$, где c не зависит от u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in X$ и точка (y, r) такова, что $d(x, y) < (1-r)^\varepsilon$. Найдем натуральное k_0 так, чтобы $2^{k_0}\delta_r < \delta_r^\varepsilon \leq 2^{k_0+1}\delta_r$. Здесь

$$\delta_r = 1 - r. \quad (2.5)$$

Это обозначение будет систематически использоваться в дальнейшем.

Тогда

$$\left| \int_0^1 K(s)u(y, rs) ds \right| \leq \left(\int_r^1 + \int_{1-\delta_r^\varepsilon}^r + \int_0^{1-\delta_r^\varepsilon} \right) |K(s)u(y, rs)| ds \equiv I_1 + I_2 + I_3.$$

Сначала оценим I_1 :

$$I_1 \leq \int_r^1 |K(s)| \delta_{sr}^{-\alpha} |J_\alpha u(y, sr)| ds \leq N_{\alpha, \varepsilon}^1 u(x) \delta_r^{-\alpha} \int_r^1 |K(s)| ds \leq c N_{\alpha, \varepsilon}^1 u(x).$$

Далее,

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{k=0}^{k_0} (2^k \delta_r)^{-\alpha} \int_{1-2^{k+1}\delta_r}^{1-2^k\delta_r} |K(s)| ((2^k \delta_r)^\alpha |u(y, rs)|) ds \\ &\leq c \sum_{k=0}^{k_0} N_{\alpha, \varepsilon}^{2^k} u(x) (2^k \delta_r)^{-\alpha} \int_{1-2^{k+1}\delta_r}^1 |K(s)| ds \leq c \sum_{k=0}^{k_0} N_{\alpha, \varepsilon}^{2^k} u(x). \end{aligned}$$

Наконец, для оценки I_3 возьмем $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ и найдем $0 < \alpha_1 < \alpha$ так, чтобы $(\gamma - \alpha_1 p)\varepsilon = (\gamma - \alpha p)\varepsilon_1$. Тогда

$$|I_3| \leq \int_0^{1-\delta_r^\varepsilon} |K(s)| (1-s)^{-\alpha_1} \delta_s^{\alpha_1} |u(y, rs)| ds \leq c N_{\alpha_1, 1}^1 u(x) \leq c N_{\alpha_1, \varepsilon_1}^1 u(x),$$

так как

$$\int_0^1 |K(s)| \delta_s^{-\alpha_1} ds < \infty$$

(последнее следует из (2.3)).

Таким образом, мы доказали неравенство

$$N_\varepsilon(\mathcal{K}u)(x) \leq c \left(\sum_{k=0}^{\infty} N_{\alpha, \varepsilon}^{2^k} u(x) + N_{\alpha_1, \varepsilon_1}^1 u(x) \right).$$

Теперь для оценки первого слагаемого справа надо использовать лемму 2:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \lambda^{p-1} \nu \left(\sum_{k=0}^{\infty} N_{\alpha, \varepsilon}^{2^k} u > \lambda \right) d\lambda \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\varepsilon \beta k / 2} \int_0^\infty \lambda^{p-1} \nu (N_{\alpha, \varepsilon}^{2^k} u > (1 - 2^{-\varepsilon \beta / 2}) 2^{-\varepsilon \beta k / 2} \lambda) d\lambda \\ & \leq c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\varepsilon \beta k / 2} \int_0^\infty \lambda^{p-1} \nu (N_{\alpha, \varepsilon}^{2^k} u > \lambda) d\lambda \\ & \leq c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\varepsilon \beta k / 2} 2^{-\varepsilon \beta k} \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu (N_1 u > \lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Нужное неравенство для второго слагаемого

$$\int_0^\infty \lambda^{p-1} \nu (N_{\alpha_1, \varepsilon_1}^1 u > \lambda) d\lambda \leq c \|N_1 u\|_{L^p(\mu)}$$

получается также прямым применением леммы 2, но с α_1 и ε_1 вместо α и ε соответственно. Теорема доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $p > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \sigma \leq \alpha$, ν – внешняя мера, μ – мера на X , $(\nu, \mu) \in F_{\beta, \gamma}$ при некотором $\gamma > (\alpha - \sigma\varepsilon)p$ и $\beta\varepsilon = \gamma - (\alpha - \sigma\varepsilon)p$. Пусть еще ядро $K \in S_\alpha$. Тогда выполнено неравенство

$$\|N_\varepsilon(\mathcal{K}_\sigma u)\|_{L_\nu^p(X)} \leq c \|N_1 u\|_{L_\mu^p(X)}$$

для любой функции $u \in C(X \times [0, 1])$ (с не зависит от u), где

$$\mathcal{K}_\sigma u(y, r) = d^{-\sigma}(x, y) \int_{1-d(x, y)}^1 K(s) u(y, sr) ds.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in X$ и $d(x, y) < \delta_r^\varepsilon$ (см. (2.5)). Если $d(x, y) \leq \delta_r$, то

$$\begin{aligned} d^{-\sigma}(x, y) \int_{1-d(x, y)}^1 |K(s) u(y, sr)| ds & \leq d^{-\sigma}(x, y) N_{\alpha-\sigma, 1}^1 u(x) \int_{1-d(x, y)}^1 |K(s)| \delta_{sr}^{\sigma-\alpha} ds \\ & \leq c N_{\alpha-\sigma, 1}^1 u(x). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Пусть теперь $d(x, y) > \delta_r$. Тогда найдется натуральное j такое, что $\delta_r < 2^{-\varepsilon j / (1-\varepsilon)}$

и

$$(2^{-j-1} \delta_r)^\varepsilon < d(x, y) \leq (2^{-j} \delta_r)^\varepsilon.$$

Выберем еще натуральное n_0 так, чтобы

$$2^{n_0}\delta_r < d(x, y) \leq 2^{n_0+1}\delta_r.$$

Отметим, что тогда при $n = 0, \dots, n_0$ будет выполняться неравенство

$$1 - \rho_n < \left(\frac{1 - \rho_n}{2^{n+j}} \right)^\varepsilon, \quad \rho_n = 1 - 2^n \delta_r.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} d^{-\sigma}(x, y) \int_{1-d(x, y)}^1 |K(s)u(y, sr)| ds \\ \leq c 2^{\sigma\varepsilon j} (1-r)^{-\sigma\varepsilon} \left[\int_r^1 + \sum_{n=0}^{n_0} \int_{\rho_{n+1}}^{\rho_n} \right] |K(s)u(y, sr)| ds \\ \leq c \sum_{n=0}^{n_0} 2^{(n+j)\alpha\varepsilon} N_{\alpha-\sigma\varepsilon, \varepsilon}^{2^{n+j}} u(x) \end{aligned}$$

в силу условия S_α и определения $N_{\alpha, \varepsilon}^A$ (* у знака суммы означает, что последний интеграл в сумме берется по отрезку $[1 - d(x, y), \rho_{n_0}]$). Таким образом, учитывая еще (2.6), получаем

$$\begin{aligned} \sup_{d(x, y) < (1-r)^\varepsilon} d^{-\sigma}(x, y) \int_{1-d(x, y)}^1 |K(s)u(y, sr)| ds \\ \leq c \left\{ N_{\alpha-\sigma, 1}^1 u(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{(n+j)\varepsilon\sigma} N_{\alpha-\sigma\varepsilon, \varepsilon}^{2^{n+j}} u(x) \right\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Так как $(\nu, \mu) \in F_{\beta, \gamma}(X)$ и $\varepsilon < 1$, то $(\nu, \mu) \in F_{\varepsilon\beta, \gamma}(X)$, а по лемме 3

$$\|N_{\alpha-\sigma, 1}^1 u\|_{L_\nu^p(X)} \leq c \|N_1^1 u\|_{L_\mu^p(X)}.$$

Далее по лемме 2 из условия $(\nu, \mu) \in F_{\beta, \gamma}(X)$ с $\beta\varepsilon = \gamma - (\alpha - \sigma\varepsilon)p$ вытекает, что

$$\|N_{\alpha-\sigma\varepsilon, \varepsilon}^{2^{n+j}} u\|_{L_\nu^p(X)} \leq c 2^{-(n+j)\varepsilon\beta/p} \|N_1^1 u\|_{L_\mu^p(X)}.$$

Осталось подставить эту оценку в (2.7) и заметить, что $\varepsilon\beta/p - \sigma\varepsilon = \gamma/p - \alpha > 0$.

3. Граничное поведение решений эллиптических краевых задач. В этом пункте мы будем использовать результаты п. 2 для изучения поведения дифференцируемых функций вблизи границы липшицевой области в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Эти результаты будут затем применены к решениям некоторых краевых задач для уравнений в частных производных эллиптического типа.

Пусть $\Omega = \{r\theta : \theta \in S^{n-1}, 0 \leq r < g(\theta)\}$ — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, звездная относительно начала координат (последнее не ограничивает общности и

принимается для удобства). Здесь $g: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ – положительная липшицева функция на единичной сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, т.е.

$$L = \sup \left\{ \frac{|g(\theta) - g(\theta_1)|}{|\theta - \theta_1|} : \theta, \theta_1 \in S^{n-1} \right\} < \infty.$$

Пусть еще

$$M = \sup\{g(\theta) : \theta \in S^{n-1}\}, \quad m = \inf\{g(\theta) : \theta \in S^{n-1}\}.$$

Результаты п. 2 будут применяться при следующем выборе основных параметров: $X = \partial\Omega$ – граница области Ω , $d(P, Q) = |P - Q|$ – евклидова метрика, μ – мера Лебега на $\partial\Omega$. При этом

$$\mu(B(P, t)) \asymp t^{n-1}, \quad P \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq 2 \operatorname{diam} \Omega, \quad (3.1)$$

с постоянными эквивалентности, не зависящими от P и t . Здесь $B(P, t)$ – поверхностные шары на $\partial\Omega$, порожденные евклидовой метрикой. При выбранных X , d и μ мы будем использовать основные обозначения п. 2, отождествляя при этом $\partial\Omega \times [0, 1)$ и Ω с помощью отображения $(P, r) \rightarrow rP$, где $P \in \partial\Omega$, $r \in [0, 1)$. При этом под некасательным пределом в точке $P \in \partial\Omega$ будем понимать предел вдоль области $\Gamma_1(P)$. Термин “почти всюду” без указания меры относится к мере μ .

Вместо областей $\Gamma_\varepsilon(P)$ можно было бы рассматривать области

$$\Gamma_\varepsilon^*(P) = \{x \in \Omega : |x - P| < a(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^\varepsilon\}, \quad P \in \partial\Omega,$$

которые мы использовали для формулировок во введении. Эти области формально не укладываются в схему, изложенную выше, но в существенном совпадают с областями $\Gamma_\varepsilon(P)$. Это показывает следующая лемма.

ЛЕММА 5. *Существует постоянная $c > 0$ такая, что*

$$\frac{1}{c}(1 - r) \leq \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq c(1 - r), \quad x \in \Omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x = rg(\theta)\theta$, $d = x\partial\Omega$, $Q = g(\theta)\theta$, $Q_0 = g(\theta_0)\theta_0$ – ближайшая к x точка $\partial\Omega$, $y = rg(\theta_0)\theta_0$, причем можно считать, что $r \geq 1/2$. Тогда

$$\begin{aligned} (1 - r)g(\theta) &= |x - Q| \leq |x - Q_0| + |Q - Q_0| = d + |Q - Q_0| \\ &\leq d + |g(\theta)\theta - g(\theta_0)\theta| + |g(\theta_0)\theta - g(\theta_0)\theta_0| \leq d + (L + M)|\theta - \theta_0| \\ &\leq d + \frac{L + M}{rg(\theta)}|x - Q_0| \leq \left(2\frac{L + M}{m} + 1\right)d, \end{aligned}$$

откуда

$$1 - r \leq \frac{1}{m} \left(2\frac{L + M}{m} + 1\right)d.$$

Здесь было использовано то, что $rg(\theta)\theta_0 \in \Omega$, а также то, что $g(\theta_0) \leq g(\theta)$.

Обратное неравенство очевидно

$$d = |x - Q_0| \leq |x - Q| = |rg(\theta)\theta - g(\theta)\theta| \leq M(1 - r).$$

Далее мы будем использовать стандартные векторные обозначения

$$|k| = \sum_{j=1}^n k_j, \quad k! = \prod_{j=1}^n k_j!, \quad x^k = \prod_{j=1}^n x_j^{k_j}, \quad D^k = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{k_j} \quad (3.2)$$

для мультииндекса $k = (k_1, \dots, k_n)$ и вектора $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, пусть $\nabla^l u$ означает вектор всех частных производных $D^k u$, $|k| \leq l$, функции $u \in C^l(\Omega)$.

Пусть функция $u \in C^1(\Omega)$ и

$$Ru = \sum_{j=1}^n x_j D_j u(x)$$

– радиальная производная. Нам понадобятся следующие легко проверяемые тождества (см. [12] в комплексном случае):

$$\frac{d}{ds} u(sx) = \frac{1}{s} Ru(sx), \quad RD^k u(x) = D^k Ru(x) - |k| D^k u(x).$$

Обозначим через

$$T_l(x, y; u) = u(x) - \sum_{|k| < l} \frac{(x-y)^k}{k!} D^k u(y)$$

тейлоровские остатки функции $u \in C^l(\Omega)$. С помощью этих тождеств и из интегрирования по частям нетрудно вывести [13] равенства

$$u(x) = \frac{1}{(l-1)!} \int_{\rho}^1 \frac{1}{s} \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{l-1} R^l u(sx) ds + \sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{j!} \left(\ln \frac{1}{\rho} \right)^j R^j u(\rho x), \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} T_l(x, y; u) &= \frac{1}{(l-1)!} \int_{\rho}^1 \frac{1}{s} \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{l-1} R^l u(sx) ds + \sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{j!} \left(\ln \frac{1}{\rho} \right)^j T_{l-j}(\rho x, \rho y; R^j u) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{j!} \int_{\rho}^1 \frac{1}{s} \left(\ln \frac{1}{s} \right)^j \sum_{|k|=l-j-1} \frac{(sx-sy)^k}{k!} D^k R^{j+1} u(sy) ds, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $0 < \rho < 1$.

Пусть $p > 0$ и $m \in \mathbb{N}$. Введем классы

$$\mathcal{H}_m^p(\Omega) = \left\{ u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{\mathcal{H}_m^p} = \sum_{l=0}^m \|N_1(\nabla^l u)\|_{L_{\mu}^p(\partial\Omega)} < \infty \right\}.$$

Отметим (см. [4]), что

$$\|N_1 u\|_{L_{\mu}^p(\partial\Omega)} \leq c(|u(0)| + \|N_1(\nabla u)\|_{L_{\mu}^p(\partial\Omega)})$$

(с не зависит от u), поэтому

$$\|u\|_{\mathcal{H}_m^p(\Omega)} \asymp \sum_{l=0}^{m-1} |\nabla^l u(0)| + \|N_1(\nabla^m u)\|_{L_\mu^p(\partial\Omega)}.$$

Из тождества (3.3) и из результатов работы [5, п. 3.8, 3.11] следует, что для каждой функции $u \in \mathcal{H}_m^p(\Omega)$ все частные производные $D^k u$ порядка $|k| < m$ почти всюду на $\partial\Omega$ имеют некасательные пределы, которые мы обозначаем $D^k u(P)$. Поэтому если $l < m$, то для каждой функции $u \in \mathcal{H}_m^p(\Omega)$ и почти всех $P \in \partial\Omega$ имеет смысл выражение $T_l(x, P; u)$.

Введем обозначение

$$W_\sigma u(x, P) = \frac{T_{[\sigma]}(x, P; u)}{|x - P|^\sigma}. \quad (3.5)$$

Из сказанного вытекает, что при $\sigma < m$ выражение (3.5) корректно определено для $u \in \mathcal{H}_m^p(\Omega)$ и $x \in \Omega$ при почти всех $P \in \partial\Omega$.

Пусть еще $\mathring{\mathcal{H}}_m^p(\Omega)$ – подкласс в $\mathcal{H}_m^p(\Omega)$, состоящий из функций, у которых частные производные порядка k , $|k| = m$, почти всюду на $\partial\Omega$ имеют некасательный предел. Множество $\mathring{\mathcal{H}}_m^p(\Omega)$ является замкнутым подпространством в $\mathcal{H}_m^p(\Omega)$, состоящим из функций, для которых

$$\lim_{r \rightarrow 1} \|u - u_r\|_{\mathcal{H}_m^p(\Omega)} = 0,$$

где $u_r(x) = u(rx)$ (см. [5, лемма 2.5]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $0 < p < (n-1)/m$, $(n-mp-1)/(n-1) \leq \varepsilon < 1$ и ν – внешняя мера на $\partial\Omega$, удовлетворяющая F_β -условию, $\varepsilon\beta = n-mp-1$. Тогда для любой функции $u \in \mathcal{H}_m^p(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\|N_\varepsilon u\|_{L_\nu^p(\partial\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{H}_m^p(\Omega)}$$

(с не зависит от u).

Если дополнительно $u \in \mathring{\mathcal{H}}_m^p(\Omega)$, то для ν -почти всех $P \in \partial\Omega$ существует Γ_ε - $\lim_{x \rightarrow P} u(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тождеством (3.3) с $\rho = 1/2$. Нужная оценка для первого слагаемого справа вытекает из теоремы 1. Второе слагаемое справа оценивается так

$$\left| R^j u\left(\frac{x}{2}\right) \right| \leq \inf\{N_{a,1}(R^j u)(P) : P \in \partial\Omega\},$$

где $a = 4 \operatorname{diam}(\Omega)$. Отсюда вытекает нужное неравенство и для второго слагаемого.

Теорема 2 может рассматриваться как предельный частный случай $\sigma = 0$ следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $p > 0$, $m \in \mathbb{N}$,

$$0 < \sigma < m < \frac{n-1}{p}, \quad \frac{n-mp-1}{n-\sigma p-1} \leq \varepsilon < 1$$

и ν – внешняя мера на $\partial\Omega$, удовлетворяющая F_β -условию с $\beta = (n-(m-\sigma\varepsilon)p-1)/\varepsilon$. Тогда для любой функции $u \in \mathcal{H}_m^p(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\|N_\varepsilon(W_\sigma u)\|_{L_\nu^p(\partial\Omega)} \leq c\|u\|_{\mathcal{H}_m^p(\Omega)}$$

(с не зависит от u).

Если дополнительно $u \in \mathring{\mathcal{H}}_m^p(\Omega)$, то для ν -почти всех $P \in \partial\Omega$

$$\Gamma_\varepsilon\text{-}\lim_{x \rightarrow P} \frac{T_{[\sigma]}(x, P; u)}{|x - P|^\sigma} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha = [\sigma] + 1 > \sigma$. Мы будем сейчас использовать лемму 4 с квазиметрикой $d_1(P, Q) = |P - Q|^{1/\delta}$, где

$$\delta = 1 - \frac{(m - \alpha)p}{n - 1}. \quad (3.6)$$

Временно примем обозначение $N_{\varepsilon, d}$ для операторов N_ε . Тогда $N_{\varepsilon, d} = N_{\varepsilon\delta, d_1}$.

Пусть $P \in \partial\Omega$ и $Q \in \partial\Omega$, причем $|P - Q| < (1 - r)^\varepsilon$. Запишем тождество (3.4) с $x = rQ$, $y = P$ и $\rho = 1 - d_1(P, Q)$, поделив обе части на $|x - P|^\sigma$, обозначая первое слагаемое справа в полученном равенстве через $W'(x)$, а сумму остальных через $W''(x)$. Тогда (см. (3.5))

$$W_\sigma(x, P) \leq |W'(x)| + |W''(x)|.$$

Воспользуемся теперь леммой 4 для оценки W' :

$$\|N_{\varepsilon, d}W'\|_{L_\nu^p(\partial\Omega)} = \|N_{\varepsilon\delta, d_1}W'\|_{L_\nu^p(\partial\Omega)} \leq c\|N_{1, d_1}(R^\alpha u)\|_{L_\mu^p(\partial\Omega)} = \|N_{\delta, d}(R^\alpha u)\|_{L_\mu^p(\partial\Omega)}.$$

Основное условие на внешнюю меру для применения леммы 4 состоит в том, что

$$\nu(B_{d_1}(P, t)) \leq ct^{\beta_1}, \quad \beta_1 = \frac{(n-1)\delta - (\alpha - \sigma\varepsilon)}{\varepsilon/\delta}$$

($B_{d_1}(P, t)$ – шары на $\partial\Omega$, порожденные квазиметрикой d_1) или (переходя к обычным евклидовым шарам на $\partial\Omega$)

$$\nu(B(P, t)) \leq ct^{((n-1)\delta - (\alpha - \sigma\varepsilon)p)/\varepsilon}.$$

В силу выбора δ (см. (3.6))

$$\frac{(n-1)\delta - (\alpha - \sigma\varepsilon)p}{\varepsilon} = \frac{n - (m - \sigma\varepsilon)p - 1}{\varepsilon},$$

и нужное условие выполнено.

Слагаемое W'' оценивается просто с помощью формулы Тейлора с остатком формы Лагранжа как

$$|W''(x)| \leq c \sum_{|k| \leq \alpha} N_{1,d_1}(J_{\alpha-\sigma}(D^k u))(P).$$

Поэтому по лемме 3

$$\begin{aligned} \|N_{\varepsilon,d}(W'')\|_{L^p_\nu(\partial\Omega)} &= \|N_{\varepsilon\delta,d_1}(W'')\|_{L^p_\nu(\partial\Omega)} \leq c \sum_{|k| \leq \alpha} \|N_{1,d_1}(D^k u)\|_{L^p_\mu(\partial\Omega)} \\ &= c \sum_{|k| \leq \alpha} \|N_{\delta,d}(D^k u)\|_{L^p_\mu(\partial\Omega)} \end{aligned}$$

(нужное условие на внешнюю меру ν сейчас опять выполнено).

Итак, мы доказали, что

$$\|N_\varepsilon(W_\sigma u)\|_{L^p_\nu(\partial\Omega)} \leq c \sum_{|k| \leq \alpha} \|N_{\delta,d}(D^k u)\|_{L^p_\mu(\partial\Omega)}.$$

Для завершения доказательства осталось воспользоваться теоремой 2 (с метрикой d) при $\nu = \mu$ и $\varepsilon = \delta$.

Рассмотрим граничное поведение решений некоторых краевых задач для полигармонического уравнения $\Delta^m u = 0$, $m \geq 1$. Пусть $\mathbf{n} = \mathbf{n}(P)$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке $P \in \partial\Omega$ (она существует для μ -почти всех P).

Следуя [9], рассмотрим следующие краевые задачи.

1) $PD(m, p)$ (L^p -полигармоническая задача Дирихле): найти m -гармоническую функцию u в области Ω , для которой $N_1(\nabla^{m-1} u) \in L^p_\mu(\partial\Omega)$ и некасательные пределы

$$\Gamma_1\text{-}\lim_{x \rightarrow P} \frac{\partial^l u}{\partial \mathbf{n}^l(x)}$$

при $l = 0, \dots, m-1$ μ -почти всюду совпадают с заданными функциями из класса Соболева $W^p_l(\partial\Omega)$.

2) $RD(m, p)$ (L^p -полигармоническая регулярная задача Дирихле): найти m -гармоническую функцию u в области Ω , для которой $N_1(\nabla^m u) \in L^p_\mu(\partial\Omega)$ и некасательные пределы

$$\Gamma_1\text{-}\lim_{x \rightarrow P} \frac{\partial^l u}{\partial \mathbf{n}^l(x)}$$

при $l = 0, \dots, m-1$ μ -почти всюду совпадают с заданными функциями из класса Соболева $W^p_l(\partial\Omega)$.

Определение классов Соболева на негладкой поверхности довольно громоздко, и мы его не приводим, отсылая к [9]. Здесь оно в явном виде не понадобится.

Отметим, что все частные производные решения краевой задачи $PD(m, p)$ порядка $|l| < m$ σ -почти всюду на $\partial\Omega$ имеют некасательные пределы [9], следовательно, решение этой краевой задачи принадлежит классу $\mathcal{H}^p_{m-1}(\Omega)$. Точно так же решение задачи $RD(m, p)$ принадлежит $\mathcal{H}^p_m(\Omega)$. Поэтому к ним применимы теоремы 2 и 3, и мы приходим к следующим утверждениям.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $p > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$,

$$0 \leq \sigma < m - 1 < \frac{n-1}{p}, \quad \frac{n - mp + p - 1}{n - \sigma p - 1} \leq \varepsilon < 1,$$

ν – внешняя мера на $\partial\Omega$, удовлетворяющая F_β -условию с $\beta = (n - (m - \sigma\varepsilon - 1)p - 1)/\varepsilon$. Тогда если u – решение полигармонической задачи Дирихле $PD(m, p)$, то

$$\|N_\varepsilon(W_\sigma u)\|_{L_\nu^p(\partial\Omega)} \leq c \left(\sum_{l=0}^{m-2} |\nabla^l u(0)| + \|N_1(\nabla^{m-1} u)\|_{L_\mu^p(\partial\Omega)} \right)$$

(c не зависит от u) и для ν -почти всех $P \in \partial\Omega$

$$\Gamma_\varepsilon\text{-}\lim_{x \rightarrow P} \frac{T_{[\sigma]}(x, P; u)}{|x - P|^\sigma} = 0.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $p > 0$, $m \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \sigma < m < \frac{n-1}{p}, \quad \frac{n - mp - 1}{n - \sigma p - 1} \leq \varepsilon < 1,$$

ν – внешняя мера на $\partial\Omega$, удовлетворяющая F_β -условию с $\beta = (n - (m - \sigma\varepsilon)p - 1)/\varepsilon$. Тогда если u – решение полигармонической регулярной задачи Дирихле $PD(m, p)$, то

$$\|N_\varepsilon(W_\sigma u)\|_{L_\nu^p(\partial\Omega)} \leq c \left(\sum_{l=0}^{m-1} |\nabla^l u(0)| + \|N_1(\nabla^m u)\|_{L_\mu^p(\partial\Omega)} \right)$$

(c не зависит от u) и для ν -почти всех $P \in \partial\Omega$

$$\Gamma_\varepsilon\text{-}\lim_{x \rightarrow P} \frac{T_{[\sigma]}(x, P; u)}{|x - P|^\sigma} = 0.$$

Некоторые частные случаи теорем 4 и 5 были доказаны в наших работах [4], [10] и [7]. В [7] была рассмотрена регулярная задача Дирихле для уравнения Лапласа ($m = 1$) при $\sigma = 0$, причем существенно использовались специальные свойства решений и дополнительные ограничения на область Ω . Теорема 2 применима и к решениям краевых задач для более общих эллиптических уравнений (см., например, [14]).

Рассмотрим вопрос о точности результатов этого пункта. Мы покажем сейчас, что даже в случае, когда Ω – единичный шар в $\mathbb{R}^n$, основное условие теорем 2–5 (F_β -условие на внешнюю меру ν) является необходимым для справедливости этих утверждений, по крайней мере в некоторых типичных частных случаях. Кроме того, будет показано, что области Γ_ε выбраны оптимальным образом и не могут быть существенно расширены.

Пусть $n \geq 3$, $p > 1$, $\Omega = B^n$ – единичный шар в $\mathbb{R}^n$, $f \in L_\mu^p(S^{n-1})$ и

$$\mathcal{S}f(x) = \int_{S^{n-1}} f(\theta) |x - \theta|^{2-n} d\mu(\theta)$$

– ньютонов потенциал. Отметим для дальнейшего, что $\nabla(\mathcal{S}f)$ почти всюду на S^{n-1} имеет некасательный предел и

$$\|N_1(\nabla(\mathcal{S}f))\|_{L^p_\mu(S^{n-1})} \leq c\|f\|_{L^p_\mu(S^{n-1})}.$$

Поэтому $\mathcal{S}f$ является решением некоторой гармонической регулярной задачи $RD(1, p)$ в B^n , а также решением некоторой бигармонической задачи Дирихле $PD(2, p)$ в B^n .

Пусть χ_δ – характеристическая функция шара $B(\theta_0, \delta) \subset S^{n-1}$, где $0 < \delta < 1$ и $\theta_0 \in S^{n-1}$ фиксированы.

Если $x_0 = (1 - \delta)\theta_0 \in B^n$, то при $\theta \in B(\theta_0, \delta)$ выполняется оценка

$$|x_0 - \theta| \leq |\theta - \theta_0| + \delta \leq 2\delta$$

и

$$\mathcal{S}\chi_\delta(x_0) \geq (2\delta)^{2-n} \int_{B(\theta_0, \delta)} \chi_\delta(\theta) d\mu(\theta) \geq c_0\delta, \quad (3.7)$$

где c_0 – некоторая положительная постоянная.

Если число $A > 1$ выбрать достаточно большим, то при $A\delta \leq |\theta - \theta_0| \leq \delta^\varepsilon$ выполнено неравенство $u(\theta) \leq c_0\delta/2$ и

$$W_\sigma(\mathcal{S}\chi_\delta)(x_0, \theta) = \frac{|u(x_0) - u(\theta)|}{|x_0 - \theta|^\sigma} > c\delta^{1-\varepsilon\sigma}$$

для таких θ , следовательно,

$$\{N_\varepsilon(\mathcal{S}\chi_\delta) > c_0\delta\} \supset B(\theta_0, \delta^\varepsilon), \quad \{N_\varepsilon(W_\sigma(\mathcal{S}\chi_\delta)) > c\delta^{1-\varepsilon\sigma}\} \supset B(\theta_0, \delta^\varepsilon) - B(\theta_0, A\delta).$$

Отсюда и из неравенства $\|\chi_\delta\|_{L^p_\mu(S^{n-1})} \leq c\delta^{(n-1)/p}$ вытекает следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если ν – внешняя мера на $\partial B^n = S^{n-1}$, для которой выполнено неравенство

$$\nu(\{N_\varepsilon(W_\sigma u) > \lambda\}) \leq c \left(\frac{1}{\lambda} (|u(0)| + \|N_1(\nabla u)\|_{L^p_\mu(S^{n-1})})^p \right)$$

для любого $\lambda > 0$ и любого решения u бигармонической задачи Дирихле $PD(2, p)$ (с постоянной c , не зависящей от u и λ), то

- 1) если $\sigma = 0$, то $\nu \in F_\beta$ при $\beta = (n - (1 - \sigma\varepsilon)p - 1)/\varepsilon$;
- 2) если $\sigma > 0$, то из $\nu \in F_{\varepsilon\beta}$ следует $\nu \in F_\beta$ с тем же β .

Таким образом, условие на внешнюю меру в теоремах этого пункта нельзя ослабить, и оно является необходимым даже для неравенств слабого типа с $N_\varepsilon u$ и $N_\varepsilon(W_\sigma u)$ по крайней мере для $m = 2$ в теореме 4 и для $m = 1$ в теореме 5.

Покажем, далее, что при $\sigma = 0$ области Γ_ε в утверждениях теорем 4 и 5, относящихся к сходимости почти всюду, не допускают расширения.

Пусть функция $\Phi: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ такова, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} \Phi(t) = +\infty. \quad (3.8)$$

Рассмотрим области

$$\Gamma_{\Phi, \varepsilon}(\theta) = \{r\eta : |\theta - \eta| < \Phi(1-r)(1-r)^\varepsilon, 0 \leq r < 1, \eta \in S^{n-1}\} \quad (3.9)$$

и соответствующие максимальные операторы

$$N_{\Phi, \varepsilon} u(\theta) = \sup\{|u(r\eta)| : \eta \in \Gamma_{\Phi, \varepsilon}(\theta)\}.$$

Пусть

$$S_k^{n-1} = \{\theta \in S^{n-1} : \theta_{k-1} = \dots = \theta_n = 0\}, \quad k = 2, \dots, n-1,$$

ν_k – мера Лебега на S^{k-1} , “пересаженная” на S^{n-1} при отождествлении S^{k-1} и S_k^{n-1} . Тогда ν_k удовлетворяет F_β -условию с $\beta = k-1$, и если $\theta \in S_k^{n-1}$, то $\nu(B(\theta, t)) \geq ct^{k-1}$.

Из неравенств (3.7) следует, что $N_{\Phi, \varepsilon}(\mathcal{S}\chi_\delta)(\theta) \geq c\delta$ при $\theta \in B(\theta_0, \Phi(\delta)\delta^\varepsilon)$, поэтому

$$\nu_k(\{N_{\Phi, \varepsilon}(\mathcal{S}\chi_\delta) > c\delta\}) \geq c(\Phi(\delta)\delta^\varepsilon)^{k-1} = c\Phi^{k-1}(\delta) \left(\frac{\|\chi_\delta\|_{L_\mu^p(S^{n-1})}}{\delta} \right)^p.$$

Так как множитель $\Phi^{k-1}(\delta)$ может быть сделан сколь угодно большим, то найдутся последовательности неотрицательных функций f_j и чисел $\lambda_j \uparrow \infty$ со свойствами

$$\sum_{j=1}^{\infty} \nu_k(\{N_{\Phi, \varepsilon}(\mathcal{S}f_j) > \lambda_j\}) = \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{L_\mu^p(S^{n-1})}^p < \infty.$$

Поэтому существует последовательность T_j вращений $\mathbb{R}^n$, переводящих S_k^{n-1} в себя, и таких, что

$$\nu_k\left(\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \{N_{\Phi, \varepsilon}(\mathcal{S}(f_j \circ T_j)) > \lambda_j\}\right) = \nu_k(S_k^{n-1}).$$

Положим теперь

$$f = \left(\sum_{j=1}^{\infty} (f_j \circ T_j)^p \right)^{1/p}$$

и рассмотрим гармоническую функцию $u(x) = \mathcal{S}f(x)$. Так как $f \in L_\mu^p(S^{n-1})$, то u является решением некоторой гармонической регулярной задачи $RD(1, p)$ в B^n , а также решением некоторой бигармонической задачи Дирихле $PD(2, p)$ в B^n .

С другой стороны, при всех j и $\theta \in S^{n-1}$ выполняется неравенство

$$N_{\Phi, \varepsilon}(u)(\theta) \geq N_{\Phi, \varepsilon}(\mathcal{S}(f_j \circ T_j))(\theta),$$

и для ν_k -почти всех $\theta \in S^{n-1}$ неравенство $N_{\Phi, \varepsilon}(u)(\theta) > \lambda_j$ выполнено для бесконечно многих j . Следовательно, ν_k -почти всюду на S^{n-1} имеет место $N_{\Phi, \varepsilon}(u)(\theta) = +\infty$.

Таким образом, мы показали, что утверждения теорем 4 и 5 теряют силу, если при $\sigma = 0$ области Γ_ε в формулировках заменить любыми областями вида (3.9), где Φ удовлетворяют условию (3.8).

4. Приложения к пространствам Харди $H^p(B^n)$. В этом пункте результаты п. 2 применяются в случае $X = \partial B^n$ – граница единичного шара в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$. Мы используем здесь неизотропную квазиметрику $d(\zeta, \eta) = |1 - \langle \zeta, \eta \rangle|$, где

$$\langle \zeta, \eta \rangle = \sum_{k=1}^n \zeta_k \bar{\eta}_k$$

– комплексное скалярное произведение, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$. Пусть еще μ – нормированная поверхностная мера на ∂B^n . Отметим (см. [12]), что

$$\mu(B(\zeta, t)) \asymp t^n, \quad \zeta \in \partial B^n, \quad 0 < t \leq 2, \quad (4.1)$$

с постоянными эквивалентности, не зависящими от ζ и t . Здесь $B(\zeta, t)$ – шары, порожденные неизотропной квазиметрикой. При выбранных X , d и μ мы будем использовать основные обозначения п. 2, отождествляя при этом $\partial B^n \times [0, 1)$ и B^n с помощью отображения $(\zeta, r) \rightarrow r\zeta$, где $(\zeta \in \partial B^n, r \in [0, 1))$.

Пусть $H(B^n)$ – класс голоморфных функций в B^n и $0 < p < \infty$. Пространство Харди $H^p(B^n)$ определяется (см., например, [12]) как множество функций $f \in H(B^n)$, для которых

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0 < r < 1} \|f_r\|_{L^p_\mu(\partial B^n)} < \infty,$$

где $f_r(z) = f(rz)$.

Хорошо известно [12], что каждая функция $f \in H^p(B^n)$ μ -почти всюду на ∂B^n имеет Γ_1 -предел (определение Γ_1 см. в (2.1)). Количественным выражением этого факта является максимальное неравенство [12]

$$\|N_1 f\|_{L^p_\mu(\partial B^n)} \leq c \|f\|_{H^p}, \quad (4.2)$$

где c не зависит от f .

Функция $f \in H(B^n)$ разлагается в ряд по однородным полиномам

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z), \quad f_m(\lambda z) = \lambda^m f_m(z)$$

(сходимость равномерная на компактах в B^n [12]). В терминах этих разложений определим операторы дробного интегрирования порядка $\alpha > 0$

$$I_\alpha f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{-\alpha} f_m(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\alpha-1} f(sz) ds.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть ν – внешняя мера на ∂B^n , $p > 0$, $0 < \alpha < n/p$, $0 < \varepsilon < 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\|N_\varepsilon(I_\alpha f)\|_{L^p_\nu(\partial B^n)} \leq c \|f\|_{H^p}$ при всех $f \in H^p(B^n)$ (c не зависит от f);
- 2) $\nu\{\zeta \in \partial B^n : N_\varepsilon(I_\alpha f)(\zeta) > \lambda\} \leq c(\|f\|_{H^p}/\lambda)^p$ при всех $f \in H^p(B^n)$ и $\lambda > 0$ (c не зависит от f и λ);
- 3) $\nu \in F_\beta$, где $\beta = (n - \alpha p)/\varepsilon$.

Если выполнено 3), то $I_\alpha f$ ν -почти всюду имеет Γ_ε -предел для любой функции $f \in H^p(B^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 3) $\implies$ 1) сразу следует из теоремы 1, неравенства (4.2) и соотношения (4.1). Утверждение 1) $\implies$ 2) очевидно. Утверждение 2) $\implies$ 3) получается с помощью тестовой функции

$$g_t(z) = (1 - \rho(\zeta, z))^{-A},$$

где $\rho = 1 - t$, ζ – фиксированная точка, $A > n/p$. В самом деле,

$$\|g_t\|_{H^p} \asymp t^{n/p-A}$$

(см. [12]). Кроме того, $I_\alpha g_t(\rho z) \geq ct^{\alpha-A}$, поэтому

$$N_\varepsilon(I_\alpha g_t(\eta)) \geq ct^{\alpha-A}, \quad \eta \in B(\zeta, t^\varepsilon),$$

и

$$\nu\{N_\varepsilon(I_\alpha g_t) > ct^{\alpha-A}\} \geq c \left(\frac{\|g_t\|_{H^p}}{t^{\alpha-A}} \right)^p t^{\alpha p - n} \nu(B(\zeta, t^\varepsilon)).$$

Таким образом, из 2) вытекает, что $\nu(B(\zeta, t^\varepsilon)) \leq ct^{n-\alpha p}$.

Утверждение о сходимости ν -почти всюду получается из 2) стандартно.

Теорема 6 сохраняет силу и для других естественных операторов дробного интегрирования, например, для дробных интегралов Коши–Сегё

$$C_\alpha f(z) = \int_{\partial B^n} \frac{f^*(\eta)}{(1 - \langle z, \eta \rangle)^{n-\alpha}} d\mu(\eta) = \frac{1}{B(\alpha, n-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{n-\alpha-1} f(sz) ds,$$

где $0 < \alpha < n$, f^* – граничная функция (или граничное распределение) для $f(z)$ (см. [4], [15], [6]), а также для дробных интегралов Римана–Лиувилля [4]

$$R_\alpha f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} f_m(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(sz) ds.$$

Часть 3) $\implies$ 1) теоремы 6 при $\nu = \mu$ была доказана в [4], а при $p > 1$ с C_α вместо I_α – в [6] (в [6] ν – мера).

Будем использовать ниже естественные комплексные аналоги обозначений из (3.2)–(3.4) (получаемые заменой в них $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ на $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$). При $p > 0$, $\alpha > 0$ введем классы Харди–Соболева $H_\alpha^p(B^n) = I_\alpha(H^p(B^n))$. Тогда если $f \in H_\alpha^p(B^n)$, то $D^k f \in H^p(B^n)$ при $|k| \leq [\alpha]$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $p > 0$, $0 \leq \sigma < \alpha < n/p$, $(n - \alpha p)/(n - \sigma p) \leq \varepsilon < 1$ и ν – внешняя мера на ∂B^n , удовлетворяющая F_β -условию с $\beta = (n - (\alpha - \sigma\varepsilon)p)/\varepsilon$. Тогда для любой функции $f \in H_\alpha^p(B^n)$ выполнено неравенство

$$\|N_\varepsilon(W_\sigma f)\|_{L_\nu^p(\partial B^n)} \leq c \|f\|_{H_\alpha^p(B^n)}$$

(с не зависит от f) и для ν -почти всех $\zeta \in \partial B^n$

$$\Gamma_\varepsilon\text{-}\lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{T_{[\sigma]}(z, \zeta; f)}{|z - \zeta|^\sigma} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО не отличается от доказательства теорем 2 (при $\sigma = 0$) и 3 (при $\sigma > 0$).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Nagel A., Rudin W., Shapiro J. Tangential boundary behavior of functions in Dirichlet-type spaces // *Ann. of Math.* 1982. V. 116. № 2. P. 331–360.
- [2] Nagel A., Stein E. M. On certain maximal functions and approach regions // *Adv. Math.* 1984. V. 54. № 1. P. 83–106.
- [3] Ahern P., Nagel A. Strong L^p -estimates for maximal functions with respect to singular measure with applications to exceptional sets // *Duke Math. J.* 1986. V. 53. № 2. P. 359–393.
- [4] Кротов В. Г. Оценки для максимальных операторов, связанных с граничным поведением, и их приложения // *Тр. МИАН.* 1989. Т. 190. С. 117–138.
- [5] Кротов В. Г. О граничном поведении функций из пространств типа Харди // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1990. Т. 54. № 1. С. 957–974.
- [6] Sueiro J. Tangential boundary limits and exceptional sets for harmonic function in Dirichlet-type spaces // *J. Math. Ann.* 1990. V. 286. № 4. P. 661–678.
- [7] Cifuentes P., Dorronsoro J., Sueiro J. Boundary tangential convergence in spaces of homogeneous type // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1992. V. 332. № 1. P. 331–350.
- [8] Cascante C., Ortega J. M. Tangential-exceptional sets for Hardy–Sobolev spaces // *Illinois J. Math.* 1995. V. 39. № 1. P. 68–85.
- [9] Verhota G. The Dirichlet problem for the polyharmonic equation in Lipschitz domains // *Indiana Univ. Math. J.* 1990. V. 39. № 3. P. 671–702.
- [10] Кротов В. Г. Весовые неравенства, связанные с граничным поведением функций из многомерных классов Харди–Соболева и решений эллиптических краевых задач // *Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление. Труды международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Ф. Д. Гахова (Беларусь, Минск, 16–20 февраля 1996 г.).* Минск, 1996. С. 172–177.
- [11] Coifman R. R., Weiss G. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1977. V. 83. № 4. P. 569–645.
- [12] Рудин У. Теория функций в единичном шаре в $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.
- [13] Кротов В. Г. О дифференциальных свойствах на границе функций, голоморфных в единичном шаре в $\mathbb{C}^n$ // *Матем. заметки.* 1989. Т. 45. № 2. С. 51–59.
- [14] Pipher J., Verhota G. C. Dilatation invariant estimates and the boundary Gårding inequality for the higher order elliptic operators // *Ann. of Math.* 1995. V. 142. № 1. P. 1–36.
- [15] Ahern P., Cohn W. Exceptional sets for Hardy–Sobolev functions // *Indiana Univ. Math. J.* 1989. V. 38. № 2. P. 417–452.