Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Фарков, Об ε -энтропии классов голоморфных функций, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 2, 286–293

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm945>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 09:32:17

УДК 517

ОБ ε -ЭНТРОПИИ КЛАССОВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Ю. А. Фарков

Пусть B_R^d – шар радиуса R в $\mathbb{C}^d$ и σ – стандартная мера на единичной сфере в $\mathbb{C}^d$. Для $R > 1$, $1 \leq p \leq \infty$, и натуральных l, d через $H_R^0(l, p, d)$ обозначается класс голоморфных в B_R^d функций f , у которых в однородном полиномиальном разложении первые l слагаемых нулевые и радиальные производные порядка l принадлежат замкнутому единичному шару пространства Харди $H^p(B_R^d)$. В статье получена асимптотическая формула для ε -энтропии класса $H_R^0(l, p, d)$ в пространствах $L^p(\sigma)$, $1 \leq p < \infty$, и $C(\overline{B}_1^d)$.

Библиография: 6 названий.

1. Формулировка результата и предварительные сведения. Пусть A – предкомпактное множество в метрическом пространстве X и фиксировано $\varepsilon > 0$. Через $N_\varepsilon(A; X)$ обозначается минимальное число точек в ε -сети для A в X . Величина

$$\mathcal{H}_\varepsilon(A; X) := \log N_\varepsilon(A; X),$$

где логарифм берется по основанию 2, называется ε -энтропией множества A в X (см., например, [1]).

Пусть B^d – единичный шар в $\mathbb{C}^d$, $S^d := \partial B^d$ – его граница, $B_R^d := RB^d$ – шар радиуса R , $\overline{B}_R^d$ – его замыкание, σ – стандартная мера на S^d , $\sigma(S^d) = 1$ (см. [2]). Пространства Харди $H^p(B_R^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, состоят из всех голоморфных в B_R^d функций f , имеющих конечные нормы

$$\|f\|_{H^p(B_R^d)} := \sup_{0 < r < R} \left(\int_{S^d} |f(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \right)^{1/p}$$

при $p < \infty$ и

$$\|f\|_{H^\infty(B_R^d)} := \sup\{|f(z)| : z \in B_R^d\}.$$

Если голоморфная в B_R^d функция f имеет однородное полиномиальное разложение

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(z), \quad z \in B_R^d, \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-10035 и № 99-01-01181.

то l -я радиальная производная этой функции определяется формулой

$$(\mathcal{R}^l f)(z) := \sum_{j=l}^{\infty} \frac{j!}{(j-l)!} F_j(z).$$

Для фиксированных $l, d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, через $H_R(l, p, d)$ обозначается класс голоморфных в B_R^d функций f , удовлетворяющих условию $\|\mathcal{R}^l f\|_{H^p(B_R^d)} \leq 1$. Пусть $H_R^0(l, p, d)$ – множество функций f из $H_R(l, p, d)$, для которых в разложении (1) первые l слагаемых нулевые: $F_0 = \dots = F_{l-1} = 0$. Положим $X_p := L^p(\sigma)$ для $1 \leq p < \infty$ и $X_\infty := C(\overline{B}^d)$.

ТЕОРЕМА. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $R > 1$, $l, d \in \mathbb{N}$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varepsilon(H_R^0(l, p, d); X_p) &= \frac{2}{(d+1)! (\log R)^d} \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right)^{d+1} \\ &\quad - \frac{2l}{d! (\log R)^d} \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right)^d \log \log \frac{1}{\varepsilon} + O \left(\left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right)^d \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Некоторые аналоги формулы (2) в случае $d = 1$ можно найти в [3] и [4]. Излагаемый ниже вывод этой формулы основан на известном общем методе оценок ε -энтропии в пространствах с базисом (см. [1, с. 277]) и результатах автора [5] о поперечниках классов $H_R(l, p, d)$.

Все мультииндексы $k = (k_1, \dots, k_d)$ из $\mathbb{Z}_+^d$ занумеруем таким образом, что $k = k(j)$, $|k(j)| \leq |k(j+1)|$, $j = 0, 1, \dots$; здесь, как обычно, $|k| = k_1 + \dots + k_d$. Положим $\tilde{n} = |k(n)|$, $\bar{n} := \max\{j \in \mathbb{N} : |k(j)| = |k(n)|\}$, $\hat{l} := \min\{j \in \mathbb{N} : |k(j)| = l\}$, $s_l := \text{card}\{j \in \mathbb{Z}_+ : |k(j)| = l\}$.

Легко видеть, что

$$s_l = \binom{l+d-1}{d-1}$$

и для $\tilde{n} > l$

$$\bar{n} - \hat{l} + 1 = \sum_{j=l}^{\tilde{n}} s_j. \quad (3)$$

Из свойств сочетаний (см., например, [6, с. 54]) следует, что для любого натурального N

$$\sum_{j=0}^N s_j = \binom{N+d}{d}, \quad \sum_{j=1}^N j s_j = \frac{N(N+1) \cdots (N+d)}{(d-1)! (d+1)}. \quad (4)$$

Отметим также, что

$$\tilde{n} = N \iff \binom{N+d-1}{d} \leq n \leq \binom{N+d}{d} - 1$$

и, следовательно, по формуле Стирлинга $\tilde{n} \sim (d! n)^{1/d}$, $n \rightarrow \infty$.

Для $N > l$ положим

$$\Phi_N(l, d) := \sum_{j=l}^{N-1} s_j \log[j(j-1) \cdots (j-l+1)],$$

$$F_N(l, d) := \frac{N^{\gamma(N, l)}}{(N-l)^{s_l} (N-l-1)^{s_{l+1}} \cdots 2^{s_{N-2}}},$$

где $\gamma(N, l) := \sum_{j=l}^{N-1} s_j$.

ЛЕММА 1. При $N \rightarrow \infty$ имеют место асимптотические формулы

$$\Phi_N(l, d) = \frac{l}{d!} N^d \log N + O(N^d), \quad (5)$$

$$\ln F_N(l, d) = \left(\frac{1}{d!} + \frac{1}{4(d-2)!} \right) N^d + O(N^{d-1} \ln N). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вывода (5) достаточно воспользоваться формулами

$$s_N = \frac{N^{d-1}}{(d-1)!} + O(N^{d-2}), \quad \log[N(N-1) \cdots (N-l+1)] = l \log N + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$\sum_{j=l}^{N-1} j^{d-1} \log j = \frac{N^d}{d} \log N + O(N^d).$$

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} F_N(l, d) &= \left[\frac{N^{N-l}}{(N-l)!} \right]^{s_l} \prod_{j=1}^{N-l-2} \frac{N^{s_{N-j}-s_l}}{(N-l-j)^{s_{l+j}-s_l}} \\ &= \left[\frac{N^{N-l}}{(N-l)!} \right]^{s_l} \prod_{k=1}^{N-l-1} \left(\frac{N^k}{k!} \right)^{s_{N-k}-s_{N-k-1}}. \end{aligned}$$

Поскольку $N! \geq (N/e)^N$, то

$$F_N(l, d) \leq e^{\gamma(N, l)} \left(\frac{N}{N-l} \right)^{s_l(N-l)} B_N(l, d), \quad (7)$$

где

$$\ln B_N(l, d) = \ln N \sum_{k=1}^{N-l-1} (s_{N-k} - s_{N-k-1}) k - \sum_{k=1}^{N-l-1} (s_{N-k} - s_{N-l-1}) k \ln k.$$

Учитывая, что

$$s_{N-k} - s_{N-k-1} = \binom{N+d-k-2}{d-2},$$

аналогично (5) находим

$$\ln B_N(l, d) = \frac{N^d}{4(d-2)!} + O(N^{d-1} \ln N).$$

Так как ввиду (4) имеет место асимптотическое равенство

$$\gamma(N, l) = \frac{N^d}{d!} + O(N^{d-1})$$

и $(N/(N-l))^{N-l} < e^l$, то из (7) следует (6). Лемма 1 доказана.

Положим $\alpha_j^l := (j-l)!/j!$, $\mathcal{P}_N(\mathbb{C}^d) := \text{span}\{z^k : |k| \leq N, k \in \mathbb{Z}_+^d\}$, где $z^k = z_1^{k_1} \cdots z_d^{k_d}$.

ЛЕММА 2. Пусть $P_N \in \mathcal{P}_N(\mathbb{C}^d)$, $R > 1$, $1 \leq p \leq \infty$, $l, d, N \in \mathbb{N}$, $l < N$. Тогда имеют место оценки

$$\|P_N(R)\|_{X_p} \leq R^N \|P_N\|_{X_p}, \quad \|\mathcal{R}^l P_N\|_{H^p(B_R^d)} \leq (\alpha_N^l)^{-1} \|P_N\|_{H^p(B_R^d)}.$$

Эти неравенства доказаны в [5].

Средние Фейера функции f , имеющей однородное разложение (1), определяются формулой

$$(\sigma_N f)(z) := \sum_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{j}{N}\right) F_j(z).$$

ЛЕММА 3. Для любой функции $f \in H^p(B_R^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, выполнено неравенство

$$\|\sigma_N f\|_{H^p(B_R^d)} \leq \|f\|_{H^p(B_R^d)}. \quad (8)$$

Действительно, для $d = 1$ неравенство (8) хорошо известно, а переход к случаю $d > 1$ осуществляется с помощью срез-функции.

Для $N > l$ положим

$$\lambda_{0,k-1}^l = \cdots = \lambda_{l-1,N-1}^l = 1, \quad \lambda_{j,N-1}^l = 1 - \frac{\alpha_{2N-j}^l}{\alpha_j^l} \left(\frac{1}{R}\right)^{2(N-j)}, \quad j \geq l.$$

ЛЕММА 4. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $R > 1$, $l, d, n \in \mathbb{N}$, $l < \tilde{n}$. Тогда выполнено равенство

$$\sup_{f \in H_R(l,p,d)} \left\| f - \sum_{j=0}^{\tilde{n}-1} \lambda_{j,\tilde{n}-1}^l F_j \right\|_{X_p} = \alpha_{\tilde{n}}^l R^{-\tilde{n}}, \quad (9)$$

где $\{F_j\}$ – компоненты однородного разложения функции f .

Действительно, как показано в [5], правая часть формулы (9) совпадает со значениями колмогоровского, гельфандовского, бернштейновского и линейного n -поперечников класса $H_R(l, p, d)$ в метрике X_p ; при этом метод

$$f \approx \sum_{j=0}^{\tilde{n}-1} \lambda_{j,\tilde{n}-1}^l F_j$$

является оптимальным для линейного n -поперечника.

2. Доказательство теоремы. Пусть $p = \infty$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем n из условия

$$\alpha_{\tilde{n}+1}^l R^{-\tilde{n}-1} \leq \frac{\varepsilon}{4} < \alpha_{\tilde{n}}^l R^{-\tilde{n}}. \quad (10)$$

Тогда имеет место асимптотическое равенство

$$\tilde{n} = \frac{\log 1/\varepsilon}{\log R} - l \frac{\log \log 1/\varepsilon}{\log R} + O(1). \quad (11)$$

В пространстве $\mathbb{C}^{\bar{n}-\hat{l}+1} = \mathbb{R}^{2(\bar{n}-\hat{l}+1)}$ множество $U_{n,l}$ определим условием

$$(a_{k(\hat{l})}, \dots, a_{k(\bar{n})}) \in U_{n,l} \iff \max_{z \in \bar{B}^d} \left| \sum_{j=\hat{l}}^{\bar{n}} a_{k(j)} z^{k(j)} \right| \leq 1,$$

т.е.

$$\max_{z \in \bar{B}_R^d} \left| \sum_{j=\hat{l}}^{\bar{n}} R^{-j} \sum_{|k|=j} a_k z^k \right| \leq 1.$$

Множество $U_{n,l}$ выпукло в $\mathbb{R}^{2(\bar{n}-\hat{l}+1)}$ и, следовательно, измеримо по Жордану. Введем в $\mathbb{R}^{2(\bar{n}-\hat{l}+1)}$ меру Жордана μ , нормированную условием $\mu(U_{n,l}) = 1$. Если $\|\cdot\|$ – норма в $\mathbb{R}^{2(\bar{n}-\hat{l}+1)}$, для которой $U_{n,l}$ является единичным шаром, то

$$\|(b_{k(\hat{l})}, \dots, b_{k(\bar{n})})\| = \max_{z \in \bar{B}^d} \left| \sum_{j=\hat{l}}^{\bar{n}} b_{k(j)} z^{k(j)} \right|. \quad (12)$$

Множество $V_{n,l}$ в $\mathbb{R}^{2(\bar{n}-\hat{l}+1)}$ определим условием

$$(b_{k(\hat{l})}, \dots, b_{k(\bar{n})}) \in V_{n,l} \iff \max_{z \in \bar{B}_R^d} \left| \sum_{j=\hat{l}}^{\bar{n}} (\alpha_j^l)^{-1} \sum_{|k|=j} b_k z^k \right| \leq 1,$$

т.е. $\max_{z \in \bar{B}_R^d} |\mathcal{R}^l b(x)| \leq 1$, где $b(z) = \sum_{j=\hat{l}}^{\bar{n}} b_{k(j)} z^{k(j)}$.

Компоненты векторов из $V_{n,l}$ получаются умножением компонент соответствующих векторов из $U_{n,l}$ на числа

$$\underbrace{\alpha_{\hat{l}}^l R^{-l}, \dots, \alpha_{\hat{l}}^l R^{-l}}_{s_l}, \quad \underbrace{\alpha_{\hat{l}+1}^l R^{-l-1}, \dots, \alpha_{\hat{l}+1}^l R^{-l-1}}_{s_{l+1}}, \quad \dots, \quad \underbrace{\alpha_{\bar{n}}^l R^{-\bar{n}}, \dots, \alpha_{\bar{n}}^l R^{-\bar{n}}}_{s_{\bar{n}}}.$$

Поэтому выполняется равенство

$$[\mu(V_{n,l})]^{1/2} = R^{-\sum_{j=\hat{l}}^{\bar{n}} j s_j} \prod_{j=\hat{l}}^{\bar{n}} (\alpha_j^l)^{s_j}. \quad (13)$$

Пусть $\{g_1, \dots, g_N\}$ – максимальное по числу элементов 2ε -различимое множество в $V_{n,l}$ (множество называется ε -различимым, если расстояние между любыми двумя его элементами больше ε). Тогда

$$V_{n,l} \subset \bigcup_{j=1}^N (2\varepsilon U_{n,l} + g_j), \quad \mu(V_{n,l}) \leq N(2\varepsilon)^{2(\bar{n}-\hat{l}+1)}$$

и в силу (13)

$$N \geq \left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^{2(\bar{n}-\hat{l}+1)} R^{-2\sum_{j=\hat{l}}^{\bar{n}} j s_j} \prod_{j=\hat{l}}^{\bar{n}} (\alpha_j^l)^{2s_j}.$$

Отсюда и из (3), (12) следует неравенство

$$\mathcal{H}_\varepsilon(H_R(l, \infty, d), C(\overline{B}^d)) \geq \left(2 \sum_{j=l}^{\tilde{n}} s_j\right) \log\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) - 2 \left(\sum_{j=l}^{\tilde{n}} j s_j\right) \log R + 2 \sum_{j=l}^{\tilde{n}} s_j \log \alpha_j^l. \quad (14)$$

Согласно (4) здесь

$$\sum_{j=l}^{\tilde{n}} s_j = \frac{\tilde{n}^d}{d!} + O(\tilde{n}^{d-1}), \quad \sum_{j=l}^{\tilde{n}} j s_j = \frac{\tilde{n}^{d+1}}{(d-1)!(d+1)} + O(\tilde{n}^d),$$

а последнее слагаемое в (14) оценивается с помощью (5). После замены $\tilde{n}$ по формуле (11) получается требуемая оценка снизу:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varepsilon(H_R^0(l, \infty, d); C(\overline{B}^d)) &\geq \frac{2}{(d+1)!(\log R)^d} \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{d+1} \\ &\quad - \frac{2l}{d!(\log R)^d} \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^d \log \log \frac{1}{\varepsilon} + O\left(\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^d\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Докажем обратное неравенство. Множества $A_{n,l}$ и $B_{n,l}$ определим условиями:

$$(b_{k(\hat{l})}, \dots, b_{k(\overline{n})}) \in A_{n,l} \iff \max_{z \in \overline{B}_R^d} \left| \sum_{j=l}^{\tilde{n}} (\lambda_{j,\tilde{n}}^l \alpha_j^l)^{-1} \sum_{|k|=j} b_k z^k \right| \leq 1,$$

$$(b_{k(\hat{l})}, \dots, b_{k(\overline{n})}) \in B_{n,l} \iff \exists b_{k(\overline{n}+1)}, b_{k(\overline{n}+2)}, \dots :$$

$$\max_{z \in \overline{B}_k^d} \left| \sum_{j=l}^{\tilde{n}} (\lambda_{j,\tilde{n}}^l \alpha_j^l)^{-1} \sum_{|k|=j} b_k z^k + \sum_{j=\overline{n}+1}^{\infty} b_{k(j)} z^{k(j)} \right| \leq 1$$

соответственно. Предположим, что полином

$$P(z) = \sum_{j=l}^{\tilde{n}} \sum_{|k|=j} a_k z^k$$

удовлетворяет неравенству $\|P\|_{C(\overline{B}^d)} \leq 1$. Тогда по лемме 2 $R^{-\tilde{n}} \alpha_n^l P \in H_R(l, \infty, d)$ и согласно (9)

$$\max_{z \in \overline{B}^d} \left| (R^{-\tilde{n}} \alpha_n^l) \left(P(z) - \sum_{j=l}^{\tilde{n}} \lambda_{j,\tilde{n}}^l \sum_{|k|=j} a_k z^k \right) \right| \leq \alpha_{\tilde{n}+1}^l R^{-\tilde{n}-1},$$

т.е.

$$\max_{z \in \overline{B}^d} \left| P(z) - \sum_{j=l}^{\tilde{n}} \lambda_{j,\tilde{n}}^l \sum_{|k|=j} a_k z^k \right| \leq \frac{\tilde{n} - l + 1}{\tilde{n} + 1} \frac{1}{R}.$$

Отсюда следует, что

$$\max_{z \in \bar{B}^d} \left| \sum_{j=l}^{\tilde{n}} \lambda_{j,\tilde{n}}^l \sum_{|k|=j} a_k z^k \right| \leq 2.$$

Выполнив замену переменного $z \mapsto Rz$, устанавливаем, что

$$A_{n,l} \subset 2V_{n,l}. \quad (16)$$

По лемме 3 преобразование

$$\sigma_n: \sum_{j=l}^{\tilde{n}} \sum_{|k|=j} a_k z^k \mapsto \sum_{j=l}^{\tilde{n}} \left(1 - \frac{j}{\tilde{n}+1}\right) \sum_{|k|=j} a_k z^k$$

отображает $B_{n,l}$ в $A_{n,l}$. Отсюда с учетом (16) получаем

$$B_{n,l} \subset \sigma_n^{-1}(A_{n,l}) \subset 2\sigma_n^{-1}(V_{n,l}). \quad (17)$$

Пусть $C_{n,l}$ обозначает $\varepsilon/2$ -расширение множества $2\sigma_n^{-1}(V_{n,l})$ и пусть $\{x_1, \dots, x_M\}$ – максимальное (по числу элементов) ε -различимое подмножество в $2\sigma_n^{-1}(V_{n,l})$. Тогда

$$\bigcup_{j=1}^M \left(\frac{\varepsilon}{2} V_{n,l} + x_j \right) \subset C_{n,l}. \quad (18)$$

Пусть $y \in C_{n,l}$. Выберем $x \in 2\sigma_n^{-1}(V_{n,l})$ так, что $\|x - y\| \leq \varepsilon/2$ (здесь $\|\cdot\|$ из (12)). В силу леммы 3 имеем $V_{n,l} \subset \sigma_n^{-1}(V_{n,l})$, а по лемме 2 множество $V_{n,l}$ содержит шар радиуса $\alpha_{\tilde{n}}^l R^{-\tilde{n}}$. Значит, множество $2\sigma_n^{-1}(V_{n,l})$ содержит шар радиуса $2\alpha_{\tilde{n}}^l R^{-\tilde{n}}$. Ввиду (10) разность $x - y$ находится в этом шаре, а с учетом выпуклости множества $2\sigma_n^{-1}(V_{n,l})$ выполняется условие

$$\frac{1}{2}[(y - x) + x] \in 2\sigma_n^{-1}(V_{n,l}),$$

т.е. $y \in 4\sigma_n^{-1}(V_{n,l})$. Таким образом, $C_{n,l} \subset 4\sigma_n^{-1}(V_{n,l})$ и ввиду (18)

$$\bigcup_{j=1}^M \left(\frac{\varepsilon}{2} V_{n,l} + x_j \right) \subset 4\sigma_n^{-1}(V_{n,l}).$$

Отсюда, так как

$$\sigma_n^{-1}: \sum_{j=l}^{\tilde{n}} \sum_{|k|=j} a_k z^k \mapsto \sum_{j=l}^{\tilde{n}} \left(\frac{\tilde{n}+1}{\tilde{n}-j+1} \right) \sum_{|k|=j} a_k z^k,$$

находим

$$\sqrt{M} \leq \left(\frac{8}{\varepsilon} \right)^{\tilde{n}-\hat{l}+1} \frac{(\tilde{n}+1)^{\tilde{n}-\hat{l}+1}}{(\tilde{n}-l+1)^{s_l} (\tilde{n}-l)^{s_{l+1}} \dots 2^{s_{\tilde{n}-1}}} [\mu(V_{n,l})]^{1/2}.$$

Далее, согласно (3), (6) и (13) имеем асимптотическую оценку

$$\log M \leq \left(2 \sum_{j=l}^{\tilde{n}} s_j \right) \log \frac{1}{\varepsilon} - 2 \left(\sum_{j=l}^{\tilde{n}} j s_j \right) \log R + 2 \sum_{j=l}^{\tilde{n}} s_j \log \alpha_j^l + O(\tilde{n}^d). \quad (19)$$

Пусть $x_m = (b_{k(\hat{l})}^{(m)}, \dots, b_{k(\tilde{n})}^{(m)})$, $m = 1, \dots, M$, – векторы из (18). Покажем, что полиномы

$$P_m(z) = \sum_{j=l}^{\tilde{n}} \sum_{|k|=j} b_k^{(m)} z^k, \quad k = 1, \dots, M,$$

образуют $5\varepsilon/4$ -сеть для $H_R^0(l, \infty, d)$ в пространстве $C(\overline{B}^d)$. Для любой $f \in H_R^0(l, \infty, d)$ в силу (9) и (10) имеем оценку

$$\max_{z \in \overline{B}^d} \left| f(z) - \sum_{j=l}^{\tilde{n}} \lambda_{j, \tilde{n}}^l F_j(z) \right| \leq \alpha_{\tilde{n}+1}^l R^{-\tilde{n}-1} \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

где $F_j(z) = \sum_{|k|=j} \hat{f}_k z^k$. Так как

$$\|\mathcal{R}^l f\|_{H^\infty(B_k^d)} = \sup_{z \in B_k^d} \left| \sum_{j=l}^{\infty} (\alpha_j^l)^{-1} F_j(z) \right| \leq 1,$$

то вектор $f_{n,l} := (\lambda_{l, \tilde{n}}^l \hat{f}_{k(\hat{l})}, \dots, \lambda_{\tilde{n}, \tilde{n}}^l \hat{f}_{k(\tilde{n})})$ принадлежит $B_{n,l}$. Ввиду (12) и (17) среди $x_1, \dots, x_M$ найдется вектор x_m такой, что

$$\|f_{l,n} - x_m\| = \left\| \sum_{j=l}^{\tilde{n}} \lambda_{j, \tilde{n}}^l F_j - P_m \right\|_{C(\overline{B}^d)} < \varepsilon.$$

Но тогда $\|f - P_m\|_{C(\overline{B}^d)} < 5\varepsilon/4$. Поэтому

$$\mathcal{H}_{5\varepsilon/4}(H_R^0(l, \infty, d); C(\overline{B}^d)) \leq \log M.$$

Отсюда и из (19) с помощью (4), (5) и (11) получается оценка, обратная (15). В случае $1 \leq p < \infty$ формула (2) устанавливается аналогично. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.
- [2] Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.
- [3] Двейрин М. З. Поперечники и ε -энтропия классов функций, аналитических в единичном круге // Теория функций, функцион. анализ и их прилож. Вып. 23. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1975. С. 32–46.
- [4] Фарков Ю. А. О поперечниках некоторых классов аналитических функций // УМН. 1984. Т. 39. № 1. С. 161–162.
- [5] Farkov Yu. A. The N -widths of Hardy–Sobolev spaces of several complex variables // J. Approx. Theory. 1993. V. 75. № 2. P. 183–197.
- [6] Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969.