Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Созутов, Н. М. Сучков, О бесконечных группах с заданной сильно изолированной 2-подгруппой, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 2, 272–285

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm944>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 16:24:10

УДК 512. 544

О БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ЗАДАННОЙ СИЛЬНО ИЗОЛИРОВАННОЙ 2-ПОДГРУППОЙ

А. И. Созутов, Н. М. Сучков

Доказана локальная конечность некоторых групп с сильно изолированной 2-подгруппой периода, не превосходящего 4. В частности, дан положительный ответ на вопрос 10.76 Шункова из Коуровской тетради.

Библиография: 18 названий.

В настоящей заметке завершается решение вопроса 10.76 Шункова из Коуровской тетради [1, теорема 2 и следствие 1], анонсированное в [2], [3]. Сформулируем этот вопрос.

ВОПРОС. Пусть G – периодическая группа, обладающая бесконечной силовой 2-подгруппой S , которая либо элементарная абелева, либо 2-группа Судзуки, причем нормализатор $N_G(S)$ сильно вложен в G и является группой Фробениуса с локально циклическим дополнением. Должна ли группа G быть локально конечной?

Для случая, когда S – элементарная абелева 2-подгруппа, положительное решение вопроса было получено в [4]. Теорема 1 нашей заметки дополняет результат из [4].

Определим 2-группу Судзуки $S(P, x)$ [5]. Пусть P – поле характеристики 2, допускающее нетривиальный автоморфизм x такой, что если $\alpha^{1+x} = 1$, то $\alpha = 1$. Пусть $U = S(P, x) = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in P\}$ и $(\alpha, \beta) \cdot (\gamma, \delta) = (\alpha + \gamma, \alpha\gamma^x + \beta + \delta)$. Относительно этой операции U – 2-группа. Если $x^2 = 2$, то U изоморфна силовой 2-подгруппе простой группы Судзуки $Sz(P)$.

Шунков пояснил авторам, что именно группу $S = S(P, x)$ он имел в виду, формулируя свой вопрос. Дело в том, что Хигман [6] кроме групп $S(P, x)$ назвал группами Судзуки некоторые центральные произведения групп вида $S(P, x)$ и, в частности, силовые 2-подгруппы унитарных групп $U_3(P)$. Но в $U_3(P)$ силовая 2-подгруппа S не является сильно изолированной (см., например, [7, с. 166]). Поэтому для таких силовских 2-подгрупп S вопрос 10.76 (при условии существования группы G) решается безусловно отрицательно.

Напомним некоторые определения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00542.

Собственная подгруппа B группы G называется *сильно вложенной*, если B содержит элемент порядка 2 (инволюцию) и для любого элемента $g \in G \setminus B$ подгруппа $B \cap B^g$ не содержит инволюций [7]. Элемент a группы G называется *конечным*, если при любом $g \in G$ подгруппа $\langle a, a^g \rangle$ конечна [8]. Подгруппа H группы G называется *сильно изолированной*, если для любого неединичного элемента $h \in H$ выполняется свойство $C_G(h) \leq H$ [9].

ТЕОРЕМА 1. Пусть бесконечная группа G содержит сильно изолированную 2-подгруппу U периода, не превосходящего 4, конечную инволюцию и подгруппу порядка 6. Тогда либо $G = F\lambda U$ – локально конечная группа Фробениуса с периодическим абелевым ядром F , либо G изоморфна группе $L_2(Q)$ над подходящим локально конечным полем Q характеристики 2.

ТЕОРЕМА 2. Пусть бесконечная группа G с конечной инволюцией содержит сильно изолированную подгруппу U , изоморфную 2-группе Судзуки $S(P, x)$. Тогда либо подгруппа U нормальна в G , либо G изоморфна группе Судзуки $Sz(Q)$ над подходящим локально конечным полем Q характеристики 2.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G – периодическая группа, обладающая бесконечной силовой 2-подгруппой S , которая либо элементарная абелева, либо 2-группа Судзуки $S(P, x)$, причем нормализатор $N_G(S)$ сильно вложен в G и является группой Фробениуса с локально циклическим дополнением. Тогда G локально конечна и изоморфна одной из групп $L_2(Q)$, $Sz(Q)$ над подходящим локально конечным полем Q характеристики 2.

Мы будем существенно использовать результаты работ [5], [4], [10], [11] и некоторые, ключевые из них, приведем с доказательствами. Вместе с тем, ограниченность объема статьи – причина краткости ее изложения.

1. Леммы о сильно вложенной подгруппе.

ЛЕММА 1.1 (см. [4, леммы 1.7, 2.1]). Пусть G – группа с сильно вложенной подгруппой B и конечной инволюцией. Тогда

- 1) все инволюции в G сопряжены и все инволюции из B сопряжены в B ; в частности, любая пара инволюций в G порождает конечную подгруппу;
- 2) между множеством инволюций из B и множеством инволюций любого правого смежного класса Bg , где $g \in G$, можно установить взаимно однозначное соответствие; при этом если i – фиксированная инволюция из B , то каждой инволюции $k \in B$ (в том числе и инволюции i) соответствует единственная инволюция $j_k \in Bg$ такая, что $g^{-1}kg = j_k i j_k$;
- 3) любой элемент $g \in G$ обладает представлением $g = hj$, где $h \in B$, а j – некоторая инволюция;
- 4) для любой инволюции $j \in G \setminus B$ в подгруппе B существует множество M_j строго вещественных относительно j элементов той же мощности, что и множество инволюций из B .

ЛЕММА 1.2 (см. [4, лемма 2.2]). Пусть G – группа с сильно вложенной подгруппой B и конечной инволюцией, $i \in B$ и $j \in G \setminus B$ – произвольные инволюции,

$H_j = B \cap B^j$ и T_j – подгруппа в B , порожденная всеми строго вещественными относительно j элементами из B . Тогда

- 1) имеет место вложение $T_j \leq H_j$, H_j – подгруппа без инволюций, $\langle j, T_j \rangle = T_j \lambda \langle j \rangle$ и $\langle j, H_j \rangle = H_j \lambda \langle j \rangle$;
- 2) в каждом смежном классе $C_B(i) \cdot b$, где $b \in B$, существует единственный инвертируемый инволюцией j элемент и его порядок конечен и нечетен;
- 3) выполнено равенство $B = T_j \cdot C_B(i) = H_j \cdot C_B(i)$ и i^{T_j} – множество всех инволюций группы B ;
- 4) если b – неединичный строго вещественный относительно инволюции $j \in G \setminus B$ элемент из B , то $C_B(b)$ не содержит инволюций.

Всякое соотношение вида

$$vtv = u^{-1}vu, \quad |t| = |v| = 2, \quad |u| = q = 2^k, \quad tu = ut, \quad (1)$$

в группе с сильно вложенной подгруппой будем называть *структурным тождеством Судзюки*.

ЛЕММА 1.3. Пусть G – группа с сильно вложенной подгруппой B и конечной инволюцией, $t \in B$, $v \in G \setminus B$ – произвольные инволюции и для тройки (v, t, u) выполняются соотношения (1). Тогда $(vt)^u = (vt)^2$, порядок элемента vt конечен и нечетен, $L = \langle v, t, u \rangle$ – конечная группа Фробениуса с ядром $\langle vt \rangle$ и инвариантным множителем $\langle u \rangle$, $u \in B$ и $t \in \langle u \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Домножим равенство $vtv = u^{-1}vu$ справа на элемент t и, воспользовавшись соотношением $tu = ut$, получим $vtvt = (vt)^2 = u^{-1}vut = u^{-1}vtu = (vt)^u$. Так как $|u| = q = 2^k$ и $(vt)^{2^q} = u^{-q}(vt)u^q = vt$, то порядок элемента vt конечен и нечетен.

Поскольку инволюции v и t инвертируют vt , то подгруппа $A = \langle vt \rangle$ нормальна в L , причем ввиду леммы 1.1 подгруппа $C_L(x)$ не содержит инволюций при любом неединичном $x \in \langle vt \rangle$. Таким образом, в L нет четверных подгрупп и из соотношения $ut = tu$ вытекает $t \in S = \langle u \rangle$. Понятно, что $u \in B$, и очевидно, что $L = A\lambda S$ – конечная группа Фробениуса. Лемма доказана.

2. Леммы о нормализаторе сильно изолированной 2-подгруппы.

ЛЕММА 2.1. Пусть G – группа с сильно изолированной 2-подгруппой U и конечной инволюцией. Если ранг группы U равен 1, то $N_G(U) = U$ и U – либо (локально) циклическая группа, либо (обобщенная) группа кватернионов. Если, дополнительно, подгруппа U конечна, то $G = F\lambda U$ – локально конечная группа Фробениуса с инвариантным множителем U и абелевым ядром F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условиям леммы U есть 2-группа с единственной инволюцией i . Значит, $N_G(U) = U = C_G(i)$ и U – либо (локально) циклическая группа, либо (обобщенная) группа кватернионов [12]. Пусть j – конечная инволюция из $G \setminus U$. Тогда $D = \langle i, j \rangle$ – конечная группа диэдра и ввиду сильной изолированности U порядок элемента ij нечетен. Следовательно, инволюции i и j сопряжены в D и i – конечная инволюция. Если $U = C_G(i)$ – конечная подгруппа, то G локально конечна по основной

теореме из [13]. Понятно, что $U \cap U^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus U$, и последнее утверждение леммы вытекает из известной теоремы Фробениуса для локально конечных групп [14]. Лемма доказана.

В следующих ниже леммах G – группа с сильно изолированной 2-подгруппой U и конечной инволюцией. Обозначим $B = N_G(U)$ и в дальнейшем будем предполагать, что $B \neq G$ и $r(U) > 1$.

ЛЕММА 2.2. Пусть v – произвольная инволюция из $G \setminus B$ и $H = B \cap B^v$. Справедливы следующие утверждения:

- 1) подгруппа B сильно вложена в G ;
- 2) все инволюции в G сопряжены;
- 3) $B = U\lambda H$ и все инволюции из U содержатся в ее центре $Z(U)$;
- 4) H – периодическая локально циклическая группа, инвертируемая инволюцией v и действующая транзитивно на множестве всех инволюций из U ;
- 5) $\Omega_1(Z(U))\lambda H$ изоморфна подгруппе Бореля группы $L_2(Q)$ над подходящим локально конечным полем Q характеристики 2;
- 6) подгруппа H сильно изолирована в G ;
- 7) если U – локально конечная группа, то $B = U\lambda H$ – группа Фробениуса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Легко убедиться, что все 2-элементы из B содержатся в U . Пусть $g \in G$ и $T = U \cap U^g \neq 1$. Тогда подгруппа T сильно изолирована в G . Отсюда выводим, что все инволюции из U лежат в T , любая циклическая подгруппа из U содержится в T , $T = U$ и $g \in B$. Таким образом, $2 \notin \pi(B \cap B^g)$ для любого элемента $g \in G \setminus B$. Утверждение доказано.

2) Утверждение вытекает из леммы 1.1 и утверждения 1) настоящей леммы.

3) По лемме 1.2 подгруппа H не содержит инволюций и $B = H \cdot C_B(i)$, где i – произвольная инволюция из U . Поскольку $C_B(i) \leq U$, то $B = U\lambda H$ и $C_B(i) = U$. Утверждение доказано.

4) Из сильной изолированности U в G и утверждения 2) леммы следует, что $C_H(v) = 1$ и v – конечная инволюция в $H\lambda\langle v \rangle$. Поэтому для любого элемента $h \in H$ порядок элемента vv^h конечен, нечетен и инволюции v, v^h сопряжены в $\langle v, v^h \rangle$, что влечет $h \in \langle vv^h \rangle$ и $h^v = h^{-1}$. Таким образом, H – периодическая группа без инволюций, инвертируемая инволюцией v , и H – абелева группа. Как периодическая абелева группа регулярных автоморфизмов абелевой группы $Z(U)$ H – локально циклическая группа [9], [14]. Утверждение доказано.

5) Утверждение доказано в [4, лемма 4.4].

6) Если $C_G(h) \neq H$ для некоторого элемента $h \in H^\#$, то по теореме 3.1 из [4] $r(U) = 1$, противоречие. Следовательно, подгруппа H сильно изолирована в G .

7) Как доказано выше, $B = U\lambda H$ и H – периодическая локально циклическая группа. По теореме Шмидта [15] группа B локально конечна, и понятно, что $H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in B \setminus H$. По теореме Фробениуса для локально конечных групп [14] B – группа Фробениуса с инвариантным множителем H и ядром U . Лемма доказана.

Обозначим через Ω множество всех подгрупп из G , сопряженных с подгруппой B . Далее будем рассматривать подстановочное представление группы G на множестве Ω , при этом обозначим $B = \alpha \in \Omega$.

ЛЕММА 2.3. Пусть $B = U\lambda H$ – группа Фробениуса с неинвариантным множителем H и ядром U , $H = B \cap B^v$, где v – инволюция из $G \setminus B$. Тогда

- 1) v^B – множество всех инволюций из $G \setminus B$;
- 2) группа G 2-транзитивна на Ω , при этом $B = G_\alpha$ – стабилизатор точки и $H = G_{\alpha\beta}$ – стабилизатор двух точек;
- 3) подгруппа U регулярна на множестве $\Omega \setminus \{\alpha\}$; в частности, $G = B\langle v \rangle B = B\langle v \rangle U$, где $v \in G \setminus B$;
- 4) группа G есть Z -группа на Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По лемме 2.2 подгруппа B сильно вложена в G , и по лемме 1.1 для любой инволюции $j \in G \setminus B$ подгруппа $T = B \cap B^j$ не содержит инволюций и транзитивна на множестве всех инволюций группы U . Учитывая лемму 2.2 и определение группы Фробениуса [12], заключаем, что $T^u = H$ для подходящего $u \in U$ и j^u инвертирует H . Ввиду утверждения 6) леммы 2.2 все инволюции, инвертирующие H , содержатся в $Hv = v^H$. Следовательно, $j \in v^B$ и утверждение доказано.

2) Очевидно, что $B = G_\alpha$. Ввиду утверждения 1) B транзитивна на $\Omega \setminus \{\alpha\}$ и, следовательно, G – 2-транзитивна на Ω . Из лемм 1.1, 1.2, 2.2 вытекает, что для любого $g \in G \setminus B$ пересечение $B \cap B^g$ совпадает с подходящим неинвариантным множителем Фробениуса H^u группы B , здесь $u \in U$. Это означает, что $H = G_{\alpha\beta}$ – стабилизатор двух точек. Утверждение доказано.

3) Так как $G_\alpha = U\lambda G_{\alpha\beta}$ и B транзитивна на $\Omega \setminus \{\alpha\}$, то U регулярна на $\Omega \setminus \{\alpha\}$. Отсюда также следует равенство $G = B\langle v \rangle B = B\langle v \rangle U$ для любого $v \in G \setminus B$. Утверждение доказано.

4) Пусть $\gamma \in \Omega \setminus \{\alpha, \beta\}$ и $u \in U$ элемент такой, что $\beta^u = \gamma$. Поскольку H – неинвариантный множитель группы Фробениуса B , а u – неединичный элемент из ее ядра U , то $H \cap H^u = 1$. Следовательно, $G_{\alpha\beta\gamma} = 1$ как подгруппа пересечения $H \cap H^u$. Ввиду 2-транзитивности G заключаем, что ее стабилизатор любых трех точек из Ω тривиален, т.е. G – Z -группа [7]. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. Пусть B – группа Фробениуса с неинвариантным множителем H и ядром U и $H = B \cap B^v$, где v – инволюция из $G \setminus B$. Тогда

- 1) любой элемент $g \in G \setminus B$ имеет единственное представление в виде $g = u_1 x v u_2$, где $u_1, u_2 \in U$, $x \in H$;
- 2) элемент $j \in G \setminus B$ есть инволюция тогда и только тогда, когда $j = u^{-1} \times h^{-1} v h u = u^{-1} h^{-2} v u$, где $u \in U$, $h \in H$ – однозначно определенные для j элементы;
- 3) если i, j – различные инволюции из G и $|ij| \neq 2$, то элемент ij сопряжен с элементом kv , где k – инволюция из U ;
- 4) если $k \in U$, $v \in G \setminus B$ – инволюция, то $A = C_G(kv)$ – сильно изолированная периодическая абелева подгруппа, инвертируемая инволюциями k, v , $N_G(A) = \lambda\lambda T$ – группа Фробениуса с неинвариантным множителем $T = U \cap N_G(A)$ и $A \cap A^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus N_G(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Существование такого разложения для g следует из равенства $G = B\langle v \rangle U$ (лемма 2.3). Пусть $g = u_1 x v u_2 = u_3 y u_4$, где $u_1, u_2, u_3, u_4 \in U$, $x, y \in H$. Тогда $1 = u_1 x v u_2 u_4^{-1} y u_3^{-1} = x^{-1} u_1^{-1} u_3 y = v u_2 u_4^{-1} v \in B \cap U^v$. Следовательно,

$u_2 = u_4$ и $u_1x = u_3y$. Так как $H \cap U = 1$, то $x = y$ и $u_1 = u_3$. Это означает, что разложение $g = u_1xvu_2$ единственно. Утверждение доказано.

2) По лемме 2.3 множество всех инволюций из $G \setminus B$ совпадает с множеством v^B и второе утверждение леммы вытекает из первого.

3) Ввиду леммы 2.2 можно считать, что $i \in B$, и утверждение 1) леммы 2.3 завершает доказательство.

4) Из лемм 1.1, 1.2, 2.2 легко следует, что A не содержит инволюций. Далее, $k, v \in N_G(A)$, $C_A(k) = 1$ и по леммам 2.2, 1.1 k – конечная инволюция. Следовательно, для любого элемента $a \in A^\#$ порядок элемента kk^a конечен и нечетен, $a \in \langle kk^a \rangle$ и $a^i = a^{-1}$. Это означает, что A – периодическая абелева группа, инвертируемая инволюциями k и v . Понятно, что A сильно изолирована в G и $k^A = Ak$ – множество всех инволюций из $N_G(A) = L$. Отсюда выводим, что $L = A\lambda C_L(k)$ – группа Фробениуса, поскольку $C_L(k) = L \cap U$. Ввиду сильной изолированности в G подгруппа A пересекается со своими сопряженными подгруппами тривиально. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.5. Пусть B – группа Фробениуса с неизменяемым множителем H и ядром U и $H = B \cap B^v$, где v – инволюция из $G \setminus B$. Тогда в группе G выполняется структурное тождество Судзюки

$$vtv = u^{-1}vu, \quad t, u \in U^\#, \quad t^2 = 1, \quad t \in \langle u \rangle, \quad |tv| = 2n + 1 < \infty.$$

При этом для фиксированных U, H, v существует единственная пара элементов t, u с таким свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i \in U$ – произвольная инволюция. По лемме 2.4 $viv = y^{-1}xvx^{-1}y$, где $y \in U$, $x \in H$. Если $x = 1$, полагаем $i = t$, $u = y$. Пусть $x \neq 1$. Тогда ввиду леммы 2.2 и выписанного выше соотношения имеем

$$vtv = vxix^{-1}v = x^{-1}(viv)x = x^{-1}(y^{-1}xvx^{-1}y)x = y^{-x}vy^x = u^{-1}vu.$$

По лемме 1.3 выполняется равенство $(vt)^u = (vt)^2$, порядок элемента vt конечен и нечетен, $u \in U$ и $t \in \langle u \rangle$.

Покажем, что пара t, u единственна. Действительно, если z – произвольная, отличная от t инволюция из B , то $z = hth^{-1}$ для некоторого неединичного элемента h из $H = B \cap B^v$, инвертируемого инволюцией v (лемма 1.2). Отсюда

$$vzv = v h t h^{-1} v = h^{-1}(vtv)h = h^{-1}(u^{-1}vu)h = u^{-h}h^{-1}vhu^h,$$

причем такое представление для элемента vzv единственно (лемма 2.4). В силу леммы 2.2 $hu^h \notin U$ и, следовательно, существует ровно одна пара элементов $t \in Z(U)$, $u \in U$, для которых выполняется соотношение $vtv = u^{-1}vu$. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1. На протяжении данного пункта группа G удовлетворяет условиям теоремы 1, U – ее сильно изолированная 2-подгруппа ранга не меньше 2 и $B = N_G(U)$. Легко убедиться, что для группы G и ее подгрупп U и B справедливы леммы 1.1–1.3, 2.2–2.5.

ЛЕММА 3.1. В группе G для некоторых инволюций $v \in G \setminus B$ и $t \in U$ выполняется структурное тождество Судзуки

$$vtv = tv t. \quad (2)$$

При этом для инволюции v существует в точности одна такая инволюция $t \in U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.2 все инволюции группы G сопряжены и, следовательно, $C_G(t)$ есть 2-группа для каждой инволюции t из G . Отсюда выводим, что подгруппа порядка 6 из условий теоремы есть группа диэдра, и теперь утверждение вытекает из лемм 1.3, 2.5. Лемма доказана.

Пусть v – инволюция из леммы 3.1. Обозначим $H = B \cap B^v$, $Z = \Omega_1(Z(U))$ и $B_0 = Z\lambda H$. По лемме 2.2 B_0 изоморфна подгруппе Бореля группы $L_2(Q)$ над локально конечным полем Q характеристики 2.

ЛЕММА 3.2. Группа $G_0 = B_0 \langle v \rangle B_0$ есть подгруппа в G , изоморфная $L_2(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем вначале, что G_0 – подгруппа в G . Понятно, что $G_0 = G_0^{-1}$, и нужно доказать, что $G_0 \cdot G_0 \subseteq G_0$. Очевидно, что $G_0 = B_0 \cup B_0 v Z$ и $G_0 \cdot G_0 \subseteq G_0 \cup B_0 v Z v Z$. Применим далее прием из [4].

По лемме 2.2 подгруппа H регулярна на $Z^\#$, и если z – произвольная инволюция из Z , то существует единственный элемент $h \in H$ такой, что $z = t^h$. Поэтому

$$vzv = v h^{-1} t h v = h v t v h^{-1} = h v t h^{-1} \in G_0$$

и ввиду произвольности элемента $z \in Z$ имеем $v Z v \subseteq G_0$. Следовательно, $G_0 \cdot G_0 = G_0$ – подгруппа группы G .

Далее, представим поле Q в виде объединения $Q = \bigcup Q_i$ возрастающей цепочки конечных подполей

$$Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq Q_3 \subseteq \dots,$$

а группы H, B_0 и Z в виде объединений $H = \bigcup H_i, B_0 = \bigcup B_i, Z = \bigcup Z_i$ соответствующих цепочек конечных подгрупп:

$$H_1 < H_2 < H_3 < \dots, \quad B_1 < B_2 < B_3 < \dots, \quad Z_1 < Z_2 < Z_3 < \dots,$$

где $Z_i = Z \cap B_i$ и B_i изоморфна подгруппе Бореля группы $L_2(Q_i)$. При этом, очевидно, можно считать, что $t \in Z_1$. Этим цепочкам соответствует цепь конечных подмножеств

$$G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3 \subseteq \dots,$$

где $G_i = B_i \langle v \rangle B_i$. Теперь, используя те же рассуждения, что и выше, и инвертируемость подгрупп H_n инволюцией v (лемма 2.2), докажем, что G_n – конечные подгруппы, изоморфные по теореме Пассенхауза [16] (см. также [7, теорема 3.18]) $L_2(Q_n)$. Это означает, что $G_0 = \bigcup G_n$ – локально конечная подгруппа, причем ввиду леммы 2.2 подгруппа $B_0 = G_0 \cap B$ сильно вложена в G_0 . По теореме 3 из [11] $G_0 \simeq L_2(Q)$. Заметим также, что в этом изоморфизме можно убедиться из других соображений, поскольку ввиду лемм 2.2, 3.1 умножение в G однозначно определяется строением подгруппы B_0 , действием v на H и структурным тождеством Судзуки (2). Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. Пусть $y \in U$ и $y^2 = t$, где t – инволюция из структурного тождества Судзуки (2). Тогда имеет место соотношение

$$vyv = y_1kvy_1^{-1}y^{-1}$$

для некоторых элементов $y_1 \in U$ и $k \in H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.4 элемент vyv имеет единственное разложение вида

$$vyv = y_1kvy_2, \quad (3)$$

где $y_1, y_2 \in U$, $k \in H$. Нам нужно доказать, что $y_2 = y_1^{-1}y^{-1}$. Из равенств (3) и $k^v = k^{-1}$ (лемма 2.2) вытекают соотношения

$$vy_1v = yvy_2^{-1}k, \quad vy_2v = k^{-1}y_1^{-1}vy.$$

Перемножая эти равенства, получаем

$$vy_1y_2v = yvy_2^{-1}y_1^{-1}vy. \quad (4)$$

По условию леммы $|y| = 4$, ввиду утверждения 2) леммы 2.4 $y_1y_2 \neq 1$ и по лемме 2.2 $vy_1y_2v \notin B$. По утверждению 1) леммы 2.4 $vy_1y_2v = whvz$, где $w, z \in U$, $h \in H$, и в силу соотношения (4) выполняется $whvz = yz^{-1}vh^{-1}w^{-1}y$. По утверждению 1) леммы 2.4 $z = w^{-1}y$ и $y = wz$. Далее, ввиду (3) имеем

$$tgt = tvv = vy^2v = y_1kvy_2 \cdot y_1kvy_2 = y_1v(y_2y_1)^kvy_2, \quad v(y_2y_1)^kv = y_1^{-1}tvy_2^{-1}. \quad (5)$$

Заметим, что $|y_2y_1| = |y_1y_2| = 4$, так как если y_1y_2 – инволюция, то $wz = 1$ (утверждение 2) леммы 2.4), что противоречит полученному выше равенству $wz = y$. Поэтому $(y_2y_1)^2$ – инволюция и, учитывая, что $t \in Z = Z(U)$, из равенств (5) и $vy_1y_2v = whvz$ мы выводим

$$v(y_2y_1)^{2k}v = y_1^{-1}tvy_2^{-1} \cdot y_1^{-1}tvy_2^{-1} = y_1^{-1}tv(y_1y_2)^{-1}vy_2^{-1} = y_1^{-1}tz^{-1}hvw^{-1}ty_2^{-1}.$$

Согласно утверждению 2) леммы 2.4 $w^{-1}ty_2^{-1} \cdot y_1^{-1}tz^{-1} = w^{-1}y_2^{-1}y_1^{-1}z^{-1} = 1$, откуда $y_2^{-1}y_1^{-1} = wz = y$ и $y_2 = y_1^{-1}y^{-1}$. Как отмечалось выше, это доказывает лемму.

Пусть i – инволюция из Z , v – инволюция из леммы 2.2, $x = iv$ и $A = C_G(x)$.

ЛЕММА 3.4. Подгруппа A – периодическая локально циклическая группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.4 A – сильно изолированная периодическая абелева подгруппа и $N_G(A) = A\lambda T$ – группа Фробениуса, причем $T = N_G(A) \cap U$. Если $A \cap H^g \neq 1$ для некоторого $g \in G$, то из леммы 2.2 вытекает равенство $A = H^g$ и локальная циклическость группы A .

Пусть подгруппа A взаимно проста со всеми подгруппами H^g , $g \in \pi(A)$ и $P = \Omega_1(O_p(A))$ – нециклическая подгруппа. Ввиду леммы 2.4 можно считать, что $a = iv \in P$. Пусть $b \in P^\#$ – произвольный элемент. Так как $b = jv$, где j – инволюция из v^A , то по лемме 2.4 для некоторого элемента $g \in G$ имеет место равенство $j^g v^g = kv$, где $k \in Z$. Поскольку $a, kv \in G_0 \simeq L_2(Q)$ (лемма 3.2), то подгруппы $\langle a \rangle$, $\langle kv \rangle$ сопряжены в G_0 . Учитывая лемму 2.4, приходим к выводу, что подгруппы $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$ сопряжены в подгруппе $N_G(A)$.

Таким образом, T действует транзитивно на множестве всех циклических подгрупп из P . Как локально конечная 2-группа периода 4 с единственной подгруппой порядка 2, T – либо циклическая группа порядка 4, либо группа кватернионов порядка 8 [17, теорема 12.5.2]. Поскольку число различных циклических подгрупп из P , равное $(|P| - 1)/(p - 1)$, не меньше, чем $p + 1 \geq 4$, и инволюция из T оставляет каждую циклическую подгруппу из P на месте, то T – группа кватернионов порядка 8, а P – группа порядка 9. Так как группа автоморфизмов группы простого порядка абелева, то $\pi(A) = 3$, $A_0 = A \cap G_0$ – квазициклическая 3-группа и A – прямое произведение двух квазициклических 3-подгрупп. Покажем, что данный случай невозможен.

Рассмотрим в поле Q два конечных подполя $R \subseteq F$ порядков $2^n > 4$ и 2^{np} , $n > 1$, p – простое, и подгруппы $L_2(R), L_2(F)$ из G_0 . Ввиду доказанного выше $3 \notin \pi(H)$ и циклические подгруппы порядков $2^n + 1, 2^{np} + 1$ из $L_2(R)$ и $L_2(F)$ содержат 3-элементы, сопряженные с элементами из A . Поэтому $2^n + 1 = 3^k$, $2^{np} + 1 = 3^m$, и поскольку $(3^k - 1)^2 = 3^{2k} - 2 \cdot 3^k + 1 \neq 3^m - 1$, то $p > 2$. Но тогда

$$3^m - 1 = (3^k - 1)^p = 3^{kp} - p3^{k(p-1)} + \dots + p3^k - 1$$

и $3^m = 3^k(3s + p)$. Из последнего равенства получаем, что $p = 3$,

$$3^m = (3^k - 1)^3 + 1 = 3^{3k} - 3^{2k+1} + 3^{k+1}$$

и $3k = 2k + 1$. Отсюда $k = 1$ и $2^n = 2 < 4$. Противоречие, и лемма доказана.

ЛЕММА 3.5. *Имеет место равенство $G = G_0 \simeq L_2(Q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно достаточно доказать, что $U = Z$. Предположим противное, и пусть y – элемент порядка 4 из U такой, что $y^2 = t$, где t – инволюция из леммы 3.1. Тогда по лемме 3.3 $vyv = y_1kvy_1^{-1}y^{-1}$ и $vyvy^{-1} = zt = a$, где $z = y_1kvy_1^{-1}$ – инволюция. Инволюции v, t, z и yvy^{-1} инвертируют a , $x = tv$ централизует a . Следовательно, $a \in A = C_G(x)$.

Покажем, что $A \leq G_0$. Если $A \neq A_0 = A \cap G_0$, то в разности $A \setminus A_0$, очевидно, найдется элемент b такой, что пересечение $\pi(\langle b \rangle) \cap \pi(A_0)$ непусто. По лемме 2.4 инволюция v инвертирует A , следовательно, b есть произведение двух инволюций. По лемме 2.4 b сопряжен с некоторым элементом $vi \in G_0$, где $i \in Z$, и ввиду изоморфизма $G_0 \simeq L_2(Q)$ (лемма 3.2), свойств групп $L_2(Q)$ (см., например, [9]) и выбора элемента b элемент vi сопряжен в G_0 с некоторым элементом из A_0 . Но тогда A_0 содержит

циклическую подгруппу порядка $|b|$ и из локальной цикличности A (лемма 3.4) следует $b \in A_0$. Полученное противоречие означает, что $A \leq G_0$.

Итак, $A < G_0$ и, значит, $yvy^{-1} = va \in G_0$. По лемме 2.4 $yvy^{-1} = (hv)^w$ для некоторых $h \in H$, $w \in Z$, причем понятно, что $h \neq 1$, так как в противном случае $1 \neq wy \in C_U(v)$, что противоречит сильной изолированности U в G . Представим элемент h нечетного порядка в виде $h = h_1^2$, $h_1 \in \langle h \rangle$. Тогда из равенства $yvy^{-1} = (hv)^w$ выводим $yvy^{-1} = (hv)^w = (h_1^2 v)^w = wh_1 v h_1^{-1} w$, и элемент v перестановочен с неединичным элементом $y^{-1} w h_1$ из B . Полученное противоречие означает, что элемента $y \in U$ со свойством $y^2 = t$ не существует, $U = Z$ и ввиду леммы 2.3 $G = G_0$. Лемма доказана.

Теперь теорема 1 следует из лемм 2.1 и 3.5.

4. 2-группы Судзуки $S(P, x)$. Нам понадобятся некоторые свойства группы $U = S(P, x)$, доказательства которых, приведенные в [5], справедливы для произвольного локально конечного поля P характеристики 2.

ЛЕММА 4.1. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) U – группа периода 4;
- 2) $Z = \{(0, \alpha) \mid \alpha \in P\}$ – центр группы U ;
- 3) Z – элементарная абелева группа и все инволюции из U содержатся в Z ;
- 4) если $t_0 = (1, 0)$, то $C_U(t_0) = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in P, \alpha^x = \alpha\}$;
- 5) для любого элемента $t \in U \setminus Z$ смежный класс tZ состоит в точности из всех решений уравнения $y^2 = t^2$ группы U ;
- 6) U не содержит группы кватернионов;
- 7) для каждого $0 \neq \lambda \in P$ отображение $\varphi(\lambda): (\alpha, \beta) \Rightarrow (\lambda\alpha, \lambda^{1+x}\beta)$ является автоморфизмом группы U ;
- 8) если $\Phi = \{\varphi(\lambda) \mid 0 \neq \lambda \in P\}$, то Φ изоморфна мультипликативной группе поля P .

Обозначим через $M(P, x)$ – расширение группы $U = S(P, x)$ с помощью группы Φ . Для доказательства теоремы нам понадобятся свойства расширений более общего вида. Предположим, что U допускает периодическую нечетную локально циклическую группу автоморфизмов H , действующую регулярно на множестве $Z^\#$ всех инволюций из U , и пусть $B = U\lambda H$ – расширение U с помощью H . Обозначим также $z_0 = t_0^2 = (1, 0)^2 = (0, 1)$.

ЛЕММА 4.2. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) B – группа Фробениуса;
- 2) группа H действует регулярно на множестве неединичных элементов факторгруппы U/Z ;
- 3) группа $Z\lambda H$ и факторгруппа B/Z изоморфны подгруппе Бореля группы $L_2(Q)$ над подходящим локально конечным полем Q характеристики 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Утверждение очевидно (см., например, [14]).

2) Пусть $b \in U$ и $|b| = 4$. Ввиду условий леммы для некоторого $h \in H$ выполняется равенство $z_0^h = b^2$. По лемме 4.1 $t_0^h Z = bZ$, что доказывает утверждение.

3) Утверждение вытекает из утверждения 2) и леммы 4.4 из [4]. Лемма доказана.

Пусть Q – поле из утверждения 3) леммы 4.2. Представим его в виде объединения $Q = \cup Q_i$ возрастающей цепочки конечных подполей

$$Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq Q_3 \subseteq \dots, \quad (6)$$

а подгруппы H и Z – в виде объединений $H = \cup H_i, Z = \cup Z_i$ соответствующих цепочек конечных подгрупп

$$\begin{aligned} H_1 < H_2 < H_3 < \dots, \\ Z_1 < Z_2 < Z_3 < \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

где $Z_k \lambda H_k$ изоморфна подгруппе Бореля группы $L_2(Q_k)$ (возможность этих представлений вытекает непосредственно из утверждения 3) леммы 4.2).

ЛЕММА 4.3. *Группа B представима в виде объединения $B = \cup B_k$ возрастающей цепочки $B_1 < B_2 < B_3 < \dots$ конечных подгрупп B_k , изоморфных $M(Q_k, x_k)$, где Q_k – конечные поля цепочки (6).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно можно считать, что $z_0 \in Z_1$. Так как H действует регулярно на множествах неединичных элементов из Z и U/Z , а группа U неабелева (леммы 4.1, 4.2), то, начиная с некоторого номера m , подгруппы $U_k = \langle t_0^{H_k} \rangle$ неабелевы. Без ограничения общности считаем, что уже $U_1 = \langle t_0^{H_1} \rangle$ – неабелева подгруппа. Обозначим $|Q_k| = q_k$. Тогда $|Z_k| = q_k, |H_k| = q_k - 1$ и ввиду изоморфности факторгруппы B/Z подгруппе Бореля из $L_2(Q)$ (лемма 4.2) факторгруппа $U_k Z/Z$ имеет порядок q_k .

По лемме 4.1 в подгруппе U любой смежный класс uZ , отличный от Z , состоит в точности из всех решений уравнения $x^2 = u^2$. Поэтому в факторгруппе $\bar{U} = U/Z_k$ справедливо равенство $|\Omega_1(\bar{U}) : \bar{Z}| = q_k$. Из обобщенной теоремы Машке [18] следует $\Omega_1(\bar{U}) = \bar{Z} \times \bar{U}_k$. Таким образом, подгруппа U_k неабелева, допустима относительно H_k , имеет порядок q_k^2 и H_k действует регулярно на множестве ее инволюций. Как вытекает из теоремы Хигмана [6] (см. также [5, с. 115]), U_k изоморфна некоторой 2-группе Судзуки $S(Q_k, x_k)$, где x_k – подходящий автоморфизм поля Q_k . По лемме 6 из [5] $B_k = U_k \lambda H_k$ изоморфна группе $M(Q_k, x_k)$.

Ввиду определения подгрупп U_k и B_k имеем $U_k < U_{k+1}$ и $B_k < B_{k+1}$. Таким образом, цепочке (6) соответствуют цепочки подгрупп

$$U_1 < U_2 < U_3 < \dots, \quad (8)$$

$$B_1 < B_2 < B_3 < \dots, \quad (9)$$

при этом $B_k \simeq M(Q_k, x_k)$. Объединение L цепочки (9) содержит подгруппы H, Z и нетривиально пересекается с множеством $U \setminus Z$. Учитывая действие подгруппы H на U/Z (лемма 4.2), заключаем, что $L = B$. Лемма доказана.

5. Доказательство теоремы 2 и следствия 1. Итак, пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы 2 и предположим, что $B = N_G(U) \neq G$. Поскольку $r(U) > 1$, то в рассматриваемой ситуации верны леммы 2.2–2.5, 4.1–4.3. Воспользуемся стандартными, ранее введенными обозначениями.

ЛЕММА 5.1. В группе G выполняется структурное тождество Судзуки

$$vtv = u^{-1}vu, \quad t, u \in U^\#, \quad t^2 = 1, \quad t \in \langle u \rangle, \quad |tv| = 2n + 1 < \infty. \quad (10)$$

При этом для фиксированных U, H, v существует единственная пара элементов t, u с таким свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.5 для инволюции v существует такая пара элементов $t, u \in U$. Учитывая теорему 1, заключаем, что $t \neq u$ и $|u| = 4$. Лемма доказана.

Ввиду леммы 4.3 без ограничения общности можно считать, что элементы t, u из структурного тождества Судзуки (10) содержатся во всех подгруппах U_n цепочки (8). Пусть $H_n, U_n, B_n = U_n \lambda H_n$ – подгруппы цепочек (7)–(9).

ЛЕММА 5.2. Каждый элемент из $U_n^\#$ сопряжен элементом из H_n точно к одному из элементов $u^2, u, u^{-1}, \pi(k) = uk^{-1}u^{-1}k$ ($1 \neq k \in H_n$), где u – элемент порядка 4 из структурного тождества Судзуки (10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма доказана в [5, предложение 20].

По лемме 2.4 если $1 \neq x \in U$, то

$$vxv = g(x)h(x)vf(x), \quad (11)$$

где $g(x), f(x)$ – функции, определенные на $U^\#$ со значениями в U , $h(x)$ – функция, отображающая $U^\#$ в H (см. [5, с. 109]).

ЛЕММА 5.3. Пусть $\pi(k) = uk^{-1}u^{-1}k$, где $1 \neq k \in H_n$. Тогда

$$f(\pi(k)) = rur^{-1}ku^{-1}k^{-1}, \quad g(\pi(k)) = uk^{-2}ru^{-1}r^{-1}k^2, \quad h(\pi(k)) = k^{-2}r^2,$$

где r – элемент из H_n такой, что $t^r = [k, t^k]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся вычислениями предложения 20 из [5]. Учитывая структурное тождество (10) и соотношение $k^v = k^{-1}$ (лемма 2.2), получаем

$$vuk^{-1}u^{-1}kv = vuuvk^{-1}vvu^{-1}vkv = uvtktvu^{-1}k^{-1} = uk^{-2}vk^{-1}(k^{-1}tkt)kvku^{-1}k^{-1}.$$

Очевидно, что элемент $k^{-1}tkt \in Z(U_n) = Z_n$, и, так как $k \neq 1$, то существует единственный элемент $r = r(k) \in H_n$ такой, что $k^{-1}(k^{-1}tkt)k = r^{-1}tr$. Таким образом,

$$v(\pi(k))v = vuk^{-1}u^{-1}kv = uk^{-2}rvtvr^{-1}ku^{-1}k^{-1} = uk^{-2}ru^{-1}vur^{-1}ku^{-1}k^{-1}.$$

По определению функций f, g и h и лемме 2.4 мы имеем

$$f(\pi(k)) = rur^{-1}ku^{-1}k^{-1}, \quad g(\pi(k)) = uk^{-2}ru^{-1}r^{-1}k^2, \quad h(\pi(k)) = k^{-2}r^2.$$

Лемма доказана.

Пусть B_n – член цепочки (9).

ЛЕММА 5.4. *Группа $G_n = B_n \langle v \rangle B_n$ – конечная подгруппа группы G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $G_n = G_n^{-1}$, и остается установить замкнутость умножения в G_n . Так как $G_n \cdot G_n = B_n v U_n v U_n$, то ввиду равенства (11) достаточно показать, что $g(x), f(x), h(x) \in B_n$ при любом $1 \neq x \in U_n$. Докажем это.

Если x – один из элементов t, u, u^{-1} , то доказываемое включение следует непосредственно из структурного тождества (10) и определения функций g, f, h . Действительно, из $vtv = u^{-1}vu$ вытекают равенства $vuv = uv$, $vu^{-1}v = tvu^{-1}$ и элементы

$$f(u) = t, \quad g(u) = u, \quad h(u) = 1, \quad f(u^{-1}) = u^{-1}, \quad g(u^{-1}) = t, \quad h(u^{-1}) = 1$$

принадлежат B_n при любом n .

Далее, из леммы 5.3 следует, что $f(\pi(k)), g(\pi(k)), h(\pi(k)) \in B_n$ для любого элемента $k \in H_n^\#$. Следовательно, если $x = \pi(k)$ при некотором $k \in H_n^\#$, то $g(x), f(x), h(x) \in B_n$.

Заметим, что для любых элементов $y \in U_n, d \in H_n$ справедливо равенство

$$vy^d v = dvyvd^{-1} = df(y)h(y)vg(y)d^{-1} = df(y)d^{-1} \cdot h(y)d^2 \cdot v \cdot dg(y)d^{-1}.$$

Поэтому если $g(y), f(y), h(y) \in B_n$, то и $g(y^d), f(y^d), h(y^d) \in B_n$. По лемме 5.2 элемент $x \in U_n^\#$ сопряжен с помощью некоторого элемента из H_n с одним из элементов $t, u, u^{-1}, \pi(k)$. Отсюда и ввиду вышешоженного заключаем, что $g(x), f(x), h(x) \in B_n$ для любого элемента $x \in U_n$. Следовательно, $G_n \cdot G_n = G_n$ и лемма доказана.

ЛЕММА 5.5. *Имеет место изоморфизм $G_n \simeq Sz(Q_n)$ и B_n – подгруппа Бореля в этой группе.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма доказана в [11].

ЛЕММА 5.6. *Имеет место изоморфизм $G \simeq Sz(Q)$, где Q – поле из леммы 4.2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По леммам 5.4, 5.5 группа G_n изоморфна конечной группе Судзуки $Sz(Q_n)$. Значит, $q_n = 2^{2m_n+1}$ и поле Q_n обладает единственным автоморфизмом θ_n со свойством $\theta_n^2 = 2$. Отсюда следует, что и поле $Q = \bigcup_n Q_n$ обладает автоморфизмом θ с этим свойством.

Далее воспользуемся доказательством аналогичной леммы из [11]. Как известно [5], [9], группа $Sz(Q)$ порождается всевозможными матрицами вида

$$(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha^{1+\theta} + \beta & \alpha^\theta & 1 & 0 \\ \alpha^{2+\theta} + \alpha\beta + \beta^\theta & \beta & \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

$$h = \begin{pmatrix} h^{1+\theta^{-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h^{\theta^{-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h^{-\theta^{-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h^{-1-\theta^{-1}} \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \beta, h \in P, h \neq 0$ (здесь мы отождествили подгруппу H с мультипликативной группой поля Q) и θ – автоморфизм поля Q с $\theta^2 = 2$. Цепочке конечных полей Q_n (6) ввиду лемм 4.2, 4.3, 5.4, 5.5 соответствует цепочка конечных групп Судзуки

$$G_1 < G_2 < G_3 < \dots, \quad G_n \simeq Sz(Q_n),$$

и, как следует из лемм 2.3, 4.3, объединение членов этой цепочки совпадает с группой G . В силу леммы 5.5 и теоремы 8 из [5] при любом натуральном n существует изоморфизм ψ_n подгруппы $G_n = B_n \langle v \rangle B_n$ на подгруппу $Sz(Q_n)$, при котором

$$\psi_n(t) = (0, 1), \quad \psi_n(u) = (1, 0), \quad \psi_n(h) = h, \quad \psi_n(v) = w.$$

Понятно, что изоморфизм ψ_n однозначно восстанавливается по образам t, u, H, v . Поэтому ограничение ψ_{n+1} на G_n совпадает с ψ_n , и мы можем следующим образом корректно определить отображение ψ группы G на группу $Sz(Q)$: если $g \in G_n$, то $\psi(g) = \psi_n(g)$. Легко убедиться, что ψ – изоморфизм G на $Sz(Q)$. Лемма и вместе с ней теорема 2 доказаны.

Заметим, наконец, что в периодической группе любая инволюция конечна, и поэтому следствие 1 вытекает из теоремы 4.1 [4] и теоремы 2 настоящей статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 6–14 издания. Новосибирск, 1978–1999.
- [2] Созутов А. И. О группах с сильно вложенной подгруппой // Международная конференция “Симметрия в естествознании”. Тезисы докл. Красноярск, 1998. С. 121–123.
- [3] Созутов А. И., Сучков Н. М. О некоторых бесконечных кратно транзитивных группах // Международный алгебраический семинар, посвященный 70-летию кафедры высшей алгебры МГУ (10–12 февраля 1999 г.). Тезисы докл. М., 1999. С. 52.
- [4] Созутов А. И. О некоторых бесконечных группах с сильно вложенной подгруппой // Алгебра и логика. (в печати).
- [5] Suzuki M. On a class of doubly transitive groups // Ann. of Math. 1961. V. 75. № 1. P. 105–145.
- [6] Higman G. Suzuki 2-groups // Illinois J. Math. 1963. V. 7. P. 79–96.
- [7] Горенштейн Д. Конечные простые группы. М.: Мир, 1985.
- [8] Созутов А. И. О группах с классом фробениусово-абелевых элементов // Алгебра и логика. 1995. Т. 34. № 5. С. 531–549.
- [9] Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М. Конечные расщепляемые группы. М.: Наука, 1968.
- [10] Созутов А. И., Сучков Н. М. О некоторых дважды транзитивных группах. Препринт № 17. Красноярск: ИВМ СО РАН, 1998.
- [11] Созутов А. И., Сучков Н. М. О бесконечных Z -группах с заданными стабилизаторами точек. Деп. ВИНТИ 09.03.99 № 700–В99. Красноярск: Краснояр. гос. архит.-строит. акад., 1999.
- [12] Созутов А. И., Шунков В. П. Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы // Матем. сб. 1976. Т. 100. № 4. С. 495–506.
- [13] Беляев В. В. Группы с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1987. Т. 26. № 5. С. 531–535.
- [14] Старостин А. И. О группах Фробениуса // Укр. матем. ж. 1971. Т. 23. № 5. С. 629–639.
- [15] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1977.
- [16] Zassenhaus H. Kennzeichnung endlicher linearen Gruppen als Permutationsgruppen // Abh. Math. Sem. Hamburg. 1936. V. 11. P. 17–40.
- [17] Холл М. Теория групп. М.: ИЛ, 1962.
- [18] Сучков Н. М. Автоморфно факторизуемые группы // Алгебра и логика. 1979. Т. 18. № 4. С. 481–487.

(А. И. Созутов) Красноярская государственная
архитектурно-строительная академия
(Н. М. Сучков) Красноярский государственный университет
E-mail: root@sozutov.krasnoyarsk.su

Поступило
16.08.1999