Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Шарипов, Е. Н. Цыганов, О сепаратной алгебраичности вдоль семейств алгебраических кривых, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 2, 294–302

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm946>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 15:51:27

УДК 517

О СЕПАРАТНОЙ АЛГЕБРАИЧНОСТИ ВДОЛЬ СЕМЕЙСТВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Е. Н. Цыганов, Р. А. Шарипов

В статье приводятся одно обобщение классической теоремы об алгебраичности по отдельным переменным и последующее ее доказательство.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. Теорема о голоморфности по отдельным переменным (теорема Хартогса) является одной из фундаментальных теорем в теории функций многих комплексных переменных (см., например, [1]). Она формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $f(z) = f(z_1, \dots, z_n)$, определенная в области $D \subset \mathbb{C}^n$, является голоморфной по каждой переменной z_i при любых фиксированных значениях остальных переменных. Тогда f голоморфна в D .

Теорема 1 имеет определенную модификацию для полиномиальных, рациональных и алгебраических функций (см. [2]). В последнем случае мы имеем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть голоморфная в области $D \subset \mathbb{C}^n$ функция $f(z)$ алгебраична по каждой переменной z_i при любых фиксированных значениях остальных переменных. Тогда она является голоморфной ветвью в D для некоторой алгебраической функции, заданной полиномиальным уравнением $P(f, z_1, \dots, z_n) = 0$.

В обоих случаях мы можем рассматривать следующие $(n - 1)$ -параметрические семейства комплексных прямых в D :

$$\begin{cases} z_i = c_i^{(m)} = \text{const} & \text{для } i \neq m, \\ z_m = t \in \mathbb{C} & \text{для } i = m. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь $t \in \mathbb{C}$ – комплексный параметр на прямой, а константы $c_i^{(m)}$ параметризуют прямые в m -м семействе. При сужении $f(z)$ на любую прямую вида (1.1) мы получаем следующую функцию:

$$f_m(t) = f(c_1^{(m)}, \dots, c_{m-1}^{(m)}, t, c_{m+1}^{(m)}, \dots, c_n^{(m)}), \quad (1.2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Европейского фонда INTAS, грант № 93-47 (руководитель С. И. Пинчук), Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00127 (руководитель Я. Т. Султанаев), а также поддержана грантом АН Республики Башкортостан (руководитель Н. М. Асадуллин).

векторов к кривым m -го семейства. В предположениях теоремы 4 у нас есть n голоморфных векторных полей:

$$\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n. \quad (2.4)$$

В криволинейных координатах $t, c_1^{(m)}, \dots, c_{n-1}^{(m)}$ m -е векторное поле $\mathbf{X}_m$ из (2.4) распрямляется и изображается дифференциальным оператором

$$\mathbf{X}_m = \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.5)$$

Однако, криволинейных координат, в которых распрямлялись бы одновременно все векторные поля (2.4), в общем случае не существует, ибо векторные поля $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ в общем случае не являются коммутирующими.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если задано n регулярных семейств полиномиальных кривых в области $D \subset \mathbb{C}^n$, то будем говорить, что они *находятся в общем положении*, если соответствующие векторные поля (2.4) линейно независимы в каждой точке $z \in D$.

Теперь рассмотрим полиномиальные кривые (1.3), которые по предположению теоремы 4 образуют n регулярных семейств общего положения. Обозначим через $d_{1m}, \dots, d_{nm}$ и p_m степени полиномов $z_1(t), \dots, z_n(t)$ и $f_m(t)$ в (1.3) и (1.4). Они зависят от выбора констант $c_1^{(m)}, \dots, c_{n-1}^{(m)}$. Поскольку m -е семейство кривых регулярно в области D , мы можем считать $d_{1m}, \dots, d_{nm}$ и p_m зависящими от точки $z \in D$:

$$\begin{aligned} d_{im}(z) &= \deg R_i^{(m)}(t), & i &= 1, \dots, n, \quad m = 1, \dots, n, \\ p_m(z) &= \deg f_m(t), & m &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Функции (2.6) – это целочисленные функции в D , их значения остаются постоянными вдоль кривых соответствующего семейства. В п. 4 мы докажем следующую теорему относительно функций (2.6).

ТЕОРЕМА 5. В предположениях теоремы 4 существует меньшая подобласть $\tilde{D} \subset D$ такая, что все функции (2.6) постоянны в $\tilde{D}$.

Теперь мы можем изложить идею доказательства центральной теоремы 4.

3. Доказательство теоремы 4. Заметим, что в теореме 5 мы сжимаем область D до $\tilde{D} \subset D$. Это никак не влияет на окончательный результат, так как голоморфная в D функция $f(z)$, алгебраическая в некоторой меньшей подобласти $\tilde{D}$, является алгебраической и в D . Поэтому мы можем уменьшить нашу область настолько, насколько это нам необходимо. Согласно теореме 5 у нас есть подобласть $\tilde{D} \subset D$, где все степени полиномов в (1.3) и (1.4) постоянны: $\deg R_i^{(m)}(t) = d_{im}$, $\deg f_m(t) = p_m$. Возьмем целые неотрицательные числа $k_1, \dots, k_n$ и q и построим моном:

$$M(k_1, \dots, k_n, q) = f^q \cdot (z_1)^{k_1} \dots (z_n)^{k_n}, \quad (3.1)$$

где $f = f(z)$. Моном (3.1) является голоморфной функцией в области $\tilde{D}$. Рассмотрим сужение этой функции на произвольную кривую m -го семейства в $\tilde{D}$. Сужение монома $M(k_1, \dots, k_n, q)$ есть полином по t , его степень выражается формулой

$$q_m = \deg M(k_1, \dots, k_n, q) = qp_m + \sum_{i=1}^n k_i d_{im}. \quad (3.2)$$

Если $N > q_m$ – некоторое целое число, то, применяя N -ю степень дифференциального оператора (2.5) к моному (3.1), мы получаем

$$(\mathbf{X}_m)^N M(k_1, \dots, k_n, q) = 0. \quad (3.3)$$

Относительно $M(k_1, \dots, k_n, q)$ равенство (3.3) есть линейное дифференциальное уравнение N -го порядка с голоморфными коэффициентами. Теперь объединим все равенства (3.3) в систему.

$$(\mathbf{X}_m)^N \varphi(z) = 0, \quad m = 1, \dots, n, \quad (3.4)$$

и определим $V(N)$ как множество, состоящее из решений системы уравнений (3.4), голоморфных в области $\tilde{D}$:

$$V(N) = \{\varphi \in \mathcal{H}(\tilde{D}) : (\mathbf{X}_m)^N \varphi = 0, \quad m = 1, \dots, n\}. \quad (3.5)$$

Поскольку уравнения (3.4) линейны и однородны, множество их решений $V(N)$ образует линейное пространство над полем комплексных чисел.

ТЕОРЕМА 6. *Для любого целого $N > 0$ комплексное линейное пространство (3.5) имеет конечную размерность и $\dim V(N) < (nN)^n$.*

В п. 4 мы докажем эту теорему, дав оценку для $\dim V(N)$. Определим $M(N)$ как число мономов (3.1) таких, что степень (3.2) их сужения на кривые меньше, чем N , т.е. $q_m < N$ для всех $m = 1, \dots, n$. Если для некоторого значения N мы найдем, что $M(N) > (nN)^n$, то мы получим, что некоторый набор мономов линейно зависим над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Это даст полиномиальное уравнение $P(f, z^1, \dots, z_n) = 0$ на функцию $f(z)$, что и будет доказательством теоремы 4. Поэтому заключительным шагом в доказательстве теоремы 4 должна быть требуемая оценка для $M(N)$ по крайней мере для какого-то одного значения N .

Обозначим $p = \max\{p_1, \dots, p_n\}$ и $d_i = \max\{d_{i1}, \dots, d_{in}\}$ (см. формулу (3.2) выше). Выберем произвольное целое число $K > 1$ и положим

$$N = N(K) = 1 + Kp + \sum_{i=1}^n Kd_i. \quad (3.6)$$

Тогда для $q = 1, \dots, K$ и для $k_i = 1, \dots, K$ степени соответствующих мономов (3.1) не превосходят N . Для числа же таких мономов отсюда находим, что $M(N) \geq K^{n+1}$. Для размерности пространства $V(N)$ из (3.6) и из теоремы 6 выводим

$$\dim V(N) \leq (nN)^n \leq \text{const} \cdot K^n, \quad K \rightarrow \infty.$$

Сравнивая полученные две оценки, заключаем, что $M(N) > \dim V(N)$ для некоторого достаточно большого значения K . Таким образом, основная теорема 4 доказана при условии справедливости теорем 5 и 6. Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству этих двух вспомогательных теорем.

4. Доказательство теоремы 5. Рассмотрим целочисленные функции $d_{im}(z)$ и $p_m(z)$ из (2.6). Каждая из этих функций задает отображение из D в множество целых чисел $\mathbb{Z}$, поэтому вся совокупность этих функций может трактоваться как отображение

$$\nu: D \rightarrow \mathbb{Z}^r, \quad (4.1)$$

где $r = n(n+1)$. Здесь в (4.1) множество $S = \mathbb{Z}^r$ является счетным. Поэтому мы можем применить следующую теорему.

ТЕОРЕМА 7. Для произвольного отображения $\nu: D \rightarrow S$ из области D в счетное множество S можно найти по крайней мере одно значение $s \in S$ такое, что полный прообраз $\nu^{-1}(s) = \{z \in D : \nu(z) = s\}$ есть множество, плотное в некоторой подобласти $\tilde{D} \subset D$.

Мы не будем доказывать эту топологическую теорему 7, поскольку она является непосредственным следствием теоремы Бэра о категории (см. [16, гл. 3, § 5, теорема 8] и [17, гл. 2, § 3]). Аналогичные теоремы использовались в [2] и в [14], [15].

Фиксируем значение $s \in S$, полный прообраз которого $\nu^{-1}(s)$ плотен в подобласти $\tilde{D}$. Обозначим $F = \nu^{-1}(s) \cap \tilde{D}$. Фиксация s означает, что степени полиномов (2.6) принимают одни и те же значения во всех точках множества F , плотного в $\tilde{D}$. Пользуясь регулярностью m -го семейства кривых (см. определение 1), выберем криволинейные координаты $t, c_1^{(m)}, \dots, c_{n-1}^{(m)}$ в области $\tilde{D}$. Тогда условия $d_{im} = \deg R_i^{(m)}(t)$ и $p_m(z) = \deg f_m(t)$ можно записать так:

$$\frac{\partial^k R_i^{(m)}}{\partial t^k} \neq 0 \quad \text{при } k = d_{im}, \quad \frac{\partial^k f_m}{\partial t^k} \neq 0 \quad \text{при } k = p_m, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial^k R_i^{(m)}}{\partial t^k} = 0 \quad \text{при } k > d_{im}, \quad \frac{\partial^k f_m}{\partial t^k} = 0 \quad \text{при } k > p_m. \quad (4.3)$$

Эти условия выполнены во всех точках множества F . Из зануления старших производных (4.3) в точках плотного множества F вытекает их зануление во всех точках области $\tilde{D}$. Поэтому $\deg R_i^{(m)}(t) \leq d_{im}$ и $\deg f_m(t) \leq p_m$ в $\tilde{D}$.

Рассмотрим некоторую одну точку $z_0 \in F$. В ней выполнены условия (4.2). В силу голоморфности $R_i^{(m)}$ и f_m по переменным $t, c_1^{(m)}, \dots, c_{n-1}^{(m)}$ вытекает голоморфность (а значит, и непрерывность) производных в (4.2). Отсюда выполнение условий (4.2) в точке z_0 влечет их выполнение в некоторой окрестности $O_m(z_0) \subset \tilde{D}$. Обозначим через $U(z_0)$ пересечение окрестностей: $U(z_0) = \bigcap_{m=1}^n O_m(z_0)$. Окрестность $U(z_0)$ любой из точек z_0 плотного множества F может быть выбрана в качестве подобласти в D , в которой степени всех полиномов $R_i^{(m)}(t)$ и $f_m(t)$ постоянны. Теорема 5 доказана.

5. Доказательство теоремы 6. Теорема 6 содержит оценку для размерности линейного пространства $V(N)$ голоморфных решений системы уравнений (3.4). Выберем некоторую точку $z_0 \in D$. Без ограничения общности можем считать $z_0 = 0$. В силу линейной независимости векторов $X_1, \dots, X_n$ в каждой точке D (см. определение 2) мы можем выбрать координаты $z_1, \dots, z_n$ в окрестности точки $z_0 = 0$ так, что в самой точке $z = 0$ векторы $X_1, \dots, X_n$ будут направлены вдоль осей координат. Этого можно добиться за счет линейной замены переменных или, другими словами, заменой базиса в $\mathbb{C}^n$. Тогда

$$X_m = \frac{\partial}{\partial z_m} + \sum_{k=1}^n x_{mk}(z) \frac{\partial}{\partial z_k}, \quad (5.1)$$

причем голоморфные по z коэффициенты $x_{mk}(z)$ обращаются в нуль при $z = 0$. Пусть $\varphi(z) \in V(N)$. Разложим функцию $\varphi(z) \in V(N)$ и коэффициенты $x_{mk}(z)$ в кратные ряды Тейлора с центром в точке $z = 0$:

$$\varphi(z) = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} z^{\alpha}, \quad x_{mk}(z) = \sum_{\beta \neq 0} x_{mk\beta} z^{\beta}, \quad (5.2)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ – мультииндексы. После этого подставим разложения (5.2) в уравнения (3.4). Такая подстановка приводит к бесконечной серии линейных однородных алгебраических соотношений на коэффициенты разложения функции $\varphi(z)$.

ЛЕММА 1. Если $\varphi \in V(N)$ и $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \geq nN$, то в силу одного из уравнений (3.4) для коэффициента φ_α имеет место соотношение

$$\varphi_\alpha = \sum_{|\gamma| < |\alpha|} C_{\alpha\gamma} \varphi_\gamma, \quad (5.3)$$

где $C_{\alpha\gamma}$ – некоторые константы, определяемые коэффициентами в тейлоровских разложениях функций $x_{mk}(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \geq nN$, то по крайней мере одна из компонент мультииндекса α больше или равна N . Пусть для определенности $\alpha_m \geq N$. Тогда рассмотрим m -е уравнение (3.4). Из (5.1) и (5.2) имеем

$$X_m = \frac{\partial}{\partial z_m} + \sum_{k=1}^n \sum_{\beta \neq 0} x_{mk\beta} z^\beta \frac{\partial}{\partial z_k}. \quad (5.4)$$

Применим оператор X_m к отдельному моному вида z^γ , где γ – мультииндекс. Главный член в разложении (5.4) – это оператор дифференцирования по z_m . Его применение к моному z^γ понижает на единицу показатель степени γ_m

$$\gamma \mapsto \tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m - 1, \dots, \gamma_n), \quad (5.5)$$

если $\gamma_m \neq 0$. Если $\gamma_m = 0$, то моном зануляется. Остальные слагаемые в (5.4) действуют на моном z^γ сходным образом

$$x_{mk\beta} z^\beta \frac{\partial z^\gamma}{\partial z_k} = \gamma_k x_{mk\beta} z^{\tilde{\gamma}}. \quad (5.6)$$

Если $\gamma_k = 0$, то правая часть (5.6) равна нулю. В противном случае в правой части получается моном со следующими показателями степеней:

$$\gamma \mapsto \tilde{\gamma} = (\gamma_1 + \beta_1, \dots, \gamma_k - 1 + \beta_k, \dots, \gamma_n + \beta_n). \quad (5.7)$$

Обозначим через $\delta(i) = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ мультииндекс с единственной ненулевой компонентой $\delta_i = 1$ в i -й позиции. Тогда правило (5.5) можно записать как $\tilde{\gamma} = \gamma - \delta(m)$, а второе правило (5.7) запишется как $\tilde{\gamma} = \gamma - \delta(k) + \beta$. При вычислении действия N -й степени оператора X_m на моном z^γ мы должны комбинировать правила (5.5) и (5.7). Поэтому

$$(X_m)^N \varphi = \sum_{\alpha_m \geq N} C_\alpha \varphi_\alpha z^{\alpha - N\delta(m)} + \sum_{M < N} \sum_{\gamma, \epsilon} C_{\gamma\epsilon}(M) \varphi_\gamma z^{\gamma - M\delta(m) + \epsilon}. \quad (5.8)$$

Здесь $C_\alpha = \alpha_m(\alpha_m - 1) \cdots (\alpha_m - N + 1) \neq 0$, а константы $C_{\gamma\epsilon}(M)$ определяются коэффициентами $x_{mk\beta}$ в разложении (5.4). Первая сумма в (5.8) определяется N -кратным

действием главного члена разложения (5.4). Вторая сумма содержит вклады от M -кратного действия главного члена и от $(N - M)$ -кратного действия остальных членов разложения (5.4) в различных комбинациях.

Величина мультииндекса ε в (5.8) определяется действием неглавных слагаемых разложения (5.4) в соответствии с (5.7). Заметим, что $|\tilde{\gamma}| > |\gamma|$ в (5.7), это вытекает из $\beta \neq 0$ в (5.2) и в (5.4). Отсюда для ε в (5.8) имеем

$$\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n \geq 0. \quad (5.9)$$

Приведем подобные слагаемые в формуле (5.8). Для этого мы должны сгруппировать мономы с одинаковыми степенями z . Приравняв показатели степеней z в двух суммах (5.8), получаем соотношение, связывающее α и γ :

$$\gamma = \alpha - (N - M)\delta(m) - \varepsilon. \quad (5.10)$$

После приведения подобных слагаемых само соотношение (5.8) запишется так:

$$(\mathbf{X}_m)^N \varphi = \sum_{\alpha_m \geq N} C_\alpha \left(\varphi_\alpha - \sum_{\gamma} C_{\alpha\gamma} \varphi_\gamma \right) z^{\alpha - N\delta(m)}, \quad (5.11)$$

а коэффициенты $C_{\alpha\gamma}$ во внутренней сумме по γ вычисляются по формуле

$$C_{\alpha\gamma} = -\frac{1}{C_\alpha} \sum_{M < N} \sum_{\varepsilon} C_{\gamma\varepsilon}(M)$$

с учетом соотношения (5.10), выражающего γ через α , M и ε . Теперь учтем m -е уравнение (3.4). Оно имеет вид $(\mathbf{X}_m)^N \varphi = 0$ и означает зануление коэффициентов при всех степенях z в разложении (5.11). Отсюда

$$\varphi_\alpha = \sum_{\gamma} C_{\alpha\gamma} \varphi_\gamma. \quad (5.12)$$

Учет условия $M < N$ в (5.8) и соотношений (5.9) и (5.10) дает $|\gamma| < |\alpha|$. Поэтому в сумме (5.12) фактически присутствуют лишь слагаемые с $|\gamma| < |\alpha|$. Значит, сумма (5.12) имеет вид (5.3). Лемма 1 доказана.

Используем лемму 1 для доказательства теоремы 6. Рассмотрим отображение ψ , которое каждой голоморфной функции $\varphi(z) \in V(N)$ сопоставляет начальный фрагмент ее тейлоровского разложения в точке $z = 0$:

$$\psi: \varphi \mapsto \sum_{|\alpha| < nN} \varphi_\alpha z^\alpha. \quad (5.13)$$

Ясно, что ψ — это $\mathbb{C}$ -линейное отображение из $V(N)$ в пространство $P(N)$ тейлоровских полиномов вида (5.13). Оно инъективно, ибо для функции $\varphi \in V(N)$ из зануления ее начального фрагмента (5.13) в силу соотношений (5.3) из леммы 1 вытекает зануление всех коэффициентов ее тейлоровского разложения. Инъективность линейного отображения $\psi: V(N) \rightarrow P(N)$ дает $\dim V(N) \leq \dim P(N)$. Размерность пространства $P(N)$ конечна и совпадает с числом слагаемых в полиномах (5.13). Отсюда возникает оценка

$$\dim V(N) \leq \dim P(N) \leq (nN)^n, \quad (5.14)$$

которая завершает доказательство теоремы 6. Оценка (5.14) для $\dim P(N)$ является очень грубой, но для наших целей ее вполне достаточно.

Авторы признательны профессорам Э. Бедфорду и С.И. Пинчуку за приглашение в Блумингтон и возможность выступить на семинаре по комплексному анализу. Авторы также признательны профессору Лей Фу (Indiana University), обнаружившему ошибку в первоначальном варианте доказательства теоремы 6. В данном тексте она устранена.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1960.
- [2] Bochner S., Martin W. T. Several Complex Variables. Princeton: Princeton Univ. Press, 1948.
- [3] Sukhov A. B. On CR mappings of real quadric manifolds // Michigan Math. J. 1994. V. 41. P. 143–150.
- [4] Sukhov A. B. On the mapping problem for quadric Cauchy–Riemann manifolds // Indiana Univ. Math. J. 1993. V. 42. P. 27–36.
- [5] Poincaré H. Les fonctions analytiques de deux variables et la representation conforme // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1907. V. 23. P. 185–220.
- [6] Tanaka N. On the pseudo-conformal geometry of hypersurfaces of the space of n complex variables // J. Math. Soc. Japan. 1962. V. 14. P. 397–429.
- [7] Pelles D. Proper holomorphic self-maps of the unit ball // Math. Ann. 1971. V. 190. P. 298–305.
- [8] Alexander H. Holomorphic mappings from the ball and polydisc // Math. Ann. 1974. V. 209. P. 249–256.
- [9] Туманов А., Хенкин Г. Локальная характеристика голоморфных автоморфизмов областей Зигеля // Функцион. анализ и прилож. 1983. Т. 17. С. 49–61.
- [10] Туманов А. Конечность группы CR автоморфизмов стандартных CR многообразий и собственные голоморфные отображения областей Зигеля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. С. 651–659.
- [11] Forstnerič F. Mappings of quadric Cauchy–Riemann manifolds // Math. Ann. 1992. V. 292. P. 163–180.
- [12] Webster S. On the mapping problem for algebraic real hypersurfaces // Invent. Math. 1977. V. 43. P. 53–68.
- [13] Сухов А. Б. Об алгебраичности комплексно-аналитических множеств // Матем. сб. 1993. Т. 74. С. 419–426.
- [14] Sharipov R. A., Sukhov A. B. On CR mappings between algebraic Cauchy–Riemann manifolds and separate algebraicity for holomorphic functions // Preprint №95-3. Centre de Mathématiques et d'Informatique, Univ. de Provence, Laboratoire d'Analyse, Topologie, Probabilités (Unité de Recherche Associé au CNRS 0225), 1995; e-print alg-geom@publications.math.duke.edu/9412015.
- [15] Sharipov R. A., Sukhov A. B. On CR mappings between algebraic Cauchy–Riemann manifolds and separate algebraicity for holomorphic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V. 348. № 2. P. 767–780.
- [16] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М.: Мир, 1977.
- [17] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Теория функций и функциональный анализ. М.: Наука, 1972.