Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. С. Черников, Группы с условиями π -максимальности и π -слоистой максимальности, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 2, 311–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm948>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 12:31:24

УДК 519.4

ГРУППЫ С УСЛОВИЯМИ π -МАКСИМАЛЬНОСТИ И π -СЛОЙНОЙ МАКСИМАЛЬНОСТИ

Н. С. Черников

По аналогии с условиями π -, π -слойной, примарной и слойной минимальности вводятся и исследуются подобные условия максимальности.

Библиография: 10 названий.

Одними из известных условий конечности в абстрактной теории групп являются условия π -минимальности и π -слойной минимальности (коротко, условия π -min и l_π -min), определяемые для произвольного множества π простых чисел, а также условия примарной и слойной минимальности (см., например, [1]–[6]).

По аналогии введем следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что группа G удовлетворяет *условию π -(p)-максимальности* (или, коротко, *условию π -max (p -max)*), если в ней не существует бесконечного возрастающего ряда

$$G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_i \subset G_{i+1} \subset \dots \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

подгрупп такого, что в каждой разности $G_{i+1} \setminus G_i$ содержится π -(p)-элемент.

Будем говорить, что группа G удовлетворяет *условию примарной максимальности*, если она удовлетворяет условию p -max для произвольного p .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что группа G удовлетворяет *условию π -(p)-слойной максимальности* (или, коротко, *условию l_π -max (l_p -max)*), если в ней при произвольном $n \in \mathbb{N}$ отсутствуют бесконечные ряды (1) подгрупп такие, что в каждой разности $G_{i+1} \setminus G_i$ содержится π -(p)-элемент порядка $\leq n$.

Будем говорить, что группа G удовлетворяет *условию слойной максимальности* или, коротко, *условию l -max*, если она удовлетворяет условию l_p -max для произвольного p .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $\pi = \emptyset$ произвольная группа G удовлетворяет условиям π -max и l_π -max, так как в этом случае 1 – единственный ее π -элемент.

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы 1–4.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00462.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{X}$ – минимальный локальный класс групп, содержащий все (почти) разрешимые группы и замкнутый относительно взятия возрастающих нормальных рядов; $G \in \mathfrak{X}$, $M \neq 0$ – некоторое инвариантное множество элементов конечных порядков группы G . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) подгруппа $\langle M \rangle$ является (почти) полициклической;
- 2) G удовлетворяет условию максимальнойности для подгрупп, порожденных подмножествами множества M ;
- 3) все подгруппы группы G , порожденные подмножествами множества M , конечнопорождены;
- 4) в произвольном непустом подмножестве $K \subseteq M$ найдется конечное подмножество L такое, что $\langle K \rangle = \langle L \rangle$;
- 5) в G не существует бесконечного возрастающего ряда подгрупп, между любыми двумя членами которого содержится элемент из M .

(В настоящее время нормальный ряд группы иногда называют субнормальным.)

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{X}$ и G – те же, что в теореме 1, π – некоторое множество простых чисел и H – подгруппа, порожденная всеми π -элементами группы G . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) H является (почти) полициклической;
- 2) G удовлетворяет условию максимальнойности для подгрупп, порожденных π -элементами;
- 3) все подгруппы группы G , порожденные π -элементами, конечнопорождены;
- 4) в произвольном множестве $K \neq \emptyset$ π -элементов группы G найдется конечное подмножество L такое, что $\langle K \rangle = \langle L \rangle$;
- 5) G удовлетворяет условию π -тах.

Из теоремы 2 непосредственно вытекает следующее

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathfrak{X}$ и G – те же, что в теореме 1, и H – подгруппа, порожденная в G всеми ее элементами конечных порядков. Группа G удовлетворяет условию примарной максимальнойности тогда и только тогда, когда H (почти) полициклическая.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathfrak{X}$, G , π и H – те же, что в теоремах 1 и 2, причем $\pi \neq \emptyset$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) G удовлетворяет условию l_π -тах;
- 2) для любого $r \in \pi$ подгруппа K , порожденная всеми r -элементами группы G , разложима в произведение $K = AB$ некоторых полной абелевой черниковской r -подгруппы $A \subseteq Z(H)$ и (почти) полициклической подгруппы B ;
- 3) для любого конечного подмножества $\sigma \subseteq \pi$ подгруппа K , порожденная всеми σ -элементами группы G , разложима в произведение $K = AB$ некоторых полной абелевой черниковской σ -подгруппы $A \subseteq Z(H)$ и (почти) полициклической подгруппы B .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathfrak{X}$, G, π и H – те же, что в теоремах 1 и 2, причем π конечно. Группа G удовлетворяет условию l_π -тах тогда и только тогда, когда $H = AB$ для некоторых полной абелевой черниковской π -подгруппы $A \subseteq Z(H)$ и (почти) полициклической подгруппы B .

Из теоремы 4 непосредственно вытекает следующее

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\mathfrak{X}$ и G – те же, что в теореме 1, H – подгруппа, порожденная в G всеми элементами конечных порядков. Группа G удовлетворяет условию слойной максимальности тогда и только тогда, когда для любого простого p подгруппа H_p , порожденная всеми ее p -элементами, разлагается в произведение $H_p = A_p B_p$ некоторых полной абелевой черниковской p -подгруппы $A_p \subseteq Z(H)$ и (почти) полициклической подгруппы B .

Отметим, что класс $\mathfrak{X}$ групп, фигурирующий в теоремах 1–4 и следствиях 1, 2, весьма широк. Он включает в себя, например, следующие классы групп: класс локально разрешимых, классы RI^* -, RN^* -радикальных (в смысле Плоткина), класс локально радикальных групп. В случае, когда в качестве исходного берется класс всех почти разрешимых групп, $\mathfrak{X}$ включает в себя также классы локально конечных и локально почти разрешимых групп, а также класс W_0 -групп.

Доказательствам теорем 1–4 предпоялем следующие леммы 1–5 и предложения 1, 2.

ЛЕММА 1. Для произвольной группы G и ее множества π -элементов $M \neq \emptyset$ следующие утверждения равносильны:

1) в G не существует ряда (1) подгрупп такого, что

$$(G_{i+1} \setminus G_i) \cap M \neq \emptyset, \quad i = 1, 2, \dots; \quad (2)$$

2) в G не существует ряда (1) счетных подгрупп такого, что выполняется (2);

3) в $\langle M \rangle$ не существует ряда (1) подгрупп такого, что выполняется (2);

4) G удовлетворяет условию максимальности для подгрупп, порожденных подмножествами множества M ;

5) G удовлетворяет условию максимальности для подгрупп, порожденных конечными подмножествами множества M ;

6) для произвольного непустого подмножества $K \subseteq M$ подгруппа $\langle K \rangle$ конечнопорождена;

7) для произвольного непустого не более чем счетного подмножества $K \subseteq M$ подгруппа $\langle K \rangle$ конечнопорождена;

8) в произвольном непустом подмножестве $K \subseteq M$ найдется конечное подмножество L такое, что $\langle L \rangle = \langle K \rangle$;

9) в произвольном непустом не более чем счетном подмножестве $K \subseteq M$ найдется конечное подмножество L такое, что $\langle L \rangle = \langle K \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Понятно, что $1) \implies 2), 1) \iff 3)$ и $4) \implies 5), 6) \implies 7), 8) \implies 9)$.

Пусть в G существует ряд (1) такой, что выполняется (2) и $g_i \in (G_{i+1} \setminus G_i) \cap M$, $H_i = \langle g_1, \dots, g_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots$. Тогда

$$H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_i \subset H_{i+1} \subset \dots$$

– бесконечный возрастающий ряд счетных подгрупп такой, что при каждом i множество $(H_{i+1} \setminus H_i) \cap M \neq \emptyset$. Таким образом, $2) \implies 1)$ и, значит, $1) \iff 2)$. Далее, положим $K = \{g_i \mid i = 1, 2, \dots\}$. Тогда для каждого конечного $L \subseteq K$ при некотором $j \in \mathbb{N}$ $G_j \supset L$ и, значит, $\langle L \rangle \neq \langle K \rangle$. Следовательно, утверждение 9) несправедливо. Таким образом, $9) \implies 1)$.

Пусть утверждение 4) несправедливо. Тогда существует ряд (1) подгрупп, порожденных подмножествами из M . Так как $G_i \subsetneq G_{i+1} = \langle G_{i+1} \cap M \rangle$, то $G_{i+1} \cap M \not\subseteq G_i$ и, значит, $(G_{i+1} \setminus G_i) \cap M \neq \emptyset, i = 1, 2, \dots$. Поэтому утверждение 1) несправедливо. Следовательно, $1) \implies 4)$.

Пусть утверждение 6) несправедливо. Возьмем произвольный элемент $g_1 \in K$ и положим $G_1 = \langle g_1 \rangle$. Далее по индукции: если для некоторого $i \in \mathbb{N}$ выделены элементы $g_1, \dots, g_i \in K$ и подгруппа $G_i = \langle g_1, \dots, g_i \rangle$, то возьмем $g_{i+1} \in K \setminus G_i$ и положим $G_{i+1} = \langle G_i, g_{i+1} \rangle$. Тогда $G_i \subsetneq G_{i+1}, i = 1, 2, \dots$, и, значит, утверждение 5) несправедливо. Следовательно, $5) \implies 6)$.

Пусть утверждение 8) несправедливо и $G_i = \langle g_1, \dots, g_i \rangle$ – те же, что выше. Тогда для каждого конечного множества $L \subseteq \{g_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ при некотором $j \in \mathbb{N}$ $G_j \supseteq L$ и, значит, $\langle L \rangle \neq \langle g_i \mid i = 1, 2, \dots \rangle$. Следовательно, подгруппа $\langle g_i \mid i = 1, 2, \dots \rangle$ не имеет конечной системы образующих и, значит, утверждение 7) несправедливо. Следовательно, $7) \implies 8)$.

Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для произвольных группы G и множества π простых чисел следующие утверждения равносильны:

- 1) G удовлетворяет условию π -тах (соответственно l_π -тах);
- 2) все не более чем счетные подгруппы группы G удовлетворяют условию π -тах (соответственно l_π -тах);
- 3) подгруппа группы G , порожденная всеми ее π -элементами, удовлетворяет условию π -тах (соответственно l_π -тах);
- 4) G удовлетворяет условию максимальности для подгрупп, порожденных π -элементами (соответственно при любом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ – π -элементами порядка $\leq n$);
- 5) G удовлетворяет условию максимальности для подгрупп, порожденных конечными множествами π -элементов (соответственно при любом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ – π -элементов порядка $\leq n$);
- 6) для произвольного непустого множества K π -элементов группы G подгруппа $\langle K \rangle$ конечнопорождена (соответственно при любом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ для произвольного непустого множества K π -элементов порядка $\leq n$ подгруппа $\langle K \rangle$ конечнопорождена);
- 7) для произвольного непустого не более чем счетного множества K π -элементов группы G подгруппа $\langle K \rangle$ конечнопорождена (соответственно при любом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ для произвольного непустого не более чем счетного множества K π -элементов порядка $\leq n$ подгруппа $\langle K \rangle$ конечнопорождена);
- 8) в произвольном непустом множестве K π -элементов группы G найдется конечное подмножество L такое, что $\langle L \rangle = \langle K \rangle$ (соответственно – найдется при любом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ в произвольном непустом мно-

жестве K π -элементов порядка $\leq n$);

- 9) в произвольном непустом не более чем счетном множестве K π -элементов группы G найдется конечное подмножество L такое, что $\langle L \rangle = \langle K \rangle$ (соответственно найдется при любом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ в произвольном непустом не более чем счетном множестве K π -элементов порядка $\leq n$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяем лемму 1, взяв в ней в качестве M множество всех π -элементов группы G (соответственно всех ее π -элементов порядка $\leq n$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть π – конечное (соответственно непустое) множество простых чисел. Группа G удовлетворяет условию π -тах (соответственно l_π -тах) тогда и только тогда, когда при каждом $p \in \pi$ она удовлетворяет условию p -тах (соответственно l_p -тах).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть группа G не удовлетворяет условию π -тах (l_π -тах) и для каждого $i \in \mathbb{N}$ у ряда (1) в разности $G_{i+1} \setminus G_i$ есть π -элемент g_i (соответственно при некотором фиксированном $n \in \mathbb{N}$ – π -элемент g_i порядка $\leq n$). Положим $\sigma = \pi$ (соответственно $\sigma = \bigcup_{i=1}^{\infty} \pi(\langle g_i \rangle)$). Так как σ конечно, то, очевидно, найдутся $p \in \sigma$ и последовательность $i_1 < i_2 < \dots < i_k < i_{k+1} < \dots$ натуральных чисел такие, что в каждой разности $\langle g_{i_k} \rangle \setminus G_{i_k}$ есть p -элемент. Тогда у ряда $G_{i_1} \subset G_{i_2} \subset \dots \subset G_{i_k} \subset G_{i_{k+1}} \subset \dots$ в каждой разности $G_{i_{k+1}} \setminus G_{i_k}$ есть p -элемент. Следовательно, G не удовлетворяет условию p -тах (соответственно l_p -тах).

ЛЕММА 2. Произвольный локальный класс $\mathfrak{X}$ групп, замкнутый относительно расширений, замкнут относительно взятия возрастающих нормальных рядов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть некоторая группа $G \notin \mathfrak{X}$ имеет возрастающий нормальный ряд $\mathcal{M}$ с $\mathfrak{X}$ -факторами, H – минимальный член $\mathcal{M}$, не принадлежащий к $\mathfrak{X}$, и K – объединение всех $F \in \mathcal{M}$, $F \subsetneq H$. Поскольку класс $\mathfrak{X}$ локален и $F \in \mathfrak{X}$, то $K \in \mathfrak{X}$. Так как, очевидно, в ряде $\mathcal{M}$ члену H предшествует K , то $K \triangleleft H$ и $H/K \in \mathfrak{X}$. Но тогда $H \in \mathfrak{X}$. Противоречие.

Из леммы 2 непосредственно вытекает следующая

ЛЕММА 3. Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольный класс групп, $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{Z}$ – минимальные локальные классы групп, содержащие $\mathfrak{X}$ и замкнутые относительно взятия расширений и возрастающих нормальных рядов соответственно. Тогда $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}$.

Напомним, что класс $\mathfrak{X}$ групп называется *радикальным* (в смысле Плоткина), если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и нормальных подгрупп и каждая группа, порождаемая своими нормальными $\mathfrak{X}$ -подгруппами, сама принадлежит $\mathfrak{X}$.

ЛЕММА 4. Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольный класс групп, $\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{X}$ и для порядковых $\alpha > 0$ индуктивно полагаем: если α непредельное, то $\mathfrak{X}_\alpha$ – класс всех групп, у которых есть локальная система подгрупп, обладающих конечным нормальным рядом с $\mathfrak{X}_{\alpha-1}$ -факторами; если α предельное, то $\mathfrak{X}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{X}_\beta$. Пусть также $\mathfrak{G}$ – минимальный локальный класс групп, содержащий $\mathfrak{X}$ и замкнутый относительно взятия возрастающих нормальных рядов. Тогда:

- 1) $\mathfrak{G}$ совпадает с объединением классов $\mathfrak{X}_\alpha$;

- 2) если $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия (инвариантных) подгрупп, то все $\mathfrak{X}_\alpha$ и $\mathfrak{G}$ замкнуты относительно взятия (инвариантных) подгрупп;
- 3) если $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов, то все $\mathfrak{X}_\alpha$ и $\mathfrak{G}$ замкнуты относительно взятия гомоморфных образов;
- 4) если в классе $\mathfrak{X}$ все периодические группы локально конечны, то и в классе $\mathfrak{G}$ все периодические группы локально конечны;
- 5) классы $\mathfrak{X}_{\alpha+1}$ и $\mathfrak{G}$ замкнуты относительно взятия прямых произведений;
- 6) если $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия инвариантных подгрупп и гомоморфных образов, то класс $\mathfrak{G}$ радикален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) справедливо ввиду леммы 3.

Пусть для некоторого $\alpha \neq 0$ при каждом $\beta < \alpha$ для $\mathfrak{X}_\beta$ выполняется условие одного из утверждений 2)–4). Возьмем произвольную группу $G \in \mathfrak{X}_\alpha$. Очевидно, или при некотором $\beta < \alpha$ группа $G \in \mathfrak{X}_\beta$, или у G есть локальная система подгрупп, обладающих конечным нормальным рядом с $\mathfrak{X}_{\alpha-1}$ -факторами. Пусть H и φ – произвольные (инвариантная) подгруппа и гомоморфизм группы G . Тогда в случае утверждения 2) (соответственно 3)) или $H \in \mathfrak{X}_\beta$ ($G^\varphi \in \mathfrak{X}_\beta$), или H (G^φ) имеет такую же, как у G , локальную систему. Следовательно, $H \in \mathfrak{X}_\alpha$ ($G^\varphi \in \mathfrak{X}_\alpha$).

Далее, G локально конечна ввиду леммы Шмидта, если она периодическая.

Пусть G – группа, при некотором α разложимая в прямое произведение подгрупп из $\mathfrak{X}_{\alpha+1}$; $H_1, \dots, H_n$ – произвольные подгруппы-множители прямого разложения G и H – их произведение. Очевидно, все такие H образуют локальную систему группы G .

Каждая H_i имеет некоторую локальную систему $\mathcal{M}_i$ подгрупп, обладающих конечным нормальным рядом с $\mathfrak{X}_\alpha$ -факторами. Очевидно, всевозможные произведения подгрупп группы H , взятых по одной из каждой $\mathcal{M}_i$, образуют локальную систему подгрупп группы H , обладающих таким рядом. Следовательно, $G \in \mathfrak{X}_{\alpha+1}$.

Таким образом, утверждение 5) справедливо для классов $\mathfrak{X}_{\alpha+1}$. Поэтому с учетом утверждения 1) оно справедливо и для класса $\mathfrak{G}$.

Пусть выполняется условие утверждения 6). Тогда ввиду утверждений 2) и 3) класс $\mathfrak{G}$ замкнут относительно инвариантных подгрупп и гомоморфных образов. Далее, произвольная группа G , порождаемая своими инвариантными $\mathfrak{G}$ -подгруппами, очевидно, обладает возрастающим инвариантным рядом, каждый фактор которого является гомоморфным образом $\mathfrak{G}$ -группы. Следовательно, $G \in \mathfrak{G}$. Утверждение 6) доказано.

Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $\mathfrak{X}$ – класс всех разрешимых групп или класс всех почти разрешимых групп, $\mathfrak{X}_\alpha$ и $\mathfrak{G}$ – такие же, как в лемме 4. Тогда:

- 1) справедливы утверждения 1) и 5) леммы 4 и заключения остальных утверждений этой леммы;
- 2) в случае, когда $\mathfrak{X}$ – класс всех разрешимых групп, класс $\mathfrak{G}$ содержится в классе $\overline{RN}$ -групп и произвольная периодическая $\mathfrak{G}$ -группа локально разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия подгрупп и гомоморфных образов, то утверждение 1) настоящей леммы справедливо ввиду леммы 4.

Докажем утверждение 2). Пусть $\mathfrak{G}$ не принадлежит классу $\overline{RN}$ -групп, γ – наименьшее из всех α , при которых $\mathfrak{X}_\alpha$ не принадлежит этому классу, и $G \in \mathfrak{X}_\gamma$ – не $\overline{RN}$ -группа.

Тогда некоторая секция H группы G не является RN -группой. Ввиду утверждения 1) настоящей леммы $H \in \mathfrak{X}_\gamma$. Так как, очевидно, γ неперелое, то H обладает локальной системой подгрупп, каждая из которых имеет конечный нормальный ряд с $\mathfrak{X}_{\gamma-1}$ -факторами и, вместе с тем, является RN -группой. Но тогда ввиду локальной теоремы Мальцева и H является $\overline{RN}$ -группой. Противоречие.

Так как F является $\overline{RN}$ -группой и локально конечна ввиду утверждения 1) настоящей леммы, то она локально разрешима.

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\mathfrak{X}_0$ – класс всех (почти) абелевых групп и $\mathfrak{X}_\alpha$, $\alpha > 0$, такие же, как в лемме 4. Ввиду утверждения 1) леммы 4 класс $\mathfrak{X}$ совпадает с объединением всех $\mathfrak{X}_\alpha$. Пусть теорема неверна и γ – минимальное среди всех α , для которых она не верна в классе $\mathfrak{X}_\alpha$. Очевидно, γ – неперелое.

Ввиду леммы 1 утверждения 2)–5) настоящей теоремы равносильны и можно считать, что $G = \langle M \rangle$. Если справедливо утверждение 1), то G удовлетворяет условию максимальности для подгрупп; значит, справедливо утверждение 5) и, вместе с тем, утверждение 2)–4).

Пусть $G \in \mathfrak{X}_\gamma$ и справедливо утверждение 4), но не справедливо утверждение 1). Тогда для некоторых $g_1, \dots, g_k \in M$ группа $G = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$. Так как γ – неперелое, группа G конечнопорождена и, очевидно, $\gamma \neq 0$, то G имеет некоторый конечный нормальный ряд $G_0 = 1 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n = G$ с $\mathfrak{X}_{\gamma-1}$ -факторами и, значит, $G \in \mathfrak{X}_{\gamma-1}^n$. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что n – минимальное среди всех тех $m \in \mathbb{N}$, для которых настоящая теорема не верна в классе $\mathfrak{X}_{\gamma-1}^m$. Так как $G/G_{n-1} \in \mathfrak{X}_{\gamma-1}$ и, очевидно, для инвариантного множества $M^* = \{gG_{n-1} \mid g \in M\}$ элементов факторгруппы G/G_{n-1} справедливо утверждение 4), то последняя является (почти) полициклической.

Пусть $F_i = G_{n-1}\langle g_i \rangle$, $R_i = \langle g_i^{F_i} \rangle$, $T_i = R_i \cap G_{n-1}$ и $U_i = \bigcap_{g \in \langle g_i \rangle} G_{n-2}^g$, $i = 1, \dots, k$; $T = T_1 \dots T_k$. Так как $U_i \subseteq G_{n-2}$, то ввиду утверждения 1) леммы 5 подгруппа U_i имеет нормальный ряд длины $\leq n-2$ с $\mathfrak{X}_{\gamma-1}$ -факторами. Так как $G = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$ и, очевидно, $g_i \in CG(G_{n-1}/T)$, $i = 1, \dots, k$, то $T \trianglelefteq G$ и $G_{n-1}/T \subseteq Z(G/T)$. Тогда, поскольку G/T конечнопорождена и $(G/T)/(G_{n-1}/T)$ почти полициклическая, то ввиду леммы 1.43 из [7] (принадлежащей Ф. Холлу) и следствия из него [7] факторгруппа G_{n-1}/T конечнопорождена. Следовательно, факторгруппа G/T (почти) полициклическая.

Так как $|g_i| < \infty$, то ввиду теоремы Ремака факторгруппа G_{n-1}/U_i – подпрямое произведение конечного числа групп, изоморфных факторгруппе $G_{n-1}/G_{n-2} \in \mathfrak{X}_{\gamma-1}$. Поэтому ввиду леммы 5 с учетом конечности индекса $|F_i/U_i : G_{n-1}/U_i|$ выполнено условие $F_i/U_i \in \mathfrak{X}_{\gamma-1}$. Тогда F_i имеет нормальный ряд длины $\leq n-1$ с $\mathfrak{X}_{\gamma-1}$ -факторами, т. е. $F_i \in \mathfrak{X}_{\gamma-1}^{n-1}$. Следовательно, подгруппа R_i (и, вместе с этим, подгруппа T_i) (почти) полициклическая. Но тогда и T (почти) полициклическая. Противоречие. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Применим теорему 1, взяв в ней в качестве M множество всех π -элементов группы G .

Ниже, как обычно, для произвольной группы G через $J(G)$ обозначим пересечение всех ее подгрупп конечного индекса и для любого $M \subseteq G$, $M \neq \emptyset$, полагаем $\pi(M) = \bigcup_{g \in M} \pi(\langle g \rangle)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть справедливо утверждение 1). Покажем, что справедливо утверждение 2). Пусть для каждого $i \in \mathbb{N}$ H_i – подгруппа, порожденная всеми π -элементами порядка $\leq i$ группы G ; P – фиксированная силовская p -подгруппа группы G ; T – система взятых по одному представителей всех смежных классов P по $J(P)$, $t = |T|$ и $M = \{g \mid g \in P \text{ и } g^p = 1\}$. Тогда $H_i \subseteq H_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$, и $H = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i$.

Ввиду леммы 5 подгруппа P локально конечна. Следовательно, поскольку справедливо утверждение 5) теоремы 1, то в силу этой теоремы $\langle M \rangle$ конечна. Поэтому в силу теоремы 3.2 из [8] подгруппа P – черниковская и, значит, множество T конечно и подгруппа $A = J(P)$ – полная. Далее, ввиду теоремы 1 H_i (почти) полициклическая. Следовательно, в силу теоремы Гирша и леммы Неймана пересечение всех ее характеристических подгрупп L конечного индекса равно единице. Так как, очевидно, $A \subseteq C_H(H_i/L)$, то $J(P) \subseteq C_H(H_i)$. Следовательно, $A \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_H(H_i) = Z(H)$.

Возьмем $r \in \mathbb{N}$, для которого $T \subseteq H_r$. Согласно теореме Мерзлякова голоморф почти полициклической группы при подходящем $n \in \mathbb{N}$ вкладывается в $GL_n(\mathbb{Z})$ (см. [9], теорема 21.3.2 и ее доказательство). Вследствие этого при некотором n факторгруппа $H/C_H(H_r)$ вкладывается в $GL_n(\mathbb{Z})$. Ввиду теоремы 9.33 из [10] порядки всех p -элементов последней ограничены некоторым p -числом l . Следовательно, числом l ограничены порядки всех p -элементов группы $H/C_H(H_r)$, а поэтому и группы $H/AC_H(H_r)$ (изоморфной факторгруппе группы $H/C_H(H_r)$ по ее нормальной p -подгруппе $AC_H(H_r)/C_H(H_r)$).

Далее, так как $AC_H(H_r) \subseteq C_G(P)$, то для произвольного p -элемента $g \in AC_H(H_r)$ группа $P\langle g \rangle$ есть p -группа. Следовательно, $g \in P$. Поэтому, очевидно, $S = P \cap AC_H(H_r)$ – естественная силовская p -подгруппа группы $AC_H(H_r)$. Тогда S/A – единственная силовская p -подгруппа группы $AC_H(H_r)/A$. При этом $|S/A| \leq t$. Следовательно, порядки всех p -элементов факторгруппы H/A ограничены p -числом $m = lt$. Поэтому для любого p -элемента $g \in H$ выполнено условие $g^m \in A$. Так как подгруппа $\langle g \rangle A$ абелева и подгруппа A полная, то для некоторого элемента h выполнено соотношение $\langle g \rangle A = \langle h \rangle \times A$. Тогда $|h| \leq m$. Следовательно, для $B = \langle b \mid b \in G, b^m = 1 \rangle$ элемент $g \in AB$. Поэтому $K = AB$. Так как $B \subseteq H_m$, то B (почти) полициклическая.

Пусть справедливо утверждение 2). Покажем, что справедливо утверждение 3). Пусть для каждого $p \in \sigma$ $K_p = A_p B_p$ – подгруппа, порожденная всеми p -элементами группы G , A_p – полная абелева черниковская p -подгруппа из $Z(H)$ и для некоторого p -числа m_p подгруппа $B_p = \langle b \mid b \in G \text{ и } b^{m_p} = 1 \rangle$ – (почти) полициклическая; $A = \langle A_p \mid p \in \sigma \rangle$, m – произведение чисел m_p по всем $p \in \sigma$ и $B = \langle b \mid b^m = 1 \rangle$. Тогда, очевидно, A и B требуемые.

Пусть справедливо утверждение 3); $n \in \mathbb{N}$, M – множество всех π -элементов порядка $\leq n$ группы G и σ – любое конечное подмножество множества π , содержащее $\pi(M)$. Возьмем произвольный элемент $g \in M$. Тогда для некоторых элементов $g_A \in A$ и $g_B \in B$ выполнено равенство $g = g_A g_B$. Очевидно, $g_A^{[g]} \in A \cap B$ и g_A – σ -элемент. Так как подгруппа B почти полициклическая, то все ее периодические подгруппы конечны. Следовательно, пересечение $A \cap B$ конечно и $|g_A| \leq |g| |A \cap B|$. Пусть $L = \langle g_A \mid g \in M \rangle$ и $N = \langle g_B \mid g \in M \rangle$. Тогда L конечна и N (почти) полициклическая. Тогда подгруппа LN и, вместе с этим, подгруппа $\langle M \rangle$ почти полициклические. Следовательно, ввиду предложения 1 группа G удовлетворяет условию l_π -max.

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Применяем теорему 3, положив в ней $\sigma = \pi$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко видеть, что подгруппа A в утверждении 3) теоремы 3 и в теореме 4 содержит все квазиполные и, в частности, полные σ - (π -) подгруппы группы G и, значит, является ее характеристической подгруппой. Из доказательства теоремы 3 следует, что пересечение $A \cap B$ конечно, и что для некоторого σ - (π -) числа t в качестве B можно взять подгруппу $\langle b \mid b^t = 1 \rangle$. (Последняя характеристична в G .)

В доказательстве теоремы 3 установлено следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\mathfrak{X}$ – тот же класс, что в теореме 1, π – некоторое множество простых чисел, G – $\mathfrak{X}$ -группа с условием l_π -max и H – подгруппа, порожденная всеми π -элементами G . Тогда H обладает локальной системой характеристических (почти) полициклических подгрупп.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Очевидно, теоремы 2–4, предложение 3 и теорема 1 останутся в силе, если в них требование: “ $G \in \mathfrak{X}$ ” ослабить до требований: “ $H \in \mathfrak{X}$ ” и “ $\langle M \rangle \in \mathfrak{X}$ ” соответственно.

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству леммы 1.

ЛЕММА 6. Для произвольной группы G и ее множества $M \neq \emptyset$ элементов следующие утверждения равносильны:

- 1) в G не существует бесконечного убывающего ряда

$$G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_i \supset G_{i+1} \supset \dots \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

подгрупп такого, что

$$(G_i \setminus G_{i+1}) \cap M = \emptyset; \quad (4)$$

- 2) в G не существует ряда (3) счетных подгрупп такого, что выполняется (4);
- 3) в $\langle M \rangle$ не существует ряда (3) подгрупп такого, что выполняется (4);
- 4) G удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, порожденных подмножествами множества M ;
- 5) G удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, порожденных не более чем счетными подмножествами множества M .

Следующее предложение может быть полезно при исследовании групп, удовлетворяющих условиям π - и π -слойной минимальности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для произвольных группы G и множества π простых чисел следующие утверждения равносильны:

- 1) G удовлетворяет условию π -min (соответственно l_π -min);
- 2) все не более чем счетные подгруппы группы G удовлетворяют условию π -min (соответственно l_π -min);
- 3) подгруппа группы G , порожденная всеми ее π -элементами, удовлетворяет условию π -min (соответственно l_π -min);

- 4) G удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, порожденных π -элементами (соответственно при любом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ – π -элементами порядка $\leq n$);
- 5) G удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, порожденных не более чем счетными множествами π -элементов (соответственно при любом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ – не более чем счетными множествами π -элементов порядка $\leq n$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяем лемму 6, взяв в ней в качестве M множество всех π -элементов группы G (соответственно всех ее π -элементов порядка $\leq n$).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Половицкий Я. Д. О группах с условием π -минимальности для подгрупп // Сиб. матем. ж. 1962. Т. 3. № 4. С. 582–590.
- [2] Половицкий Я. Д. Слобно экстремальные группы // Матем. сб. 1962. Т. 56(98). С. 95–106.
- [3] Павлюк И. И., Шафиро А. А., Шунков В. П. О локально конечных группах с условием примарной минимальности // Алгебра и логика. 1974. Т. 13. № 3. С. 325–336.
- [4] Половицкий Я. Д. Группы с условием слойной минимальности // Укр. матем. ж. 1992. Т. 44. № 6. С. 847–850.
- [5] Chernikov N. S. Locally finite groups with π -minimal condition // Материалы международной конференции, посвященной памяти акад. С. А. Чунихина. Ч. I. Гомель: Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины, 1995. С. 137–138.
- [6] Черников Н. С. Группы с условием π -минимальности // Докл. РАН. 1998. Т. 358. № 2. С. 169–170.
- [7] Robinson D. Z. S. Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups. Pt. 1. Berlin: Springer, 1972.
- [8] Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980.
- [9] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. 3-е изд. М.: Наука, 1982.
- [10] Wehrfritz B. A. F. Infinite Linear Groups. Berlin: Springer, 1973.

Институт математики НАН Украины

Поступило
07.07.1999