Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Крутицкий, Первая начально-краевая задача для одного уравнения составного типа в трехмерной многосвязной области, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 2, 249–265

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm942>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 16:35:30

УДК 517.958

ПЕРВАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО ТИПА В ТРЕХМЕРНОЙ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

П. А. Крутицкий

Метод граничных интегральных уравнений применяется к первой начально-краевой задаче для уравнения составного типа в трехмерной многосвязной области. Задача сведена к однозначно разрешимому интегральному уравнению. Решение задачи получено в форме динамических потенциалов, плотность в которых удовлетворяет этому уравнению. Тем самым доказана теорема существования. Кроме того, изучена единственность решения. Все результаты справедливы как для внутренних, так и для внешних областей с учетом соответствующих условий на бесконечности.

Библиография: 19 названий.

В динамике океана возникает эволюционное уравнение составного типа четвертого порядка, называемое уравнением гравитационно-гироскопических волн (см. (1.1)). Подобные уравнения имеют как эллиптические, так и гиперболические характеристики, а значит, обладают свойствами как эллиптических, так и гиперболических уравнений. Различные начально-краевые задачи для аналогичных уравнений исследовались в [1]–[12]. В частности, задачи для двумерного уравнения гравитационно-гироскопических волн в многосвязных областях изучались в [3], [7]–[12]. Для трехмерного уравнения гравитационно-гироскопических волн ранее изучались лишь начально-краевые задачи в односвязных областях [1], [2], [4]–[6]. Трехмерное уравнение в многосвязных областях ранее не рассматривалось. Настоящая работа имеет целью восполнить этот пробел и изучить первую начально-краевую задачу в трехмерной многосвязной области (внутренней и внешней). Аналогичная задача в односвязной области сводилась в [1], [5], [6] к интегральным уравнениям. Однако способ сведения к интегральным уравнениям, предложенный в этих работах для односвязной области, не проходит в случае многосвязной области, так как получающиеся интегральные уравнения могут не иметь решения, в то время как начально-краевая задача разрешима. Кроме того, способ сведения к интегральному уравнению, предлагаемый в настоящей работе, отличается от ранее известного даже для внешней односвязной области. С помощью теории динамических потенциалов [1], [2] и метода граничных интегральных уравнений в работе доказана теорема существования решения для рассматриваемой задачи. Единственность решения также изучена. Следует отметить, что интегральное уравнение, полученное в настоящей работе, является однозначно разрешимым уравнением Фредгольма.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01063.

1. Постановка задачи и теорема единственности. В декартовых координатах $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ рассмотрим связную область $\mathcal{D}$ с границей Γ класса $C^{2,\lambda}$, $\lambda \in (0, 1]$. Будем считать, что Γ состоит из простых непересекающихся замкнутых поверхностей $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in C^{2,0}$, так что Γ_0 охватывает все остальные. Поверхность Γ_0 может отсутствовать, тогда область $\mathcal{D}$ будет неограниченной. Через $\mathbf{n}_x$ обозначим внутреннюю по отношению к области $\mathcal{D}$ нормаль в точке $x \in \Gamma$. Рассмотрим поверхности, составляющие Γ как двусторонние. Ту сторону поверхностей Γ , которая видна, если глядеть навстречу концам нормальных векторов $\mathbf{n}_x$, $x \in \Gamma$, обозначим Γ^- , а противоположную сторону обозначим Γ^+ .

Будем говорить, что функция $\mathcal{U}(t, x)$, определенная на множестве $[0, \infty) \times \overline{\mathcal{D}}$, принадлежит классу гладкости G , если

- 1) $\mathcal{U}, \mathcal{U}_t \in C^0([0, \infty) \times \mathcal{D})$; $\partial^k \partial^p \mathcal{U} / \partial t^k \partial x_j^p \in C^0((0, \infty) \times \mathcal{D})$, $k, p = 0, 1, 2$, $j = 1, 2, 3$;
- 2) при каждом $t \geq 0$ на границе Γ существует предельное значение функции $\mathcal{U}$ в смысле предельного перехода по нормали к границе.

Функцию $\mathcal{U}(t, x)$, определенную в неограниченной области, назовем *регулярной на бесконечности*, если существуют такие функции $q_1(t), q_2(t) \in C^0[0, \infty)$, что при $|x| \rightarrow \infty$ справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial t^j} \mathcal{U}(t, x) \right| \leq q_1(t) |x|^{-1}, \quad \left| \frac{\partial^j}{\partial t^j} \mathcal{U}_{x_k}(t, x) \right| \leq q_2(t) |x|^{-2}, \quad j = 0, 1, 2, \quad k = 1, 2, 3.$$

Уравнение внутренних гравитационно-гироскопических волн в стратифицированной жидкости в случае трех пространственных переменных имеет вид [5], [13], [14]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \mathcal{U} + \omega_1^2 \Delta_2 \mathcal{U} + \omega_2^2 \mathcal{U}_{x_3 x_3} = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad (1.1)$$

где $\omega_1 \geq 0$ – частота Вайсяля–Брента, $\omega_2 \geq 0$ – удвоенная частота вращения вокруг оси Ox_3 .

Сформулируем первую начально-краевую задачу для уравнения (1.1) в области $\mathcal{D}$ при $t \geq 0$.

ЗАДАЧА $\mathcal{K}$. Найти функцию $\mathcal{U}(t, x)$ из класса G , удовлетворяющую в классическом смысле уравнению (1.1) в области $(0, \infty) \times \mathcal{D}$, начальным условиям

$$\mathcal{U}(0, x) = \mathcal{U}_t(0, x) = 0, \quad x \in \mathcal{D},$$

и граничному условию на Γ :

$$\mathcal{U}(t, x)|_{x \in \Gamma} = f_0(t, x)|_{x \in \Gamma}, \quad t \geq 0. \quad (1.2)$$

Кроме того, если $\mathcal{D}$ – внешняя область, то функция $\mathcal{U}(t, x)$ должна быть регулярной на бесконечности.

Удовлетворение граничному условию понимается в смысле предельного перехода по нормали к границе Γ .

Наряду с классом G рассмотрим класс гладкости G_1 .

Функция $\mathcal{U}(t, x) \in G_1$, если

$$1) \mathcal{U}, \mathcal{U}_t \in C^0([0, \infty) \times \overline{\mathcal{D}}), \nabla \mathcal{U}, \nabla \mathcal{U}_t \in C^0([0, \infty) \times \mathcal{D}),$$

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \frac{\partial^p}{\partial x_j^p} \mathcal{U} \in C^0((0, \infty) \times \mathcal{D}), \quad k, p = 0, 1, 2, \quad j = 1, 2, 3;$$

2) при каждом $t \geq 0$ на Γ существует равномерный по всем $x \in \Gamma$ предел выражения

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_t \mathcal{U}(t, \bar{x}) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{n}_x \nabla_{\bar{x}}) \mathcal{U}(t, \bar{x}) + \omega_1^2 \cos(\mathbf{n}_x, x_1) \mathcal{U}_{x_1}(t, \bar{x}) \\ &\quad + \omega_1^2 \cos(\mathbf{n}_x, x_2) \mathcal{U}_{x_2}(t, \bar{x}) + \omega_2^2 \cos(\mathbf{n}_x, x_3) \mathcal{U}_{x_3}(t, \bar{x}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

при $\bar{x}$, стремящемся к $x \in \Gamma$ по нормали $\mathbf{n}_x$, т.е. предел понимается в смысле предельного перехода по нормали к границе Γ . Через $\cos(\mathbf{n}_x, x_j)$ обозначен косинус угла между вектором нормали $\mathbf{n}_x$ в точке $x \in \Gamma$ и направлением оси Ox_j , $j = 1, 2, 3$.

Очевидно, что всякая функция из класса G_1 принадлежит классу G .

Всюду ниже под $\int_{\Gamma} \dots dS$ понимается поверхностный интеграл первого рода.

Изучим вопрос о единственности решения задачи $\mathcal{K}$. Справедлива

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{U}(t, x)$ – классическое решение уравнения (1.1) в области $(0, \infty) \times \mathcal{D}$, принадлежащее классу гладкости G_1 . Кроме того, предположим, что функция $\mathcal{U}(t, x)$ регулярна на бесконечности в случае внешней области $\mathcal{D}$. Тогда для любого $t \geq 0$ имеет место тождество

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\nabla \mathcal{U}_t\|^2 + \omega_1^2 \|\mathcal{U}_{x_1}\|^2 + \omega_1^2 \|\mathcal{U}_{x_2}\|^2 + \omega_2^2 \|\mathcal{U}_{x_3}\|^2) = \int_{\Gamma} \mathcal{U}_t \mathcal{N}_t \mathcal{U} ds,$$

где норма $\|\cdot\|$ берется в пространстве $L_2(\mathcal{D})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 1 проводится непосредственной проверкой. Для этого в области $\mathcal{D}$ построим эквидистантные поверхности [15] к границе Γ . Если $\mathcal{D}$ – внешняя область, то помимо этого рассмотрим сферу достаточно большого радиуса R с центром в начале координат. В области, ограниченной эквидистантными поверхностями (и сферой, если $\mathcal{D}$ – внешняя область), запишем энергетическое тождество, которое получается в результате умножения уравнения (1.1) на $\mathcal{U}_t$ и интегрирования по частям. Устремляя эквидистантные поверхности к границе Γ и пользуясь свойствами функций класса G_1 , докажем тождество из условия леммы в случае, когда $\mathcal{D}$ – внутренняя область. Если $\mathcal{D}$ – внешняя область, то в добавление к вышеизложенному устремим R к бесконечности и используем регулярность $\mathcal{U}(t, x)$ на бесконечности. В результате снова получим требуемое тождество.

Непосредственно из леммы 1 вытекает

ТЕОРЕМА 1. Если решение задачи $\mathcal{K}$ из класса гладкости G_1 существует, то оно единственно.

Разрешимость задачи $\mathcal{K}$ будет доказана при более слабых требованиях гладкости на ее решение, чем в теореме 1, а именно, мы откажемся от требования принадлежности решения классу G_1 .

Перейдем к построению классического решения задачи $\mathcal{K}$.

2. Сведение задачи к интегральному уравнению. Введем некоторые классы функций. Положим

$$C_0^2[0, \infty) = \{\varphi(t) : \varphi(t) \in C^2[0, \infty), \varphi(0) = \varphi'(0) = 0\}.$$

Через $C^k([0, \infty); \mathcal{H})$ обозначим класс k раз непрерывно-дифференцируемых при $t \geq 0$ абстрактных функций $\varphi(t)$ со значениями в банаховом пространстве $\mathcal{H}$. Кроме того, введем следующий класс абстрактных функций:

$$C_0^2([0, \infty); \mathcal{H}) = \{\varphi(t) : \varphi(t) \in C^2([0, \infty); \mathcal{H}), \varphi(0) = \varphi'(0) = 0\}.$$

Под обозначением $C^0([0, T]; \mathcal{H})$, где $T > 0$, будем понимать банахово пространство абстрактных функций, норма в котором определяется формулой

$$\|\cdot\|_{C^0([0, T]; \mathcal{H})} = \|\|\cdot\|_{\mathcal{H}}\|_{C^0[0, T]}.$$

В дальнейшем из теории абстрактных функций нам понадобится следующий результат, схема доказательства которого приводится в [16, с. 28–29].

ЛЕММА 2. *Классы функций $C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$ и $C^0([0, \infty) \times \Gamma)$ эквивалентны, т. е. всякая функция из первого класса принадлежит второму и наоборот.*

Перейдем к построению решения задачи $\mathcal{K}$. Будем предполагать, что функция $f_0(t, x)$ из граничного условия (1.2) принадлежит классу $C_0^2([0, \infty); C^0(\Gamma))$, тогда ее можно представить в виде

$$f_0(t, x) = \int_0^t \int_0^{t_1} f(t_2, x) dt_2 dt_1 = \int_0^t (t - \tau) f(\tau, x) d\tau,$$

где

$$f(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f_0(t, x) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma)).$$

Через $J_0(\sigma)$ и $J_1(\sigma)$ будем обозначать функции Бесселя нулевого и первого порядка.

Рассмотрим функцию, введенную в [5] и названную *динамическим потенциалом двойного слоя для уравнения (1.1)*:

$$U[\bar{\mu}](t, x) = \int_0^t \int_{\Gamma} \bar{\mu}(\tau, y) \mathcal{N}_{\tau y} W(t - \tau, x - y) dS_y d\tau - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \bar{\mu}(t, y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x - y|} dS_y, \quad (2.1)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma$, оператор $\mathcal{N}_{tx}$ определен в (1.3),

$$W(t, x) = -\frac{1}{4\pi|x|_0} \int_0^{t|x|_0/|x|} J_0(\sigma) d\sigma = -\frac{t}{4\pi|x|} + \frac{|x|_0}{4\pi|x|^2} \left(t * J_1 \left(t \frac{|x|_0}{|x|} \right) \right)$$

— сингулярное решение для уравнения (1.1), $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$, $|x|_0 = (\omega_2^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2 + \omega_1^2 x_3^2)^{1/2}$. Знаком $*$ обозначается операция свертки по времени, так что для любых двух функций времени $a(t), b(t)$ имеем

$$a(t) * b(t) = \int_0^t a(t - \tau) b(\tau) d\tau = \int_0^t a(\tau) b(t - \tau) d\tau.$$

Относительно плотности $\bar{\mu}(t, x)$ будем предполагать, что она имеет вид

$$\bar{\mu}(t, x) = \int_0^t \int_0^{t_1} \mu(t_2, x) dt_2 dt_1 = \int_0^t (t - \tau) \mu(\tau, x) d\tau, \quad (2.2)$$

где $\mu(t, x) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$, так что $\bar{\mu}(t, x) \in C_0^2([0, \infty); C^0(\Gamma))$.

Как показано в [5], функция $W(t, x)$ при $x \neq 0$ удовлетворяет в классическом смысле уравнению (1.1), причем $W(0, x) = 0$, $W_t(0, x) = -(4\pi|x|)^{-1}$.

Для функции $\mathcal{N}_{\tau y} W(t - \tau, x - y)$ справедливо следующее представление [5]:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\tau y} W(t - \tau, x - y) &= \frac{\cos(x - y, \mathbf{n}_y)}{4\pi|x - y|^2} \left[\frac{|x - y|_0}{|x - y|} J'_0(\zeta) \right. \\ &\quad + \frac{(\tau - t)(x_3 - y_3)^2(|x - y|^2 - (x_3 - y_3)^2)(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 J_0(\zeta)}{|x - y|^2 |x - y|_0^2} \\ &\quad \left. + \frac{\omega_2^2 \omega_1^2}{|x - y|_0^3} |x - y|^3 \int_0^\zeta J_0(\sigma) d\sigma \right], \quad \zeta = \frac{(\tau - t)|x - y|_0}{|x - y|}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $|\cos(x - y, \mathbf{n}_y)|$ – косинус угла между векторами $\vec{y\bar{x}}$ и $\mathbf{n}_y$. Величина, стоящая в квадратных скобках, непрерывна при $x \neq y$ и равномерно ограничена по всем переменным на любом конечном промежутке времени. Поскольку $|\cos(x - y, \mathbf{n}_y)| \leq \text{const} |x - y|^{\lambda_1}$ при $x, y \in \Gamma$ и $\Gamma \in C^{1, \lambda_1}$ (тем более, если $\Gamma \in C^{2, \lambda}$ как в нашем случае), то, как показано в [5, лемма 4.1.1], из результатов теории потенциала следует непрерывность потенциала $U[\bar{\mu}](t, x)$ при $x \in \Gamma$.

Из свойств динамического потенциала двойного слоя, приведенных в [5], вытекает, что справедлива

ЛЕММА 3. Если $\mu(t, s) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$ и $\bar{\mu}(t, s)$ дается выражением (2.2), то потенциал $U[\bar{\mu}](t, x)$ принадлежит классу G , удовлетворяет уравнению (1.1) в $(0, \infty) \times \mathcal{D}$ и начальным условиям задачи $\mathcal{H}$. Кроме того, если $\mathcal{D}$ – внешняя область, то потенциал $U[\bar{\mu}](t, x)$ регулярен на бесконечности.

Через $Y_1, \dots, Y_N$ обозначим произвольные фиксированные точки, расположенные внутри поверхностей $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$, и рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} Q[\bar{\mu}](t, x) &= \sum_{k=1}^N \int_0^t \int_{\Gamma_k} \mu(\tau, y) dS_y W(t - \tau, x - Y_k) d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{-1}{|x - Y_k|} \int_{\Gamma_k} \bar{\mu}(t, y) dS_y \right. \\ &\quad \left. + \frac{|x - Y_k|_0}{|x - Y_k|^2} \int_0^t \int_{\Gamma_k} \bar{\mu}(\tau, y) dS_y J_1\left(\frac{|x - Y_k|_0}{|x - Y_k|}(t - \tau)\right) d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $W(t, x)$ определена выше.

Функция $Q[\bar{\mu}](t, x)$ является линейной комбинацией точечных источников для уравнения (1.1), расположенных в точках Y_k , $k = 1, \dots, N$. Если выполнены условия леммы 3,

то $Q[\bar{\mu}](t, x)$ принадлежит классу G , удовлетворяет уравнению (1.1) в $(0, \infty) \times \mathcal{D}$ и начальным условиям задачи $\mathcal{K}$. Более того, $Q[\bar{\mu}](t, x)$ бесконечно дифференцируема по x в $\mathbb{R}^3 \setminus (\bigcup_{k=1}^N Y_k)$ и регулярна на бесконечности.

Решение задачи $\mathcal{K}$ ищем в виде

$$\mathcal{U}[\bar{\mu}](t, x) = U[\bar{\mu}](t, x) + Q[\bar{\mu}](t, x), \quad (2.5)$$

где $\bar{\mu}(t, x)$ определяется формулой (2.2), для $U[\bar{\mu}](t, x)$ справедливо представление (2.1), а $Q[\bar{\mu}](t, x)$ дается выражением (2.4).

Из указанных выше свойств функций, составляющих (2.5), вытекает

ЛЕММА 4. *Если выполнены условия леммы 3, то функция (2.5) принадлежит классу G , удовлетворяет уравнению (1.1) в области $(0, \infty) \times \mathcal{D}$ и начальным условиям задачи $\mathcal{K}$. Кроме того, если $\mathcal{D}$ – внешняя область, то функция (2.5) регулярна на бесконечности.*

Таким образом, $\mathcal{U}[\bar{\mu}](t, x)$ удовлетворяет всем условиям задачи $\mathcal{K}$, кроме граничного условия (1.2). Пользуясь формулами для предельных значений динамического потенциала двойного слоя на границе области [5] и удовлетворяя граничному условию (1.2), приходим к интегральному уравнению относительно функции $\mu(t, x)$

$$-\frac{1}{2}\mu(t, x) - (A\mu)(t, x) + (B\mu)(t, x) = f(t, x), \quad x \in \Gamma, \quad (2.6)$$

где $f(t, x) = (f_0(t, x))_{tt} \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$, $f_0(t, x) \in C_0^2([0, \infty); C^0(\Gamma))$. Через A и B обозначены следующие операторы

$$\begin{aligned} (A\mu)(t, x) &= \int_{\Gamma} \mu(t, y) \mathcal{A}(x, y) dS_y, & (B\mu)(t, x) &= (B_1\mu)(t, x) - (B_2\mu)(t, x), \\ (B_1\mu)(t, x) &= \int_0^t \int_{\Gamma} \mu(\tau, y) \mathcal{B}_1(t - \tau, x, y) dS_y d\tau, & (B_2\mu)(t, x) &= \int_0^t \mu(\tau, x) \mathcal{B}_2(t - \tau) d\tau, \\ \mathcal{B}_1(t - \tau, x, y) &= \mathcal{N}_{\tau y} W(t - \tau, x - y) + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N \delta_k(y) \frac{|x - Y_k|_0}{|x - Y_k|^2} J_1 \left((t - \tau) \frac{|x - Y_k|_0}{|x - Y_k|} \right), \\ \mathcal{B}_2(t) &= \frac{1}{2} \omega_1 \int_0^{\omega_1 t} J_1(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma}, & \mathcal{A}(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x - y|} + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N \delta_k(y) \frac{1}{|x - Y_k|}. \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{N}_{\tau y} W(t - \tau, x - y)$ – функция из (2.3) и

$$\delta_k(y) = \begin{cases} 1, & y \in \Gamma_k, \\ 0, & y \notin \Gamma_k. \end{cases}$$

Изучим некоторые свойства операторов A и B .

ЛЕММА 5.

- 1) Ядра $\mathcal{A}(x, y)$, $\mathcal{B}_1(t, x, y)$ непрерывны при $x \neq y$ и имеют слабую особенность при $x = y$, $\mathcal{B}_2(t) \in C^0[0, \infty)$.
- 2) Оператор A действует из $C^0(\Gamma)$ в $C^0(\Gamma)$ и ограничен.
- 3) Оператор B действует из $C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$ в $C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$.
- 4) Если $h(t, x) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$, то при любом $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$\|(Bh)(t, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} \leq c_B \left[\int_0^t \|h(\tau, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} d\tau + \int_0^t \int_0^{t_1} \|h(\tau, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} d\tau dt_1 \right], \quad (2.7)$$

где c_B – некоторая константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1) проверяется непосредственно. Ядро $\mathcal{A}(x, y)$ изучено в [15]. Свойства ядра $\mathcal{B}_1(t, x, y)$ вытекают из представления (2.3).

Пункт 2) следует из [15, § 17.4]] и п. 1), поскольку ядро оператора A – полярное.

Докажем п. 3). Пусть $h(t, x) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$. По лемме 2 $h(t, x) \in C^0([0, \infty) \times \Gamma)$. Положим

$$\begin{aligned} (B_1 h)(t, x) &= (\hat{B}h)(t, x) + (\check{B}h)(t, x), \\ (\hat{B}h)(t, x) &= \int_0^t \int_{\Gamma} h(\tau, y) \mathcal{N}_{\tau y} W(t - \tau, x - y) dS_y d\tau, \\ (\check{B}h)(t, x) &= \int_0^t \int_{\Gamma} h(\tau, y) (\mathcal{B}_1(t - \tau, x, y) - \mathcal{N}_{\tau y} W(t - \tau, x - y)) dS_y d\tau, \end{aligned}$$

так что $B = \hat{B} + \check{B} + B_2$. Из результатов [5, лемма 4.1.1] следует, что оператор $\hat{B}$ действует из $C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$ в $C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$. Из явного выражения для ядер $(\mathcal{B}_1(t - \tau, x, y) - \mathcal{N}_{\tau y} W(t - \tau, x - y))$ и $\mathcal{B}_2(t)$ вытекает, что эти ядра непрерывны. Поэтому операторы $\hat{B}$ и B_2 действуют из $C^0([0, \infty) \times \Gamma)$ в $C^0([0, \infty) \times \Gamma)$. С учетом леммы 2 операторы $\check{B}$ и B_2 действуют из $C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$ в $C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$. Тем самым, для оператора $B = \hat{B} + \check{B} + B_2$ справедлив п. 3) леммы.

Докажем п. 4). Пусть $\Gamma \in C^{1, \lambda_1} \subset C^{2, \lambda}$, $\lambda_1 \in (0, 1]$. При $x, y \in \Gamma$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |\mathcal{N}_{\tau y} W(t - \tau, x - y)| &\leq c_1 \frac{|\cos(x - y, \mathbf{n}_y)|}{|x - y|^2} [1 + (t - \tau)], \\ \mathcal{B}_1(t - \tau, x, y) &\leq c_1 \frac{|\cos(x - y, \mathbf{n}_y)|}{|x - y|^2} [1 + (t - \tau)] + c_2, \end{aligned}$$

где c_1, c_2 – некоторые константы и первая оценка следует из (2.3).

Пусть $h(t, x) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$, тогда для оператора B_1 справедлива оценка

$$\begin{aligned} |(B_1 h)(t, x)| &\leq \int_0^t \int_{\Gamma} |h(\tau, y)| \left\{ c_1 \frac{|\cos(x - y, \mathbf{n}_y)|}{|x - y|^2} [1 + (t - \tau)] + c_2 \right\} dS_y d\tau \\ &\leq \int_0^t \|h(\tau, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} \left\{ c_1 \int_{\Gamma} \frac{|\cos(x - y, \mathbf{n}_y)|}{|x - y|^2} dS_y [1 + (t - \tau)] + c_2 \int_{\Gamma} 1 dS_y \right\} d\tau \\ &\leq \int_0^t \|h(\tau, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} \{ \tilde{c}_1 [1 + (t - \tau)] + \tilde{c}_2 \} d\tau \\ &= \tilde{c}_1 \int_0^t \int_0^{t_1} \|h(\tau, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} d\tau dt_1 + (\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2) \int_0^t \|h(\tau, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} d\tau, \end{aligned}$$

где $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ – некоторые постоянные и использована лемма 2 из [15, § 27.4] о том, что интеграл

$$\int_{\Gamma} \frac{|\cos(x-y, \mathbf{n}_y)|}{|x-y|^2} dS_y$$

равномерно ограничен константой для всех $x \in \Gamma$. Беря от обеих частей неравенства супремум по $x \in \Gamma$, получим

$$\|(B_1 h)(t, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} \leq (\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2) \left\{ \int_0^t \int_0^{t_1} \|h(\tau, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} d\tau dt_1 + \int_0^t \|h(\tau, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} d\tau \right\}. \quad (2.8)$$

Аналогично,

$$\|(B_2 h)(t, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} \leq c_0 \left\{ \int_0^t \int_0^{t_1} \|h(\tau, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} d\tau dt_1 \right\}, \quad (2.9)$$

где c_0 – некоторая постоянная и использована равномерная ограниченность функции $J_1(t)/t$ при $t \geq 0$. Складывая два последних неравенства, докажем оценку (2.7).

В следующем пункте продолжим изучение операторов, входящих в интегральное уравнение (2.6).

3. Свойства операторов, входящих в интегральное уравнение. Рассмотрим на контуре Γ интегральное уравнение относительно функции $h(x) \in C^0(\Gamma)$

$$-\frac{1}{2}h(x) - (Ah)(x) = g(x), \quad x \in \Gamma, \quad (3.1)$$

где A – оператор из уравнения (2.6), а $g(x)$ принадлежит $C^0(\Gamma)$. По лемме 5 ядро оператора A полярное, а значит, уравнение (3.1) представляет собой уравнение Фредгольма второго рода. Докажем, что это уравнение однозначно разрешимо в $C^0(\Gamma)$. Для этого достаточно показать, что однородное уравнение (3.1) имеет только тривиальное решение. Доказательство проведем от противного. Пусть однородное уравнение имеет нетривиальное решение $h_0(x) \in C^0(\Gamma)$, для которого справедливо тождество

$$-\frac{1}{2}h_0(x) - (Ah_0)(x) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Запишем это тождество в виде

$$-\frac{1}{2}h_0(x) = \int_{\Gamma} h_0(y) \mathcal{A}_1(x, y) dS_y + \int_{\Gamma} h_0(y) \mathcal{A}_2(x, y) dS_y, \quad (3.2)$$

где

$$\mathcal{A}_1(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x-y|}, \quad \mathcal{A}_2(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N \delta_k(y) \frac{1}{|x-Y_k|}.$$

Покажем, что $h_0(x) \in C^{1,\omega}(\Gamma)$ с $\omega \in (0, 1)$. Действительно, второй интегральный член в правой части (3.2) бесконечно дифференцируем по x , так как он не имеет особенности при $x = y$. Согласно [17, теорема 2.15] первый интегральный член в правой части (3.2) будет гёльдеровской функцией по x на Γ . Из тождества (3.2) для функции $h_0(x)$ вытекает, что $h_0(x)$ также будет гёльдеровской функцией по x на Γ . Воспользовавшись [17, теорема 2.22], убеждаемся в том, что первый интегральный член в (3.2) принадлежит $C^{1,\omega}(\Gamma)$ по x для некоторого $\omega \in (0, 1)$. Теперь из тождества (3.2) для функции $h_0(x)$ получим $h_0(x) \in C^{1,\omega}(\Gamma)$, $\omega \in (0, 1)$. Тем самым, доказана

ЛЕММА 6. *Всякое решение однородного уравнения (3.1) ($c \equiv 0$) в $C^0(\Gamma)$ автоматически принадлежит $C^{1,\omega}(\Gamma)$, где $\omega \in (0, 1)$.*

Рассмотрим гармоническую в $\mathcal{D}$ функцию, построенную с использованием $h_0(x)$ и представляющую собой линейную комбинацию потенциала двойного слоя и точечных источников, расположенных внутри поверхностей Γ_k в точках Y_k ,

$$v[h_0](x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} h_0(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x-y|} dS_y - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} h_0(y) dS_y \frac{1}{|x-Y_k|}.$$

Эта функция принадлежит $C^0(\overline{\mathcal{D}}) \cap C^2(\mathcal{D})$ и удовлетворяет всем условиям однородной задачи Дирихле

$$\Delta v(x) = 0, \quad x \in \mathcal{D}, \quad v|_{\Gamma} = 0.$$

Кроме того, если $\mathcal{D}$ – внешняя область, то

$$|v(x)| = O(|x|^{-1}) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty.$$

Заметим, что при удовлетворении граничному условию $v|_{\Gamma} = 0$ получим тождество (3.2). В силу принципа максимума для гармонических функций решение этой однородной задачи Дирихле единственно. Следовательно,

$$v[h_0](x) \equiv 0, \quad x \in \overline{\mathcal{D}}. \quad (3.3)$$

Через $\mathcal{D}_j$ обозначим внутреннюю односвязную область, ограниченную поверхностью Γ_j , $j = 1, \dots, N$. Пусть $\mathcal{J}$ – простая гладкая замкнутая поверхность, лежащая в области $\mathcal{D}$ и охватывающая из всех поверхностей, составляющих Γ , только поверхность Γ_j . Полагая, что $\mathbf{n}_x$ – непрерывное поле нормалей на поверхности $\mathcal{J}$, вычислим

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{J}} \frac{\partial v[h_0](x)}{\partial \mathbf{n}_x} dS_x = 0 &= - \int_{\Gamma_j} h_0(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{J}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{1}{|x-y|} dS_x \right) dS_y \\ &\quad - \int_{\Gamma_j} h_0(y) dS_y \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{J}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{1}{|x-Y_j|} dS_x. \end{aligned}$$

Здесь учтено следующее свойство гармонических функций: если функция $V(x)$ гармоническая внутри поверхности $\mathcal{J}$ и $\nabla V(x)$ непрерывно продолжается на $\mathcal{J}$ изнутри, то

$$\int_{\mathcal{J}} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}_x} dS_x = 0.$$

Примем во внимание, что по формуле Остроградского–Гаусса

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{J}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{1}{|x-y|} dS_x = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{J}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{1}{|x-Y_j|} dS_x = \pm 1,$$

где знак зависит от выбора направления поля нормалей $\mathbf{n}_x$ на поверхности $\mathcal{J}$. Следовательно,

$$\int_{\mathcal{J}} \frac{\partial v[h_0](x)}{\partial \mathbf{n}_x} dS_x = \mp \int_{\Gamma_j} h_0(y) dS_y = 0.$$

В результате получаем тождество

$$\int_{\Gamma_j} h_0(y) dS_y = 0, \quad (3.4)$$

которое гарантирует, что функция $v[h_0](x)$ не содержит внутри поверхности Γ_j точечного источника. Поэтому $v[h_0](x)$ – гармоническая в $\mathcal{D}_j$ функция. По лемме 6 $h_0(x) \in C^{1,\omega}(\Gamma)$. Как показано в [17, теорема 2.23], при такой плотности $h_0(x)$ первые производные потенциала двойного слоя в $v[h_0](x)$ непрерывно продолжимы на Γ_j изнутри и извне. Более того,

$$\lim_{\substack{x^1 \rightarrow x \in \Gamma_j \\ x^1 \in \mathcal{D}}} \frac{\partial v[h_0](x^1)}{\partial \mathbf{n}_x} = \lim_{\substack{x^1 \rightarrow x \in \Gamma_j \\ x^1 \in \mathcal{D}_j}} \frac{\partial v[h_0](x^1)}{\partial \mathbf{n}_x} = 0,$$

где учтено (3.3). Очевидно, функция $v[h_0](x)$ удовлетворяет следующей задаче Неймана в области $\mathcal{D}_j$:

$$\Delta v(x) = 0, \quad x \in \mathcal{D}_j; \quad \left. \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma_j} = 0.$$

Известно [15], что решением такой задачи является константа, т. е.

$$v[h_0](x) \equiv \text{const} = c, \quad x \in \mathcal{D}_j.$$

Применяя теорему о скачке потенциала двойного слоя и пользуясь (3.3), получим

$$\lim_{\substack{x^1 \rightarrow x \in \Gamma_j \\ x^1 \in \mathcal{D}}} v[h_0](x^1) - \lim_{\substack{x^1 \rightarrow x \in \Gamma_j \\ x \in \mathcal{D}_j}} v[h_0](x^1) = -h_0(x) = -c,$$

так что $h_0(x) = c$ на Γ_j . Из (3.4) вытекает, что $c = 0$. Поэтому $h_0(x) \equiv 0$ на Γ_j . Напомним, что Γ_j , $j = 1, \dots, N$, – произвольная замкнутая поверхность, принадлежащая Γ . Следовательно, $h_0(x) \equiv 0$ на $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$. Таким образом, $h_0(x) \equiv 0$ на Γ , если $\mathcal{D}$ – внешняя область, и $h_0(x) \equiv 0$ на $\Gamma \setminus \Gamma_0$, если $\mathcal{D}$ – внутренняя область. Осталось выяснить, чему равно $h_0(x)$ на Γ_0 в случае, когда $\mathcal{D}$ – внутренняя область.

Пусть $\mathcal{D}$ – внутренняя область; тогда $h_0(x) \equiv 0$ на $\Gamma \setminus \Gamma_0$ и функция $v[h_0](x)$ принимает вид потенциала двойного слоя

$$v[h_0](x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_0} h_0(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x-y|} dS_y.$$

Пусть $\mathcal{D}_0$ – внешняя односвязная область, ограниченная поверхностью Γ_0 . Потенциал $v[h_0](x)$ гармонический в $\mathcal{D}_0$ и $v(x) = O(|x|^{-1})$, $\nabla v(x) = O(|x|^{-2})$ при $|x| \rightarrow \infty$. Учитывая гладкость $h_0(x)$ на Γ , гарантированную леммой 6, и применяя [14, теорема 2.23], получим

$$\lim_{\substack{x^1 \rightarrow x \in \Gamma_0 \\ x^1 \in \mathcal{D}}} \frac{\partial v[h_0](x^1)}{\partial \mathbf{n}_x} = \lim_{\substack{x^1 \rightarrow x \in \Gamma_0 \\ x^1 \in \mathcal{D}_0}} \frac{\partial v[h_0](x^1)}{\partial \mathbf{n}_x} = 0,$$

где использовано (3.3). Следовательно, функция $v[h_0](x)$ удовлетворяет следующей задаче Неймана в $\mathcal{D}_0$:

$$\Delta v(x) = 0, \quad x \in \mathcal{D}_0, \quad \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{\Gamma_0} = 0,$$

$$v(x) = O(|x|^{-1}), \quad \nabla v(x) = O(|x|^{-2}), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Известно [15], что эта задача имеет только тривиальное решение: $v[h_0](x) \equiv 0$ в $\mathcal{D}_0$. Пользуясь теоремой о скачке потенциала двойного слоя [15] и пользуясь (3.3), получим

$$\lim_{\substack{x^1 \rightarrow x \in \Gamma_0 \\ x^1 \in \mathcal{D}}} v[h_0](x^1) - \lim_{\substack{x^1 \rightarrow x \in \Gamma_0 \\ x^1 \in \mathcal{D}_0}} v[h_0](x^1) = -h_0(x) = 0,$$

так что $h_0(x) \equiv 0$ на Γ_0 , если $\Gamma_0 \subset \Gamma$. С учетом предыдущих результатов $h_0(x) \equiv 0$ на Γ как в случае внешней, так и в случае внутренней области $\mathcal{D}$.

Тем самым мы приходим к противоречию с предположением о том, что $h_0(x)$ – нетривиальное решение однородного уравнения (3.1) ($g \equiv 0$). Таким образом, однородное уравнение (3.1) имеет только тривиальное решение. Ввиду фредгольмовости уравнения (3.1) справедлива

ЛЕММА 7. *Уравнение (3.1) однозначно разрешимо в $C^0(\Gamma)$ при любой правой части $g(x) \in C^0(\Gamma)$.*

Оператор, обратный к $(-1/2 - A)$, обозначим $(-1/2 - A)^{-1}$, тогда решение уравнения (3.1) запишем в виде

$$h(x) = \left(\left(-\frac{1}{2} - A \right)^{-1} g \right)(x).$$

Пусть $g(t, x) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$. Рассмотрим аналог уравнения (3.1) относительно функции $h(t, x) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$

$$-\frac{1}{2}h(t, x) - (Ah)(t, x) = g(t, x). \quad (3.5)$$

Для каждого фиксированного t оператор $(-1/2 - A)$ обратим,

$$h(t, x) = \left(\left(-\frac{1}{2} - A \right)^{-1} g \right)(t, x) \quad (3.6)$$

и при каждом t выполняется условие $h(t, x) \in C^0(\Gamma)$.

Поскольку оператор $(-1/2 - A)$ линейный и ограниченный в $C^0(\Gamma)$ (см. п. 2 леммы 5), то по теореме Банаха [18, с. 59] линейный оператор $(-1/2 - A)^{-1}$ также ограничен в $C^0(\Gamma)$. Поэтому при каждом $t \geq 0$ имеет место оценка

$$\|h(t, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} \leq c_A \|g(t, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)}, \quad (3.7)$$

где c_A – константа. Из ограниченности оператора $(-1/2 - A)^{-1}$ следует его непрерывность. Это значит, что если

$$\|g(t, \cdot) - g(t_0, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0,$$

то для функций $h(t, x)$, $h(t_0, x)$, найденных по формуле (3.6), справедливо соотношение

$$\|h(t, \cdot) - h(t_0, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0.$$

Отсюда следует, что $h(t, x) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$. Тем самым, справедлива

ЛЕММА 8. Если $g(t, x) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$, то уравнение (3.5) имеет единственное решение $h(t, x)$ из класса $C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$, которое удовлетворяет оценке (3.7).

4. Решение интегрального уравнения и теорема существования. Решение интегрального уравнения (2.6) будем искать в виде ряда [6]

$$\mu(t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m(t, x), \quad (4.1)$$

где функции $\mu_m(t, x) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$ определяются последовательно из равенств, получающихся после подстановки (4.1) в (2.6):

$$-\frac{1}{2}\mu_0(t, x) - (A\mu_0)(t, x) = f(t, x), \quad (4.2)$$

$$-\frac{1}{2}\mu_m(t, x) - (A\mu_m)(t, x) = -(B\mu_{m-1})(t, x), \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Поскольку оператор A не зависит от t , эта переменная в уравнениях (4.2), (4.3) играет роль параметра.

Так как функция $f(t, x) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$, то согласно лемме 8 уравнение (4.2) имеет единственное решение $\mu_0(t, x) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$, для которого справедливо неравенство

$$\|\mu_0(t, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} \leq c_A \|f(t, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} \leq c_A \|f\|_{C^0([0, t]; C^0(\Gamma))}. \quad (4.4)$$

Норма в банаховом пространстве $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$ определяется соотношением

$$\|\cdot\|_{C^0([0, T]; C^0(\Gamma))} = \|\|\cdot\|_{C^0(\Gamma)}\|_{C^0[0, T]}.$$

Подставляя найденное $\mu_0(t, x)$ в правую часть уравнения (4.3), получим уравнение относительно $\mu_1(t, x)$:

$$-\frac{1}{2}\mu_1(t, x) - (A\mu_1)(t, x) = -(B\mu_0)(t, x). \quad (4.5)$$

В силу п. 3) леммы 5 выполняется условие $(B\mu_0)(t, x) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$. Согласно лемме 8 уравнение (4.5) имеет единственное решение

$$\mu_1(t, x) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma)).$$

Кроме того, по леммам 5, 8 функция $\mu_1(t, x)$ удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} \|\mu_1(t, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} &\leq c_A \|(B\mu_0)(t, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} \\ &\leq c_A c_B \left[\int_0^t \|\mu_0(\tau, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} d\tau + \int_0^t \int_0^{t_1} \|\mu_0(\tau, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} d\tau dt_1 \right]. \end{aligned}$$

Далее рассуждения проводятся по индукции. Пусть $\mu_{m-1}(t, x) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$, тогда $\mu_m(t, x)$ должно удовлетворять уравнению (4.3). По лемме 5

$$(B\mu_{m-1})(t, x) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma)).$$

По лемме 8 уравнение (4.3) имеет единственное решение $\mu_m(t, x) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$. По леммам 5, 8 это решение удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} \|\mu_m(t, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} &\leq c_A c_B \left[\int_0^t \|\mu_{m-1}(\tau, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} d\tau + \int_0^t \int_0^{t_1} \|\mu_{m-1}(\tau, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} d\tau dt_1 \right] \\ &\leq c_A^2 c_B^2 \left[\int_0^t \int_0^{t_1} \|\mu_{m-2}(\tau, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} d\tau dt_1 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_3} \|\mu_{m-2}(\tau, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} d\tau dt_3 dt_2 dt_1 \right] \leq \dots \\ &\leq c_A^m c_B^m \left[\int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{m-1}} \|\mu_0(\tau, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} d\tau dt_{m-1} \dots dt_1 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{2m-1}} \|\mu_0(\tau, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} d\tau dt_{2m-1} \dots dt_1 \right] \\ &\leq c_A^{m+1} c_B^m \|f\|_{C^0([0, t]; C^0(\Gamma))} \left[\int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{m-1}} d\tau dt_{m-1} \dots dt_1 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{2m-1}} d\tau dt_{2m-1} \dots dt_1 \right] \\ &= c_A \|f\|_{C^0([0, t]; C^0(\Gamma))} \left(\frac{(c_B c_A t)^m}{m!} + \frac{(\sqrt{c_B c_A t})^{2m}}{(2m)!} \right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где использовано неравенство (4.4).

Таким образом, все функции $\mu_m(t, x)$, образующие ряд (4.1), находятся последовательно. В силу леммы 2 каждая из функций $\mu_m(t, x)$ принадлежит $C^0([0, \infty) \times \Gamma)$. Кроме того, каждая из них удовлетворяет неравенству (4.6).

Покажем, что ряд (4.1) сходится абсолютно и равномерно в $[0, T] \times \Gamma$ при любом $T > 0$. Для этого воспользуемся теоремой Вейерштрасса [19] и мажорируем члены ряда (4.1) членами сходящегося числового ряда. Применяя неравенство (4.6), получим, что для любых $(t, x) \in [0, T] \times \Gamma$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |\mu_m(t, x)| &\leq \|\mu_m(t, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} \leq \sup_{t \in [0, T]} \|\mu_m(t, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} = \|\mu_m\|_{C^0([0, T]; C^0(\Gamma))} \\ &\leq c_A \left[\frac{(c_A c_B T)^m}{m!} + \frac{(\sqrt{c_A c_B T})^{2m}}{(2m)!} \right] \|f\|_{C^0([0, T]; C^0(\Gamma))}. \end{aligned}$$

Тем самым каждый член ряда (4.1) мажорируется на множестве $[0, T] \times \Gamma$ членом числового ряда

$$c_A \|f\|_{C^0([0, T]; C^0(\Gamma))} \left[\frac{(c_A c_B T)^m}{m!} + \frac{(\sqrt{c_A c_B T})^{2m}}{(2m)!} \right],$$

который сходится и его сумма равна

$$c_A \|f\|_{C^0([0, T]; C^0(\Gamma))} [\exp(c_A c_B T) + \operatorname{ch}(\sqrt{c_A c_B T})].$$

Следовательно, по теореме Вейерштрасса ряд (4.1) сходится абсолютно и равномерно на множестве $[0, T] \times \Gamma$ при любом $T > 0$. Отсюда с учетом непрерывности членов ряда вытекает возможность почленного интегрирования ряда при подстановке его в уравнение (2.6). При этом ряды, полученные в результате, также будут сходиться абсолютно и равномерно [19] в $[0, T] \times \Gamma$ при любом $T > 0$, а значит, их члены можно суммировать в произвольном порядке. В силу справедливости цепочки равенств (4.2), (4.3) уравнение (2.6) обращается в тождество. Тем самым функция $\mu(t, x)$, определяемая как сумма ряда (4.1), действительно удовлетворяет уравнению (2.6), потому что все формальные операции по подстановке (4.1) в (2.6) обоснованы.

По теореме о непрерывности суммы ряда [19] из равномерной сходимости ряда (4.1) в $[0, T] \times \Gamma$ при любом $T > 0$ и непрерывности его членов в $[0, \infty) \times \Gamma$ следует, что $\mu(t, x) \in C^0([0, \infty) \times \Gamma)$. В свою очередь, по лемме 2 выполняется условие $\mu(t, x) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$. В результате искомое решение уравнения (2.6) построено.

ТЕОРЕМА 2. *При любой функции $f(t, x) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$ уравнение (2.6) имеет решение $\mu(t, x) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$.*

Заметим, что всякой функции $f_0(t, x) \in C_0^2([0, \infty); C^0(\Gamma))$ из граничного условия (1.2) задачи $\mathcal{H}$ отвечает функция $f(t, x) = [f_0(t, x)]_{tt} \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$, стоящая в правой части интегрального уравнения (2.6).

Теорема 2 гарантирует существование решения $\mu(t, x)$ интегрального уравнения (2.6) из требуемого класса гладкости. Следовательно, потенциал (2.5), построенный на этой функции $\mu(t, x)$, удовлетворяет граничному условию задачи $\mathcal{H}$. Кроме того, по лемме 4 построенный таким образом потенциал (2.5) принадлежит классу гладкости G и удовлетворяет всем остальным условиям задачи $\mathcal{H}$. Справедлива

ТЕОРЕМА 3. *При любой функции $f_0(t, x) \in C_0^2([0, \infty); C^0(\Gamma))$ классическое решение задачи $\mathcal{H}$ существует и дается формулой (2.5), где плотность $\mu(t, x) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$ является решением интегрального уравнения (2.6), которое всегда разрешимо.*

Можно показать, что если $f_0(t, x) \in C_0^2([0, \infty); C^{1,\lambda}(\Gamma))$, $\lambda \in (0, 1]$, то решение задачи $\mathcal{H}$, построенное в теореме 3, принадлежит классу гладкости G_1 . В этом случае по теореме 1 решение задачи $\mathcal{H}$ единственно.

5. О фредгольмовости интегрального уравнения. В предыдущем пункте была установлена разрешимость интегрального уравнения (2.6), однако остался открытым вопрос о числе его решений. Покажем, что уравнение (2.6) однозначно разрешимо, так как это, в частности, очень важно при численной реализации предлагаемого метода.

Рассмотрим уравнение (2.6) в банаховом пространстве $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$ при произвольном $T > 0$.

Пусть $\mu(t, x) \in C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$, тогда функция $(A\mu)(t, x)$ непрерывна при каждом t по x . Кроме того, принимая во внимание п. 1 леммы 5, имеем

$$\|(A\mu)(t, \cdot) - (A\mu)(t_0, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} \leq \text{const} \|\mu(t, \cdot) - \mu(t_0, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)},$$

$$\|(A\mu)(\cdot, \cdot)\|_{C^0([0, T]; C^0(\Gamma))} \leq \text{const} \|\mu(\cdot, \cdot)\|_{C^0([0, T]; C^0(\Gamma))}.$$

С учетом гладкости функции $\mu(t, x)$ отсюда следует, что оператор A отображает пространство $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$ в себя и при этом ограничен. Из леммы 8 вытекает обратимость оператора $(-1/2 - A)$ в $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$, а из теоремы Банаха [18, с. 59] – ограниченность оператора $(-1/2 - A)^{-1}$ в этом пространстве.

Воспользовавшись аналогом теоремы Арцела для абстрактных функций [16, с. 32], несложно показать, что оператор B из (2.6) компактен как оператор, отображающий пространство $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$ в себя (доказательство дано в п. 6). С учетом обратимости оператора $(-1/2 - A)$ заметим, что уравнение (2.6) эквивалентно следующему уравнению

$$\mu(t, x) + \left(\left(-\frac{1}{2} - A \right)^{-1} B \mu \right)(t, x) = \left(\left(-\frac{1}{2} - A \right)^{-1} f \right)(t, x), \quad (5.1)$$

где $\mu(t, x), ((-1/2 - A)^{-1} f)(t, x) \in C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$.

В силу отмеченных выше ограниченности оператора $(-1/2 - A)^{-1}$ и компактности оператора B в $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$ оператор $(-1/2 - A)^{-1} B$ будет компактным в этом пространстве [18], а уравнение (5.1) является в нем уравнением Фредгольма второго рода. Очевидно, что уравнения (2.6) и (5.1) имеют одни и те же решения.

Вследствие обратимости оператора $(-1/2 - A)^{-1}$ областью его значений будет все пространство $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$. Таким образом, функция $((-1/2 - A)^{-1} f)(t, x)$, стоящая в правой части (5.1), может быть произвольной функцией из пространства $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$. И для этой произвольной функции уравнение (5.1) разрешимо, так как по теореме 2 разрешимо эквивалентное ему уравнение (2.6). Из альтернативы Фредгольма вытекает, что безусловно разрешимое уравнение Фредгольма является однозначно разрешимым. Следовательно, (5.1) – однозначно разрешимое уравнение, а значит, и эквивалентное ему уравнение (2.6) тоже однозначно разрешимо. Вследствие произвольности $T > 0$ приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 4. *Уравнение (2.6) эквивалентно уравнению Фредгольма (5.1) и однозначно разрешимо в $C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$.*

6. О компактности оператора B . В этом пункте будет доказана

ЛЕММА 9. *При любом $T > 0$ оператор B компактен как оператор, действующий в $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$.*

Для доказательства леммы достаточно доказать компактность операторов B_1 и B_2 в банаховом пространстве $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$, тогда и оператор B будет компактным.

Пусть M – ограниченное множество абстрактных функций $h(t, x)$ в банаховом пространстве $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$, т.е. существует константа c_M такая, что

$$\|h(\cdot, \cdot)\|_{C^0([0, T]; C^0(\Gamma))} < c_M, \quad h \in M.$$

Операторы B_1 и B_2 будут компактными, если множества $B_1 M$ и $B_2 M$ компактны. Для выяснения компактности этих множеств воспользуемся следующим аналогом теоремы Арцела для абстрактных функций [16, с. 32].

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Для того чтобы множество $\mathcal{L} \in C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$ было компактным, необходимо и достаточно выполнения двух условий:*

- 1) *функции множества $\mathcal{L}$ равномерно ограничены, т.е. существует такая константа c , что*

$$\|g(\cdot, \cdot)\|_{C^0([0, T]; C^0(\Gamma))} < c, \quad g(t, x) \in \mathcal{L};$$

- 2) функции множества $\mathcal{L}$ равностепенно непрерывны, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если $|t_2 - t_1| < \delta$; $t_1, t_2 \in [0, T]$, то сразу для всех $g(t, x) \in \mathcal{L}$ справедливо неравенство

$$\|g(t_2, \cdot) - g(t_1, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} < \varepsilon.$$

Равномерную ограниченность множеств $B_1 M$ и $B_2 M$ в $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$ легко получить с учетом оценок (2.8), (2.9) и равномерной ограниченности множества M в этом пространстве.

Исследуем равностепенную непрерывность $B_2 M$. Используя (2.9), получаем

$$\begin{aligned} & \| (B_2 h)(t_2, \cdot) - (B_2 h)(t_1, \cdot) \|_{C^0(\Gamma)} \\ & \leq \left\| \int_{t_t}^{t_2} \mathcal{B}_2(t_2 - \tau) h(\tau) d\tau \right\|_{C^0(\Gamma)} + \left\| \int_0^{t_1} (\mathcal{B}_2(t_2 - \tau) - \mathcal{B}_2(t_1 - \tau)) h(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{C^0(\Gamma)} \\ & \leq c_M c_1 T |t_2 - t_1| + c_M \int_0^T |\mathcal{B}_2(t_2 - \tau) - \mathcal{B}_2(t_1 - \tau)| d\tau \\ & \leq 2c_M c_1 T |t_2 - t_1|, \quad h \in M, \quad t_1, t_2 \in [0, T], \end{aligned}$$

где

$$c_1 = \frac{1}{2} \omega_1^2 \|J_1(\cdot)(\cdot)^{-1}\|_{C^0[0, T]}.$$

По произвольному $\varepsilon > 0$ выберем $\delta = \varepsilon / (2c_M c_1 T)$. Тогда если $|t_2 - t_1| < \delta$, $t_2, t_1 \in [0, T]$, то

$$\| (B_2 h)(t_2, \cdot) - (B_2 h)(t_1, \cdot) \|_{C^0(\Gamma)} \leq \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ множество $B_2 M$ является равностепенно непрерывным, а оператор B_2 – компактным.

Для исследования равностепенной непрерывности множества $B_1 M$ заметим, что

$$\begin{aligned} (B_1 h)(t_2, x) - (B_1 h)(t_1, x) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} (B_1 h)(t, x) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^t \int_{\Gamma} h(\tau, y) \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{B}_1(t - \tau, x, y) dS_y d\tau dt. \end{aligned}$$

Из явного выражения для $\mathcal{B}_1(t, x, y)$ и формулы (2.3) получим оценку

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{B}_1(t - \tau, x, y) \right| \leq c_0 \left[\frac{|\cos(x - y, \mathbf{n}_y)|}{4\pi|x - y|^2} + 1 \right],$$

где c_0 – некоторая константа. Согласно лемме 2 из [15, § 27.4] если $\Gamma \in C^{1, \lambda_1} \subset C^{2, \lambda}$, то существует такая константа $\tilde{c}_0$, что сразу для всех $x \in \Gamma$ справедливо неравенство

$$c_0 \int_{\Gamma} \left[\frac{|\cos(x - y, \mathbf{n}_y)|}{4\pi|x - y|^2} + 1 \right] dS_y \leq \tilde{c}_0.$$

Следовательно,

$$\|(B_1 h)(t_2, \cdot) - (B_1 h)(t_1, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} \leq c_M \tilde{c}_0 T |t_2 - t_1|.$$

Теперь по произвольному $\varepsilon > 0$ выберем $\delta = \varepsilon / (c_M \tilde{c}_0 T)$. Тогда если $|t_2 - t_1| < \delta$, $t_2, t_1 \in [0, T]$, то

$$\|(B_1 h)(t_2, \cdot) - (B_1 h)(t_1, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} \leq \varepsilon.$$

В силу произвольности ε множество $B_1 M$ будет равномерно непрерывным, а оператор B_1 – компактным. Из компактности операторов B_1 и B_2 следует справедливость леммы 9.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Габов С. А., Шевцов П. В. Основные краевые задачи для уравнения колебаний стратифицированной жидкости // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268. № 6. С. 1293–1296.
- [2] Габов С. А., Шевцов П. В. Об одном дифференциальном уравнении типа уравнения С. Л. Соболева // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 1. С. 14–17.
- [3] Крутицкий П. А. Сведение второй начально-краевой задачи для уравнения гравитационно-гироскопических волн к однозначно-разрешимому интегральному уравнению // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 10. С. 1386–1395.
- [4] Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г. Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.
- [5] Габов С. А., Свешников А. Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
- [6] Капитонов В. В. Теория потенциала для уравнения малых колебаний вращающейся жидкости // Матем. сб. 1979. Т. 109. № 4. С. 607–628.
- [7] Крутицкий П. А. Явное решение задачи Дирихле для уравнения составного типа в многосвязной области // Докл. РАН. 1992. Т. 325. № 3. С. 426–431.
- [8] Крутицкий П. А. Об одной начально-краевой задаче, описывающей колебания системы пластин в стратифицированной вращающейся жидкости // Математический анализ и дифференциальные уравнения. (сб. трудов). Новосибирск: Новосиб. Гос. ун-т, 1991. С. 73–88.
- [9] Krutitskii P. A. An explicit solution of the pseudohyperbolic initial boundary value problem in a multiply connected region // Math. Meth. Appl. Sci. 1995. V. 18. № 11. P. 897–925.
- [10] Крутицкий П. А. Первая начально-краевая задача для уравнения гравитационно-гироскопических волн в многосвязной области // ЖВМиМФ. 1997. Т. 37. № 1. С. 117–128.
- [11] Крутицкий П. А. Внешняя начально-краевая задача для одного эволюционного уравнения в многосвязной области // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 12. С. 1624–1634.
- [12] Крутицкий П. А. Вторая начально-краевая задача для уравнения гравитационно-гироскопических волн во внешней области // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 1. С. 40–57.
- [13] Бреховских А. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982.
- [14] Le Blond P. H., Mysak L. A. Waves in the Ocean. Amsterdam: Elsevier, 1978.
- [15] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
- [16] Соболев С. Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. М.: Наука, 1989.
- [17] Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
- [18] Крейн С. Г. Функциональный анализ. М.: Наука, 1964.
- [19] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1973.