Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Махнев, Аффинные овоиды и расширения обобщенных четырехугольников, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 2, 266–271

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm943>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 03:50:35

УДК 519.14

АФФИННЫЕ ОВОИДЫ И РАСШИРЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

А. А. Махнев

Подмножество вершин Δ обобщенного четырехугольника порядка (s, t) называется гипервалом, если каждая прямая пересекает Δ по 0 или 2 точкам. Гипервал Δ называется аффинным овоидом, если $|\Delta| = 2st$. Хорошо известно, что μ -подграфы в треугольных расширениях обобщенных четырехугольников являются гипервалами. Доказано, что если $\mathcal{S}$ является треугольным расширением для $GQ(s, t)$ с вполне регулярным точечным графом Γ , имеющим $\mu = 2st$, то s четно, Γ является r -антиподальным графом диаметра 3 с $r = 1 + s/2$ и либо $s = 2$, либо $t = s + 2$.

Библиография: 8 названий.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Пусть X – некоторое множество вершин графа Γ . В данной работе *подграф* X будет обозначать подграф, индуцированный Γ на X . Если a, b вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначим расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ – подграф на множестве всех вершин графа Γ , которые находятся на расстоянии i от вершины a . Подграф $\Gamma_1(a)$ мы будем называть *окрестностью* вершины a и обозначать через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначим подграф $\{a\} \cup [a]$.

Валентностью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ назовем *регулярным валентности k* , если валентность любой вершины a из Γ равна k . Граф Γ назовем *реберно регулярным* с параметрами (v, k, λ) , если он содержит v вершин, регулярен валентности k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ *вполне регулярен* с параметрами (v, k, λ, μ) , если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b , находящихся на расстоянии 2 в Γ . Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным*. Полный многодольный граф с n долями порядка t назовем $K_{n \times t}$ -графом. Подграф $[a] \cap [b]$ назовем (λ) - μ -подграфом, если вершины a, b (смежны) находятся на расстоянии 2.

Геометрией ранга 2 называется система инцидентности $\mathcal{S} = (P, B)$ с множеством точек P и семейством подмножеств B из P (называемых *блоками*). Две точки из P называются *коллинеарными*, если они лежат в общем блоке (заметим, что точка коллинеарна себе). Коллинеарность точек x и y (двойственно, факт пересечения блоков L и M) мы будем обозначать как $x \sim y$ (соответственно $L \sim M$). Для точки x положим $x^\perp = \{y \in P \mid y \sim x\}$. *Вычетом геометрии $\mathcal{S}$ в точке x* называется геометрия

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00462.

$\mathcal{S}_x = (P_x, B_x)$, где $P_x = x^\perp - \{x\}$, $B_x = \{L - \{x\} \mid x \in L, L \in B\}$. Геометрия называется *треугольной*, если любые ее три попарно коллинеарные точки лежат в общем блоке. Пусть $\mathcal{F}$ – класс геометрий ранга 2. Геометрия $\mathcal{S}$ называется $\mathcal{F}$ -расширением, если вычет $\mathcal{F}$ в каждой точке принадлежит $\mathcal{F}$. Если $a \in P$, $L \in B$ и $a \notin L$, то пара (a, L) называется *антифлагом*. Число точек из L , коллинеарных с a , обозначается через $f(a, L)$. Геометрия G называется φ -однородной, если $f(a, L) = 0$ или $f(a, L) = \varphi$ для любого антифлага (a, L) ; G называется *сильно φ -однородной*, если $f(a, L) = \varphi$ для любого антифлага (a, L) . Если в некоторой геометрии любые два различных блока пересекаются не более чем по одной точке, то множество блоков будем называть множеством прямых.

Геометрия, состоящая из точек и прямых, называется *обобщенным четырехугольником порядка (s, t)* , если каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой (две прямые пересекаются не более чем по одной точке) и для любой точки a , не лежащей на прямой L , найдется единственная прямая, проходящая через a и пересекающая L (геометрия сильно 1-однородна). Через $GQ(s, t)$ будем обозначать класс всех обобщенных четырехугольников порядка (s, t) .

Пусть $\mathcal{S}$ является обобщенным четырехугольником порядка (s, t) . *Точечным графом $\mathcal{S}$* называется граф, вершинами которого являются точки $\mathcal{S}$, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф Γ для $\mathcal{S}$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s + 1)(st + 1)$, $k = s(t + 1)$, $\lambda = s - 1$, $\mu = t + 1$. Подграф Δ из Γ называется *гиперовалом*, если каждая прямая пересекает Δ по 0 или 2 точкам (при этом прямая называется *внешней* или *секущей* соответственно). Хорошо известно [1], что $\min\{2(t + 1), (s + 1)(t + 2 - s)\} \leq |\Delta| \leq 2(st + 1)$. Если $|\Delta| = 2(t + 1)$, то Δ является двойственной решеткой $K_{2 \times (t+1)}$, если же $|\Delta| = 2(st + 1)$, то каждая прямая $\mathcal{S}$ пересекает Δ по двум точкам и Δ называется *двойным овоидом*. Гиперовал Δ называется *аффинным овоидом*, если $|\Delta| = 2st$. Для любого аффинного овоида Δ найдется точка a такая, что множество внешних прямых совпадает с множеством прямых $\mathcal{S}$, проходящих через a . Точка a называется бесконечно удаленной от Δ . Таким образом, Δ является двойным овоидом “аффинного обобщенного четырехугольника” $\mathcal{S} - a^\perp$.

Изучение треугольных (2-однородных) $GQ(s, t)$ -расширений эквивалентно изучению локально $GQ(s, t)$ -графов, т.е. графов, в которых окрестности вершин изоморфны точечным графам обобщенных четырехугольников порядка (s, t) . Обзор результатов по расширениям обобщенных четырехугольников можно найти в [1]. Особенно просто устроены $GQ(1, t)$ -расширения. Это геометрии вершин и 3-клик графов $K_{3 \times (t+1)}$. Пусть $\mathcal{S}$ является треугольным $GQ(s, t)$ -расширением с точечным графом Γ . Тогда любой μ -подграф $\Delta = [a] \cap [b]$ является гиперовалом в обобщенных четырехугольниках $[a]$ и $[b]$. Экстремальные случаи $|\Delta| = 2(t + 1)$ и $|\Delta| = 2(st + 1)$ рассматривались в работах [2], [3]. При этом в [3] классифицированы все флаг-транзитивные расширения обобщенных четырехугольников. Эти расширения (в случае $s > 2$) приведены в примерах 1, 2.

ПРИМЕР 1. Пусть геометрия $\mathcal{G}$ – флаг-транзитивное $GQ(s, t)$ -расширение с $s > 2$ и μ -подграфами, являющимися двойственными решетками $K_{2 \times (t+1)}$. Тогда возможны только следующие случаи:

- 1) $\mathcal{G}$ является локально $W(3)$ с группой автоморфизмов $U_5(2).2$;
- 2) $\mathcal{G}$ является локально $H_3(p^2)$, $p = 2$ или 3, с группой автоморфизмов $3.(O_6^-(3).2)$ или $Suz.2$ соответственно.

ПРИМЕР 2. Пусть геометрия $\mathcal{G}$ – флаг-транзитивное $GQ(s, t)$ -расширение с $s > 2$ и μ -подграфами, являющимися двойными овоидами. Тогда возможны только следующие случаи:

- 1) $\mathcal{G}$ является локально $Q_5^-(3)$ с группой автоморфизмов $McL.2$;
- 2) $\mathcal{G}$ является локально $H_3(p^2)$, $p = 2$, с группой автоморфизмов $O_6^-(3).2$.

В нашей работе исследуется один из двух, ближайших к рассмотренным случаям, а именно, $|\Delta| = 2st$ для любого μ -подграфа Δ . В этом случае μ -подграфы из Γ являются аффинными овоидами. Граф Γ диаметра d называется r -антиподальным, если отношение “совпадать или находиться на расстоянии d ” является отношением эквивалентности на множестве вершин графа и r – число вершин в каждом классе эквивалентности. Если $\bar{\Gamma}$ – факторграф по этому отношению эквивалентности, то Γ называется r -накрытием $\bar{\Gamma}$. В случае $r = 2$ и $d = 3$ покрытие клики называется графом Тэйлора.

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathcal{G}$ является треугольным $GQ(s, t)$ -расширением, $s > 1$, с вполне регулярным точечным графом Γ , имеющим $\mu = 2st$. Тогда s четно, Γ является r -антиподальным графом диаметра 3 с $r = 1 + s/2$ и выполняется одно из утверждений:

- 1) $s = 2$ и Γ является графом Тэйлора;
- 2) $t = s + 2$.

Эта теорема является усилением одного результата Пазини [4, следствие 3], в котором дополнительно предполагалось, что все вычеты являются классическими обобщенными четырехугольниками, а в заключении утверждалось лишь, что Γ является r -антиподальным графом диаметра 3 с $r = 1 + s/2$. Фактически, в случае 1) для каждого $t = 1, 2$ или 4 существует единственный локально $GQ(2, t)$ граф Тэйлора, а в случае 2) для каждого $q = p^m$, p нечетное простое, существует треугольное $GQ(q - 1, q + 1)$ -расширение с $\mu = 2q^2 - 2$, вычетами которого являются обобщенные четырехугольники Аренса–Секереша $AS(q)$. Напомним, что классическим обобщенным четырехугольником называется обобщенный четырехугольник, точками и прямыми которого являются

- 1) сингулярные точки и вполне сингулярные прямые несингулярной квадрики Q из $PG(d, q)$ с индексом Витта, равным 1, $d = 3, 4$ или 5;
- 2) сингулярные точки и вполне сингулярные прямые несингулярной эрмитовой формы H на $PG(d, q^2)$, $d = 3$ или 4;
- 3) изотропные точки и вполне изотропные прямые невырожденной знакопеременной формы W на $PG(3, q)$.

Приступим к доказательству теоремы. Сначала приведем один вспомогательный результат.

ЛЕММА 1. Пусть вполне регулярный граф Γ с параметрами (v, k, λ, μ) является r -накрытием n -клики. Тогда выполняются следующие утверждения:

- 1) Γ дистанционно регулярен, $n = k + 1$ и имеет место равенство $n - 2 - \lambda = (r - 1)\mu$;
- 2) матрица смежности Γ имеет собственные значения $n - 1, 1, \theta, \tau$ кратностей $1, n - 1, m_\theta, m_\tau$, где $\tau + \theta = \lambda - \mu$, $\theta\tau = 1 - n$,

$$m_\theta = \frac{n(r - 1)\tau}{\tau - \theta}, \quad m_\tau = \frac{n(r - 1)\theta}{\theta - \tau};$$

- 3) выполняются следующие соотношения между параметрами накрытия:
- $1 \leq (r-1)\mu \leq n-2$;
 - если n четно, то и μ четно;
 - θ, τ — целые числа разных знаков, поэтому можно считать, что $\theta > 0$;
 - если $r > 2$, то $\theta^3 \geq n-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. статью [5].

Пусть обобщенный четырехугольник $\mathcal{S}$ порядка (s, t) содержит аффинный овоид Δ . Множество секущих Δ (внешних прямых) обозначим через L_{Δ}^{+} (через L_{Δ}^{-}).

ЛЕММА 2. Найдется точка $a = a_{\Delta}$ такая, что L_{Δ}^{-} совпадает с множеством прямых $\mathcal{S}$, проходящих через a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $|L_{\Delta}^{+}| = st(t+1)$ и $|L_{\Delta}^{-}| = t+1$. Выберем прямую L из L_{Δ}^{-} . Каждая прямая из L_{Δ}^{+} , пересекающая L , содержит две точки из Δ , и каждая точка из Δ лежит на одной из таких прямых. Отсюда ровно st прямых из L_{Δ}^{+} пересекают L , и оставшиеся $t+1$ прямых, пересекающих L , принадлежат L_{Δ}^{-} . Таким образом, любые две прямые из L_{Δ}^{-} пересекаются, следовательно, L_{Δ}^{-} совпадает с множеством прямых $\mathcal{S}$, проходящих через некоторую точку a . Лемма доказана.

Пусть до конца работы $\mathcal{G}$ является треугольным $GQ(s, t)$ -расширением с вполне регулярным точечным графом Γ , имеющим $\mu = 2st$. Следуя Пазини [4], для точек $a, b \in \mathcal{G}$, находящихся на расстоянии 2 в Γ , через $b(a)$ обозначим точку из $[a]$, бесконечно удаленную от $[a] \cap [b]$.

ЛЕММА 3. Выполняются следующие утверждения:

- 1) точки $b, b(a)$ находятся на расстоянии 3 в Γ ;
- 2) Γ является r -антиподальным графом диаметра 3 с $r = 1 + s/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что точки $b, b(a)$ находятся на расстоянии 2 в Γ . Тогда диаметр графа Γ равен 2 и Γ сильно регулярен с параметрами $k = (s+1)(st+1)$, $\lambda = s(t+1)$, $\mu = 2st$. Так как $\lambda \neq \mu - 1$, то $(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = n^2$ для некоторого натурального n . Теперь $n^2 = s^2(t+1)^2 - 4st + 4s + 4$ и $(st + s - 1)^2 = (st + s)^2 - 2st - 2s + 1$, поэтому $-4st + 4s + 4 = -2st - 2s + 1$, противоречие. Утверждение 1) доказано.

Заметим, что $c = b(a)$ — единственная точка из $[a]$, находящаяся на расстоянии 3 от b . Если $d \in [c] \cap \Gamma_2(b)$, то $c = b(d)$ и все точки из $[d] - \{c\}$ находятся на расстоянии не большем 2 от b . Так как $|\Gamma_2(b)| = s(s+1)(st+1)/2$, то имеется точно $s/2$ точек, находящихся на расстоянии 3 от b , причем $[c] \cap [c']$ не пересекает $\Gamma_2(b)$ для любых различных точек $c, c' \in \Gamma_3(b)$. Таким образом, Γ является r -антиподальным графом диаметра 3 с $r = 1 + s/2$. Лемма доказана.

Теперь по лемме 1 граф Γ имеет собственные значения $\theta = s+1$, $\tau = -(st+1)$ с кратностями

$$m_{\theta} = \frac{(k+1)s(st+1)}{2(st+s+2)}, \quad m_{\tau} = \frac{(k+1)s(s+1)}{2(st+s+2)}.$$

ЛЕММА 4. Если $s = 2$, то Γ — граф Тэйлора.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение следует из леммы 3.

В [1] отмечено, что для каждого $t = 1, 2, 4$ существует единственный локально $GQ(2, t)$ -граф Тэйлора.

ЛЕММА 5. Если $t = 1$, то $s = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $t = 1$ и $s \geq 4$. Тогда Γ является локально $(s+1) \times (s+1)$ -решетчатым графом. Назовем блоками $(s+2)$ -клики из Γ . Положим $m = s/2$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- 1) если C – блок, $x \notin C$, то точка x смежна с 0 или 2 точками блока C ;
- 2) любое ребро из Γ лежит точно в двух блоках, а любой треугольник из Γ лежит в единственном блоке;
- 3) если $a \in \Gamma$, $\{a_1^*, \dots, a_m^*\} = \Gamma_3(a)$, то для любой вершины $b = b_1 \in [a_1^*]$ найдутся $b_i \in [a_i^*]$, $i = 2, \dots, m$, такие, что $\{b(a), b_2, \dots, b_m\} = \Gamma_3(b)$, при этом $(s \times s)$ -решетка $[a] - b(a)^\perp$ расщепляется m подграфами $\Delta_i = [a] \cap [b_i]$, каждый из которых является объединением изолированных многоугольников с четным числом вершин.

Утверждения 1) и 2) очевидны. Подграф Δ_i имеет валентность 2, поэтому он является объединением изолированных многоугольников. Если некоторое ребро многоугольника лежит на горизонтальной прямой решетки $[a]$, то инцидентные с ним ребра этого многоугольника лежат на вертикальных прямых $[a]$. Это доказывает последнее утверждение из 3).

Для точки $x \in [b] \cap \Gamma_2(a)$ пересечение $[x] \cap \Delta_1$ является ребром, если $x \in [a(b)]$; состоит из двух неинцидентных ребер, одно из которых лежит на вертикальной прямой из $[a]$, а другое – на горизонтальной, если $x \notin [a(b)]$.

Пусть L – горизонтальная прямая из $[a]$, проходящая через $b(a)$, L_i^* – прямая из $[a_i^*]$, состоящая из антиподов для точек прямой L . Для $x \in L_1^* - \{b\}$ подграф $[a] \cap [x]$ содержит ребро с вертикальной прямой M из $[a]$, проходящей через точку $b(a)$, ребро с горизонтальной прямой $[a]$, пересекающей Δ_1 , а также $2s - 4$ точки из $\cup\{\Delta_i \mid i = 2, \dots, m\}$.

Число ребер в $M - \{b(a)\}$ равно $s(s-1)/2$. Пусть b_i – антипод точки $b(a)$, принадлежащий L_i^* . Тогда окрестность каждой точки из $L_i^* - \{b_i\}$ содержит ребро из $M - \{b(a)\}$, причем $|\cup\{L_i^* - \{b_i\} \mid i = 1, \dots, m\}| = s^2/2$. Значит, некоторое ребро из $M - \{b(a)\}$ попадает в $[x] \cap [y]$ для $x \in L_i^*$, $y \in L_j^*$, $i \neq j$. По утверждению 2) вершины x, y смежны. Противоречие с тем, что прямая L_i^* содержит точку, антиподальную к y .

Рис. 1. Локально $GQ(3, 5)$ -граф

ЛЕММА 6. Если $t > 1$ и $s > 2$, то $t = s + 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $s > 2$, то $r > 2$, и по утверждению d) леммы 1 $(s+1)^3 \geq (s+1)(st+1)$, т.е. $s \geq t-2$.

По условию целочисленности $2(st+s+2)$ делит $(s^2t+st+s+2)s(s+1)$. Далее, $(st+s+2, s+1) = (t-1, s+1)$, $(st+s+2, k+1) = (st+s+2, s^2t) = (st+s+2, s(s+2))$.

Наконец, $(st + s + 2, s + 2) = (2t, s + 2)$ и $st + s + 2$ делит $2(s + 2)(t - 1)$. Поэтому $st + s + 2$ делит $4(s + 2 - t)$. Предположим, что $t \neq s + 2$. Тогда $t < 4$. Если $t = 2$, то $s = 2$. Если же $t = 3$, то $4s + 2$ делит $2(s - 1)$, противоречие. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

Существование треугольных $GQ(q - 1, q + 1)$ -расширений, вычетами которых являются обобщенные четырехугольники Аренса–Секереша $AS(q)$, отмечено в примере 9.15 с $m = (q + 2)/2$ [1].

В связи с доказанной теоремой вызывает интерес следующая

ПРОБЛЕМА. *Описать класс геометрий $\mathcal{F}$, состоящий из треугольных $GQ(s, t)$ -расширений с точечным графом Γ диаметра большего 2 таких, что μ -подграфы вершин, лежащих в геодезических 3-путях графа Γ , являются аффинными овоидами.*

Следующие геометрии удовлетворяют всем условиям, перечисленным в этой проблеме.

ПРИМЕР 3. Связный локально $GQ(3, 5)$ -граф имеет диаграмму, изображенную на рис. 1, относительно любой вершины (Махнев [6]). Существование геометрии $\mathcal{G}$, являющейся флаг-транзитивным треугольным $GQ(3, 5)$ -расширением, установлено Ешиарой [7].

ПРИМЕР 4. Геометрия из примера 3 является наименьшей в бесконечной серии $\tilde{\Gamma}_q$ треугольных $GQ(q - 1, q + 1)$ -расширений, $q = 2^n$, $n \geq 2$. Точечный граф $\tilde{\Gamma}_q$ является $q/2$ -накрытием полного многодольного графа $K_{(q+1) \times q^2}$ (Дель Фра, Пасечник, Пазини [8]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Cameron P., Hughes D.R., Pasini A. Extended generalized quadrangles // *Geom. Dedicata*. 1990. V. 35. P. 193–228.
- [2] Fisher P., Hobart S. Triangular extended generalized quadrangles // *Geom. Dedicata*. 1991. V. 37. P. 339–344.
- [3] Del Fra A., Ghinelli D., Meixner T., Pasini A. Flag-transitive extensions of C_n geometries // *Geom. Dedicata*. 1992. V. 37. P. 253–273.
- [4] Pasini A. Remarks on double ovoids in finite classical generalized quadrangles, with an application to extended generalized quadrangles // *Quart. J. Pure Appl. Math.* 1992. V. 66. P. 41–68.
- [5] Godsil C.D. Covers of complete graphs // *Adv. Stud. Pure Math.* 1996. V. 24. P. 137–163.
- [6] Махнев А. А. Локально $GQ(3, 5)$ -графы и геометрии с короткими прямыми // *Дискретная матем.* 1998. Т. 10. С. 72–86.
- [7] Yoshiara S. On some flag-transitive non-classical $c.C_2$ -geometries // *Europ. J. Combin.* 1993. V. 14. P. 59–77.
- [8] Del Fra A., Pasechnik D.V., Pasini A. A new family of extended generalized quadrangles // *Europ. J. Combin.* 1997. V. 18. P. 155–169.